应用数学和力学，第11卷第4期（1990年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一类含小参数的Hill方程的自由振动

邵孝湟　　王新志

（杭州师范学院）（甘肃工业大学）

（李骊推荐，1989年1月13日收到）

摘　　要

本文研究一类含小参数的 Hill 方程的初值问题，利用边值问题可解性条件及摄动理论中的伸缩参数法，给出寻求该初值问题近似周期解的方法，并以Mathieu方程为例作了具体计算．

一、引　　言

较早时，Hilb研究过Liouville型方程

$$u''+[\lambda+g(t)]u=0 \tag{1.1}$$

若方程中$g(t)$为实周期函数，则方程(1.1)转化为Hill方程．由于 Hill 方程在天体力学、无线电技术、自动控制等领域中有许多重要应用，所以近年来关于 Hill 方程仍有不少研究结果[2~6]．从应用角度考虑，希望设计的“运动”是稳定的周期函数．若给定初始条件

$$u(0)=\alpha,\ u'(0)=\beta \tag{1.2}$$

我们想问“在什么情况下，初值问题(1.1)+(1.2)的解是周期函数？”“用什么方法来寻找这种周期解？”这是人们感兴趣的问题．

按Floquet理论，具周期系数的线性齐次方程存在Floquet解，但Floquet 解还不是一般意义下的周期解．

本文研究一类含小参数的 Hill 方程

$$u''+[\lambda+\varepsilon g(t)]u=0 \tag{1.3}$$

其中λ，ε（$\varepsilon<1$）是参数，易知，当$g(t)=2\cos 2t$时，(1.3)退化为熟知的Mathieu方程．所以方程(1.3)属于比 Mathieu 方程更广的一类方程．我们利用边值问题的可解性条件及摄动理论中的伸缩参数法，回答了上述问题．并以Mathieu方程为例，作了具体计算．某些数据和文[7]得到的结果相同．

二、理论与方法

考虑初值问题

$$u''+[\lambda+\varepsilon g(t)]u=0;\ u(0)=\alpha,\ u'(0)=\beta \tag{2.1}$$

其中λ，ε($\varepsilon<1$)为参数，系数函数$g(t)$为区域[0，∞)上连续函数，且以T为周期。易知，初值问题(2.1)的解存在唯一，且其存在区间为[0，∞)。一般而言，该解不是T的周期函数，而与λ，ε，α，β和$g(t)$有关系。

为寻找(2.1)的周期解，证明一个定理。

定理 1 若λ是边值问题

$$\left.\begin{aligned}&u''+[\lambda+\varepsilon g(t)]u=0\\&u(0)=u(T)=\alpha,\ u'(0)=u'(T)=\beta\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

的特征值，则初值问题(2.1)的解$u=\varphi(t)$以T为周期。

证明 若$u=\psi(t)$是边值问题(2.2)的解，于是有

$$\psi(0)=\psi(T)=\alpha,\ \psi'(0)=\psi'(T)=\beta \tag{2.3}$$

设$u=\varphi(t)$是初值问题(2.1)的解，于是有

$$\varphi(0)=\alpha,\ \varphi'(0)=\beta \tag{2.4}$$

由(2.3)、(2.4)可看出

$$\varphi(0)=\psi(0),\ \varphi'(0)=\psi'(0) \tag{2.5}$$

因此

$$\varphi(t)\equiv\psi(t)\qquad\forall t\in[0,T] \tag{2.6}$$

从而

$$\varphi(T)=\psi(T),\ \varphi'(T)=\psi'(T) \tag{2.7}$$

由(2.3)、(2.5)和(2.7)可看出

$$\varphi(0)=\varphi(T),\ \varphi'(0)=\varphi'(T) \tag{2.8}$$

另一方面，作为初值问题(2.1)的解$u=\varphi(t)$，其存在区间为[0，∞)。易知，$v(t)=\varphi(t+T)$也是(2.1)中方程的解。由(2.8)可看出$v(t)$和$\varphi(t)$有相同的初始条件，故有

$$\varphi(t+T)\equiv\varphi(t)\qquad\forall t\in[0,\ \infty) \tag{2.9}$$

即$\varphi(t)$以T为周期。

现在我们讨论特征值λ的存在性，及确定它的方法。可以证明λ是可列的，从而λ所对应的周期解亦是可列的。

易知，边值问题(2.2)中的λ和ε有关，采用摄动理论中的伸缩参数法，设

$$\lambda=\lambda_0+\varepsilon\lambda_1+\varepsilon^2\lambda_2+\cdots \tag{2.10}$$

$$u(t)=u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2u_2+\cdots \tag{2.11}$$

