

弹性电介质复合材料的多极材料力学*

周 树 昂

(瑞典 斯德哥尔摩皇家工学院力学系)

(谢庆祥推荐, 1988年4月19日收到)

摘 要

本文根据物质材料的多极概念研究了弹性电介质复合材料的宏观力学和电的性质。特别是, 运用多极物质材料的统计连续体理论, 可以得到不均匀颗粒间的电弹性相互作用和微结构(尺寸、形状、取向…) 对复合材料的宏观性质的影响。本文首先给出了在某一无限的弹性电介质体中具有电极化的椭球的弹性不均匀性的基本解, 这个解是由于电弹性相互作用而对 Eshelby 的经典弹性解的修正。其次, 本文导出了电弹性相互作用的弹性电介质复合材料的宏观本构关系和宏观材料参量, 最后对稀释的复合材料的具有统计的异向性的、形状效应的、以及电弹相互作用的一些问题进行了定量计算。

一、引 论

近年来, 复合材料的研究得到重视, 一种复合材料的宏观特性, 受组成物的性质, 它们的组成比例、形状、取向、分布以及这些组成物之间的相互作用等因素的强烈影响。由于复合材料的复杂性, 在处理复合材料的实际问题时, 通常都要引进一些简化假设, 从而建立一些在理论可预计的复合材料模型, 例如, 在研究复合材料的宏观电磁性质时, 略去了变形的影响, 或在研究复合材料的有效机械性质时, 略去了电磁效应的影响。(例如见 Böttcher^[1], Kröner^[2], Willis^[3], Hashin 及 Strikmarr^[4], Beran^[5], Miller^[6], Jeffrey^[7], McCox 及 Beran^[8], Van Beek^[9], Hale^[10], Christensen^[11], