应用数学和力学，第11卷第4期（1990年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一种用于幂律流体流动分析的加权罚有限元法*

陈大鹏　　赵　忠

（西南交通大学，1988年12月26日收到）

摘　要

本文采用罚-杂交/混合有限元列式，并引用由粘度加权的连续方程的另一种摄动，建议了一种新的粘性不可压幂律流体流动分析的有限元法．提出了一个数值算例，以显示方法的有效性．

一、引　　言

现代工业中经常遇到的非牛顿流体，由其本构关系来表征．在许多实际场合，与剪应力相比，法向应力差的影响很小，非弹性幂律流体模型足以描述流动特性．当考虑流动的数值模拟时，通常采用有限元速度-压力混合列式[1]或单变量罚函数列式[2]．但两者皆有某些缺点和限制[3,4]．作者建立的罚-杂交/混合有限元法[5~7]，仅以节点速度作为求解变量，亦无伪压力模式问题，并给出高精度的速度和压力解．这里，我们把它推广用于幂律流体的流动分析．由于粘度的变化可超过一个量级，这会给传统的罚函数列式造成困难，需要加以修正[8]．

二、模　型　问　题

考虑不可压缩粘性幂律流体．令Ω表示R^3中的有界开区域，$\partial\Omega$为其分片光滑边界，并且$\partial\Omega=S_\sigma\cup S_u$，$S_\sigma\cap S_u=\Phi$．动量守恒、质量守恒、协调方程及边界条件给出：

$$\boldsymbol{\sigma}'\cdot\nabla-\nabla p=\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\qquad \Omega\text{内}\tag{2.1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0\qquad \Omega\text{内}\tag{2.2}$$

$$\mathbf{V}=(\mathbf{u}\nabla+\nabla\mathbf{u})/2\qquad \Omega\text{内}\tag{2.3}$$

$$\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}\qquad S_u\text{上}\tag{2.4}$$

$$\mathbf{T}=\bar{\mathbf{T}}\qquad S_\sigma\text{上}\tag{2.5}$$

而粘度函数可表示为

$$\mu(\mathrm{I\!I})=K_0\,\mathrm{I\!I}^{n-1}\tag{2.6}$$

* 国家自然科学基金资助项目．

这里，σ'是偏应力张量，p是静水压力，$\mathbf{u}$是速度矢量，$\mathbf{V}$是应变率张量，ρ是质量密度，$\bar{\mathbf{u}}$是S_u上的指定速度，$\bar{\mathbf{T}}$是S_σ上的指定面力，II是应变率张量的第二不变量，K_0是参数，n是幂律指数。对于剪切变稀流体，$n<1$。易见，随着n的减小，问题的非线性程度将增加。而$n>1$对应于剪切增稠流体，这在实际流体中是少见的。

三、有限元列式

现在，将Ω剖分成有限数目的子区域（有限单元）Ω_k，$k=1, 2, \cdots, N$，并定义如下空间

$$
\begin{aligned}
T_0=\{(\sigma', p'): \sigma'_{ij}=\sigma'_{ji},\ \sigma'_{ij}\in H^1(\Omega_k),\ p'\in H^1(\Omega_k), \\
\sigma'\cdot\nabla-\nabla p'=0,\ 1\leqslant k\leqslant N\}
\end{aligned}
$$

$$H=\{\mathbf{u}\in(H^1(\Omega))^3: \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}},\ 在S_u上\}$$

$$H_0=\{\mathbf{u}\in(H^1(\Omega))^3: \mathbf{u}=0,\ 在S_u上\}$$

$$P=\{p_c\in L^2(\Omega): p_c|_{\Omega_k}=\text{const},\ 1\leqslant k\leqslant N\}$$

其中，$H^1(\Omega)$是Sobolev空间。由此，我们可构造幂律流体流动问题通常形式的罚-杂交/混合变分列式：

求$\mathbf{u}\in H$，$(\sigma', p')\in T_0$，$p_c\in P$，$p_c|_{\Omega_k}=p_k$，$p=p_k+p'$，使得

$$
\left.\begin{aligned}
&a_{\mathrm{I}}(\sigma', \tau)-b(\mathbf{u}, \tau)+c(\mathbf{u}, p^*)+l_\varepsilon(p, p^*)=0, \quad \forall(\tau, p^*)\in T_0 \\
&c(\mathbf{u}, q)+l_\varepsilon(p, q)=0 \quad \forall q\in P \\
&b(\mathbf{v}, \sigma')-c(\mathbf{v}, p)+d(\mathbf{u}, \mathbf{v})=\langle\bar{\mathbf{T}}, \mathbf{v}\rangle \quad \forall \mathbf{v}\in H_0
\end{aligned}\right\} \tag{3.1}
$$