把α和β展为ε的幂级数

$$\alpha=\alpha_\varepsilon(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots),\ \beta=\beta_\varepsilon(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots) \tag{2.12}$$

其中

$$\alpha_\varepsilon=(1-\varepsilon)\alpha,\ \beta_\varepsilon=(1-\varepsilon)\beta \tag{2.13}$$

把(2.10)、(2.11)和(2.12)代入(2.2)得到

$$\begin{aligned}&(u_0''+\varepsilon u_1''+\varepsilon^2u_2''+\cdots)+(\lambda_0+\varepsilon\lambda_1+\varepsilon^2\lambda_2+\cdots+\varepsilon g(t))(u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2u_2+\cdots)=0\\&(u_0(0)+\varepsilon u_1(0)+\varepsilon^2u_2(0)+\cdots)-\alpha_\varepsilon(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots)=0\\&(u_0(T)+\varepsilon u_1(T)+\varepsilon^2u_2(T)+\cdots)-\alpha_\varepsilon(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots)=0\\&(u_0'(0)+\varepsilon u_1'(0)+\varepsilon^2u_2'(0)+\cdots)-\beta_\varepsilon(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots)=0\\&(u_0'(T)+\varepsilon u_1'(T)+\varepsilon^2u_2'(T)+\cdots)-\beta_\varepsilon(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots)=0\end{aligned}$$

合并ε同次幂的项，让ε各幂次的系数等于零，即可得到

$$u_0''+\lambda_0 u_0=0;\ u_0(0)=u_0(T)=\alpha_s,\ u_0'(0)=u_0'(T)=\beta_s \tag{2.14}$$

$$\left.\begin{aligned}&u_1''+\lambda_0 u_1=-(\lambda_1+g(t))u_0\\&u_1(0)=u_1(T)=\alpha_s,\ u_1'(0)=u_1'(T)=\beta_s\end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

$$\left.\begin{aligned}&u_2''+\lambda_0 u_2=-(\lambda_1+g(t))u_1-\lambda_2 u_0\\&u_2(0)=u_2(T)=\alpha_s,\ u_2'(0)=u_2'(T)=\beta_s\end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

逐个求解上述边值问题，(2.14)中方程的通解为

$$u_0=C_1\cos\sqrt{\lambda_0}\,t+C_2\sin\sqrt{\lambda_0}\,t \tag{2.17}$$

由$u_0(0)=\alpha_s$，和$u_0'(0)=\beta_s$可推知

$$C_1=\alpha_s,\quad C_2=\beta_s/\sqrt{\lambda_0} \tag{2.18}$$

由$u_0(T)=\alpha_s$，和$u_0'(T)=\beta_s$可推知

$$\alpha_s\sqrt{\lambda_0}\cos\sqrt{\lambda_0}\,T+\beta_s\sin\sqrt{\lambda_0}\,T=\alpha_s\sqrt{\lambda_0} \tag{2.19}$$

$$-\alpha_s\sqrt{\lambda_0}\,\sin\sqrt{\lambda_0}\,T+\beta_s\cos\sqrt{\lambda_0}\,T=\beta_s \tag{2.20}$$

由(2.19)和(2.20)可得到

$$\alpha_s\sqrt{\lambda_0}\,\sin\sqrt{\lambda_0}\,T+\beta_s\cos\sqrt{\lambda_0}\,T=\beta_s \tag{2.21}$$

解(2.20)和(2.21)得到

$$2\beta_s\cos\sqrt{\lambda_0}\,T=2\beta_s \tag{2.22}$$

或

$$2\alpha_s\sqrt{\lambda_0}\,\sin\sqrt{\lambda_0}\,T=0 \tag{2.23}$$

若$\beta_s\neq 0$，由(2.22)得到

$$\lambda_0=4n^2\pi^2/T^2\qquad(n=1,2,\cdots) \tag{2.24}$$

若$\alpha_s\neq 0$，由(2.23)得到

$$\lambda_0=m^2\pi^2/T^2\qquad(m=1,2,\cdots) \tag{2.25}$$

易知，序列(2.24)是序列(2.25)的一个子列．若$\alpha_s\neq 0$同时$\beta_s\neq 0$，则λ_0必须由(2.24)确定．事实上，它是边值问题(2.14)的特征值．

以下讨论$n=1$的情形．当$n=1$时，(2.24)变为

$$\lambda_0=4\pi^2/T^2 \tag{2.26}$$

把(2.18)和(2.26)代入(2.17)，得到(2.14)的解为

$$u_0=\alpha_s\cos\frac{2\pi}{T}t+\beta_s\frac{T}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{T}t \tag{2.27}$$

把(2.26)和(2.27)代入(2.15)得到

$$\left.\begin{aligned}&u_1''+\frac{4\pi^2}{T^2}u_1=-(\lambda_1+g(t))\left(\alpha_s\cos\frac{2\pi}{T}t+\beta_s\frac{T}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{T}t\right)\\&u_1(0)=u_1(T)=\alpha_s,\ u_1'(0)=u_1'(T)=\beta_s\end{aligned}\right\} \tag{2.28}$$

这是一个非齐次的边值问题．方程和边界条件都是非齐次的．若(2.28)中方程的右边不存在，则(2.28)退化为(2.14)．由于(2.14)有非平凡解，故必须考虑(2.28)的可解性．为此

证明下述定理。

定理 2 考虑边值问题

$$\left.\begin{aligned}&v''+(4n^2\pi^2/T^2)v=h(t)\\&v(0)=v(T)=A,\ v'(0)=v'(T)=B\end{aligned}\right\}\tag{2.29}$$

若(2.29)中的函数$h(t)$满足下述条件

$$\int_0^T h(t)\cos\frac{2n\pi}{T}tdt=0,\quad \int_0^T h(t)\sin\frac{2n\pi}{T}tdt=0\tag{2.30}$$

则(2.29)有上述解

$$v=A\cos\frac{2n\pi}{T}t+B\frac{T}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{T}t+\frac{T}{2n\pi}\int_0^t h(\tau)\sin\frac{2n\pi}{T}(t-\tau)d\tau\tag{2.31}$$

把(2.31)代入(2.29)，可以证明(2.31)是(2.29)的解。边值问题(2.15)和(2.16)属于定理 2 所考虑的情形。应用定理 2，(2.28)的可解性条件为

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^T(\lambda_1+g(t))\left(\alpha_0\cos\frac{2\pi t}{T}+\beta_0\frac{T}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{T}t\right)\cos\frac{2\pi}{T}tdt=0\\&\int_0^T(\lambda_1+g(t))\left(\alpha_0\cos\frac{2\pi t}{T}+\beta_0\frac{T}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{T}t\right)\sin\frac{2\pi}{T}tdt=0\end{aligned}\right\}\tag{2.32}$$

应用Fourier级数理论，把(2.32)简化为

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_1\alpha_0T+\int_0^T g(t)\left\{\alpha_0\left(1+\cos\frac{4\pi}{T}t\right)+\beta_0\frac{T}{2\pi}\sin\frac{4\pi}{T}t\right\}dt=0\\&\lambda_1\beta_0\frac{T^2}{2\pi}+\int_0^T g(t)\left\{\alpha_0\sin\frac{4\pi}{T}t+\beta_0\frac{T}{2\pi}\left(1-\cos\frac{4\pi}{T}t\right)\right\}dt=0\end{aligned}\right\}\tag{2.33}$$

给定α_0，β_0和$g(t)$后，可从(2.33)确定λ_1。把所得λ_1代入(2.28)，并利用(2.31)，可得(2.28)的解$u_1(t)$。此时，再把λ_0，u_0，λ_1和u_1代入(2.16)，应用定理2，又求得λ_2和u_2，……。继续这一过程，依次求得ε在(2.10)和(2.11)中的系数。因此，λ和$u(t)$可以被确定。需指出的是，对某些$g(t)$，(2.33)中的两个可解性条件可能不相容。举例说，取$h(t)=2\cos 2t$，$\lambda_0=4$ ($n=1$)，则(2.30)不成立。一般来说，选择适当的n可以避免这种情形。(2.30)中的两个条件之一，通常是恒等式。

我们仅讨论了$n=1(\lambda_0=4\pi^2/T^2)$的情形，类似地，我们可讨论$n=2,3,\cdots(\lambda_0=16\pi^2/T^2,36\pi^2/T^2\cdots)$的情形。因此，特征值$\lambda$是可列的，周期解(2.11)也是可列的。