式中，

$$
\left.\begin{aligned}
&a_{\mathrm{I}}(\sigma', \tau)=\sum_{k=1}^{N}\int_{\Omega_k}\frac{1}{2\mu(\mathrm{II})}\sigma':\tau d\Omega, \quad b(\mathbf{u}, \tau)=\sum_{k=1}^{N}\int_{\Omega_k}\mathbf{V}(\mathbf{u}):\tau d\Omega \\
&c(\mathbf{u}, q)=\sum_{k=1}^{N}\int_{\Omega_k}(\nabla\cdot\mathbf{u})q d\Omega, \quad l_\varepsilon(p, q)=\sum_{k=1}^{N}\int_{\Omega_k}\varepsilon p q d\Omega \\
&d(\mathbf{u}, \mathbf{v})=\sum_{k=1}^{N}\int_{\Omega_k}\rho[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}]\cdot\mathbf{v} d\Omega, \quad \langle\bar{\mathbf{T}}, \mathbf{v}\rangle=\sum_{k=1}^{N}\int_{S_{\sigma_k}}\bar{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{v} dS
\end{aligned}\right\} \tag{3.2}
$$

而ε是罚参数($\varepsilon>0$，$\varepsilon\ll1$)。当考虑有限元逼近时，给定有限维子空间$T_0^h\subset T_0$，$H^h\subset H$，$H_0^h\subset H_0$，则离散变分问题为：

求$\mathbf{u}_h\in H^h$，$(\sigma'_h, p'_h)\in T_0^h$，$p_c\in P$，$p_c|_{\Omega_k}=p_k$，$p_h=p'_h+p_k$，使得

$$
\left.\begin{aligned}
&a_{\mathrm{I}}(\sigma'_h, \tau_h)-b(\mathbf{u}_h, \tau_h)+c(\mathbf{u}_h, p_h^*)+l_\varepsilon(p_h, p_h^*)=0, \quad \forall(\tau_h, p_h^*)\in T_0^h \\
&c(\mathbf{u}_h, q)+l_\varepsilon(p_h, q)=0 \quad \forall q\in P \\
&b(\mathbf{v}_h, \sigma'_h)-c(\mathbf{v}_h, p_h)+d(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)=\langle\bar{\mathbf{T}}, \mathbf{v}_h\rangle \quad \forall \mathbf{v}_h\in H_0^h
\end{aligned}\right\} \tag{3.3}
$$

由此，我们用(6×1)矢量$\underline{\sigma}'$表示对称偏应力张量σ'，并假设

$$\mathbf{u}_h=\mathbf{N}\mathbf{q} \tag{3.4}$$

$$\underline{\sigma}'_h=\mathbf{D}\boldsymbol{\beta} \tag{3.5}$$

$$p_h=p_k+p'_h=p_k+\bar{\mathbf{D}}\boldsymbol{\beta} \tag{3.6}$$

式中，$\mathbf{q}$和$\boldsymbol{\beta}$分别是节点速度和偏应力参数，$\mathbf{N}$和$\mathbf{D}$，$\bar{\mathbf{D}}$是插值函数矩阵。由离散变分方程(3.3)可得到有限元矩阵方程（小量已略去）

$$\langle \mathbf{K}_\mu(\mathbf{q})+\mathbf{K}_\varepsilon+\mathbf{K}^*(\mathbf{q})\rangle\mathbf{q}=\mathbf{Q} \tag{3.7}$$

这里，

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{K}_\mu(\mathbf{q})=\bar{\mathbf{G}}^T H^{-1}\bar{\mathbf{G}}\text{——粘性项}(\bar{\mathbf{G}}=\mathbf{G}+(1/V_n)\mathbf{G}^{*T}\mathbf{S})\\&\mathbf{K}_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{V_n}\mathbf{S}^T\mathbf{S}\text{——罚项}\\&\mathbf{K}^*(\mathbf{q})=\int_\Omega[\rho\mathbf{N}^T(\mathbf{u}\cdot\nabla)]\mathbf{N}d\Omega\text{——对流项}\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

而矩阵$\mathbf{H}$，$\mathbf{G}$，$\mathbf{G}^*$，$\mathbf{S}$由下式定义

$$\left.\begin{aligned}&a_1(\sigma'_h,\ \sigma'_h)=\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{H}\boldsymbol{\beta},\ b(\mathbf{u}_h,\ \sigma'_h)-c(\mathbf{u}_h,\ p'_h)=\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{G}\mathbf{q}\\&l_\varepsilon(p'_h,\ p_k)=\varepsilon p_k\mathbf{G}^*\boldsymbol{\beta},\ c(\mathbf{u}_h,\ p_k)=p_k\mathbf{S}\mathbf{q}\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