三、实 例

我们用熟知的Mathieu方程来说明上述方法。把(2.1)改写为

$$u''+[\lambda+2\varepsilon\cos 2t]u=0;\ u(0)=\alpha,\ u'(0)=\beta\tag{3.1}$$

在此情形，显然，$g(t)=2\cos 2t$，$T=\pi$。为求(3.1)的两个线性独立的解，我们给出如下两个初始条件

$$\alpha=1,\ \beta=0\tag{3.2}$$

$$\alpha=0,\ \beta=1\tag{3.3}$$

对(3.2)和(3.3)所示情形，由(2.13)分别可得

$$\alpha_s=1-\varepsilon,\ \beta_s=0 \tag{3.4}$$

$$\alpha_s=0,\ \beta_s=1-\varepsilon \tag{3.5}$$

对(3.4)所示情形，一系列的边值问题为

$$u_0''+\lambda_0u_0=0;\ u_0(0)=u_0(\pi)=\alpha_s,\ u_0'(0)=u_0'(\pi)=0 \tag{3.6}$$

$$\left.\begin{array}{l}u_1''+\lambda_0u_1=-(\lambda_1+2\cos2t)u_0\\ u_1(0)=u_1(\pi)=\alpha_s,\ u_1'(0)=u_1'(\pi)=0\end{array}\right\} \tag{3.7}$$

$$\left.\begin{array}{l}u_2''+\lambda_0u_2=-(\lambda_1+2\cos2t)u_1-\lambda_2u_0\\ u_2(0)=u_2(\pi)=\alpha_s,\ u_2'(0)=u_2'(\pi)=0\end{array}\right\} \tag{3.8}$$

…………

这里我们仅对$n=1$的情形进行讨论．把$n=1$代入(2.25)，得到

$$\lambda_0=4 \tag{3.9}$$

把(3.9)代入(3.6)，由(2.27)得到(3.6)的解

$$u_0=\alpha_s\cos2t \tag{3.10}$$

把(3.9)和(3.10)代入(3.7)得到

$$\left.\begin{array}{l}u_1''+4u_1=-(\lambda_1+2\cos2t)\alpha_s\cos2t\\ u_1(0)=u_1(\pi)=\alpha_s,\ u_1'(0)=u_1'(\pi)=0\end{array}\right\} \tag{3.11}$$

利用可解性条件(2.30)可得

$$\lambda_1\pi+\int_0^\pi 2\cos2t(1+\cos4t)dt=0 \tag{3.12}$$

$$\int_0^\pi 2\cos2t\sin4t\,dt=0 \tag{3.13}$$

(3.13)为恒等式．从(3.12)可得

$$\lambda_1=0 \tag{3.14}$$

把(3.14)代入(3.11)，解该方程可得

$$u_1=\frac{\alpha_s}{12}(-3+14\cos2t+\cos4t) \tag{3.15}$$

把(3.9)、(3.10)、(3.14)和(3.15)代入(3.8)得到

$$\left.\begin{array}{l}u_2''+4u_2=\dfrac{-\alpha_s}{6}\cos2t(-3+14\cos2t+\cos4t)-\lambda_2\alpha_s\cos2t\\ u_2(0)=u_2(\pi)=\alpha_s,\ u_2'(0)=u_2'(\pi)=0\end{array}\right\} \tag{3.16}$$

利用可解性条件(2.30)可得

$$\int_0^\pi\left[\lambda_2\cos2t+\frac{1}{6}\cos2t(-3+14\cos2t+\cos4t)\right]\cos2t\,dt=0 \tag{3.17}$$

$$\int_0^\pi\left[\lambda_2\cos2t+\frac{1}{6}\cos2t(-3+14\cos2t+\cos4t)\right]\sin2t\,dt=0 \tag{3.18}$$

(3.18)为恒等式．从(3.17)可得

$$\lambda_2=5/12 \tag{3.19}$$

把(3.19)代入(3.16)得到

$$\left.\begin{aligned}&u_2''+4u_2=\frac{-\alpha_s}{12}(14+14\cos4t+\cos6t)\\&u_2(0)=u_2(\pi)=\alpha_s,\ \ u_2'(0)=u_2'(\pi)=0\end{aligned}\right\}\tag{3.20}$$

利用公式(2.31)，求得(3.20)的解为

$$u_2=\alpha_s\left\{\frac{-7}{24}+\frac{1372}{1152}\cos2t+\frac{7}{72}\cos4t+\frac{1}{384}\cos6t\right\}\tag{3.21}$$

把(3.9)、(3.14)和(3.19)代入(2.10)得到

$$\lambda=4+\frac{5}{12}\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)\tag{3.22}$$

把(3.10)、(3.15)和(3.21)代入(2.11)得到

$$\begin{aligned}u(t)=&\cos2t+\frac{\varepsilon}{12}\{-3+2\cos2t+\cos4t\}\\&+\frac{\varepsilon^2}{1152}\{-48+28\cos2t+16\cos4t+3\cos6t\}+o(\varepsilon^2)\end{aligned}\tag{3.23}$$

类似地，对情形(3.5)可得到

$$\lambda=4-\frac{\varepsilon^2}{12}+o(\varepsilon^2)\tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}u(t)=&\frac{1}{2}\sin2t-\frac{\varepsilon}{12}\left\{\sin2t-\frac{1}{2}\sin4t\right\}\\&+\frac{\varepsilon^2}{2304}\{23\sin2t-16\sin4t+3\sin6t\}+o(\varepsilon^2)\end{aligned}\tag{3.25}$$

(3.23)和(3.25)是初值问题(3.1)两个线性无关的解的近似表达式．它们分别对应初始条件(3.2)和(3.3)．

既然我们仅对(ε^2)阶的项有兴趣，故可从(3.23)和(3.25)中分别取前三项，于是有

$$u(0)=1-\varepsilon^2/1152,\ \ u'(0)=0\tag{3.26}$$

$$u(0)=0,\ \ u'(0)=1\tag{3.27}$$

显然可看出初始条件(3.2)和(3.26)几乎一样，而(3.3)和(3.27)完全一致．

图1中u和v所示曲线分别对应于(3.23)和文[7]中(11.89)；图2中u和v所示曲线分别对应于(3.25)和文[7]中(11.91)．u和v是 Mathieu 方程的近似解．用本文中的方法对Mathieu方

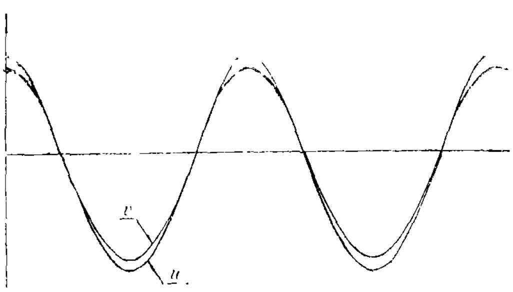

图1　(3.23)表示的曲线u与文[7]中(11.89)表示的曲线v的比较图($\varepsilon=0.5$)

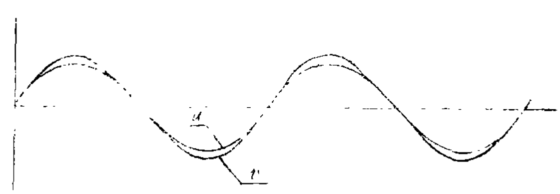

图2　(3.25)表示的曲线u与文[7]中(11.91)表示的曲线v的比较图($\varepsilon=0.5$)

程所得之结果与文[7]中的结果(11.89)((11.91))相差甚微. 值得注意的是，本文提供的方法可用来求一般Hill方程的周期解.

参考文献

[1] 卡姆克, E.,《常微分方程手册》, 科学出版社 (1977), 312—313.

[2] Levy, D. and J. B. Keller, Instability intervals of Hill's equation, *Comm. Pure Appl. Math.*, **16** (1963), 469—476.

[3] Davis, S. H. and S. Rosenblat, A quasiperiodic Mathieu-Hill equation, *SIAM J. Appl. Math.*, **38** (1980), 139—155.

[4] Berryman, J. G., Floquet exponent for instability intervals of Hill's equation, *Comm. Pure Appl. Math.*, **32** (1979), 113—120.

[5] Hochstadt, H., On the explicit solution of a special Hill's equation, *J. Math. Anal. Appl.*, **79** (1981), 517—520.

[6] Arron, T. and B. Simon, The asymptotics of the gap in the Mathieu equation, *Ann. Physics*, **134** (1981), 76—84.

[7] Nayfeh, A. H., *Introduction to Perturbation Techniques*, J. Wiley & Son, New York (1981), 247.

Free Vibration of a Class of Hill's Equation Having a Small Parameter

Shao Xiao-huang

(Hangzhou Teachers College, Hangzhou)

Wang Xin-zhi

(Gansu University of Technology, Lanzhou)

Abstract

In this paper, we consider the initial value problem of a class of Hill's equation having a small parameter. Using the solvable condition of boundary value problem and the stretched parameter method in the perturbation techniques, we present the method which can be applied to obtain asymptotic periodic solution of the initial value problem. As an example, we consider Mathieu equation and present its computational result.