注意到粘性项$\mathbf{K}_\mu$中的$\mathbf{H}$矩阵表达式，粘度$\mu(\mathrm{II})$出现在被积函数的分母上。可以看出，对于固定的μ值，当$\varepsilon\to0$时，不可压条件在积分意义上得到满足。反过来，对于固定的ε值，随着μ的增大，不可压约束的满足变得减弱。为此，考虑连续方程的由粘度μ加权的另一种摄动

$$\nabla\cdot\mathbf{u}+\varepsilon' p=0,\quad \varepsilon'=\varepsilon/\mu(\mathrm{II}) \tag{3.10}$$

亦即，罚参数通过粘度的局部值来计算。此时，相应的弱形式则为

$$c(\mathbf{u}_h,\ q)+l_{\varepsilon'}(p'_h,\ q)=0 \qquad \forall q\in P \tag{3.11}$$

这种加权形式的罚-杂交/混合有限元列式，能更满意地保持与粘度无关的不可压缩性，从而得到更准确的结果。由非线性本构关系及非线性对流项导致的非线性有限元方程，可通过迭代求解。

在下面的算例中，我们采用8-节点四边形单元，速度、偏应力插值与文[6]中的PH8-3单元相同。

四、数 值 算 例

考虑两块平行板中的Poiseuille流动，如图1所示。采用(4×1)单元网格，取幂律指数$n=0.2\sim1.0$进行了有限元分析，速度剖面显示在图2中。可见，随着n的减小，速度剖面变得越来越平坦。另外，计算得到的压

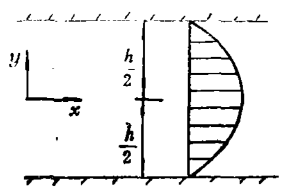

图1 Poiseuille流

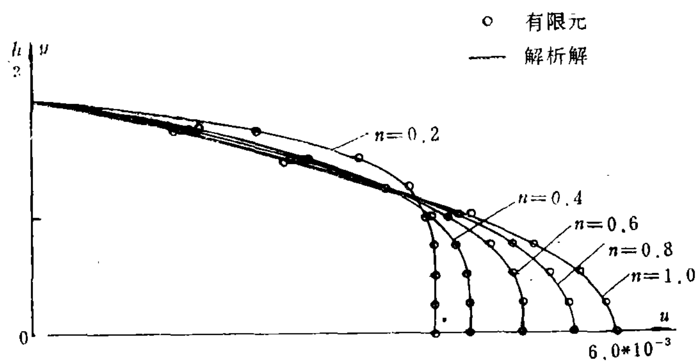

图2 速度剖面

力分布与解析解完全符合，这里没有给出。

五、结 语

通过采用由粘度加权的连续方程的另一种摄动，提出了一种粘性不可压幂律流体流动分析的加权罚-杂交/混合有限元法。可以更好地保持与粘度无关的不可压缩性，得到满意的速度、应力解。

参 考 文 献

[1] Miyazaki, M., Some finite element formulations for flow analysis of power-law fluid, *Comp. Mech.*, eds, G. Yagawa and S. N. Atluri, Springer-Verlag (1986).

[2] Bercovier, M., M. Engelman and J. Borman, Numerical simulation of non-Newtonian blood flow models by a finite element method, *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, eds. R. Glowinsky and J. L. Lions, North-Holland Publishing Company (1980).

[3] Carey, G. F. and J. T. Oden, *Finite Elements Fluid Mechanics*, Prentice-Hall Inc. (1986).

[4] Crochet, M. T., A. R. Davies and K. Walters, *Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow*, Elsevier (1984).

[5] 陈大鹏、赵忠，用于分析Stokes问题的加罚杂交/混合模型，第二届全国近代数学与力学讨论会，上海 (1987).

[6] Chen, D. P. and Z. Zhao, A penalty-hybrid finite element method for the analysis of Stokes flow, *Comp. Mech.*, eds. S. N. Atluri and G. Yanawa, Springer Verlag (1988).

[7] Chen, D. P. and Z. Zhao, A new finite element scheme for Navier-Stokes problems (to appear).

[8] Nakazawa, S. and O. C. Zienkiewicz, Finite element analysis of flow and coupled heat transfer in polymeric fluids, *Numerical Methods for Coupled Problems*, eds. E. Hinton, et al., Pineridge Press, Swansea, U. K. (1981).

A Weighted Penalty Finite Element Method for the Analysis of Power-Law Fluid Flow Problems

Chen Da-peng Zhao Zhong

(*Southwest Jiaotong University, Emei, Sichuan*)

Abstract

In this paper, a new finite element method for the flow analysis of the viscous incompressible power-law fluid is proposed by the use of penalty-hybrid/mixed finite element formulation and by the introduction of an alternative perturbation, which is weighted by viscosity, of the continuity equation. A numerical example is presented to exhibit the efficiency of the method.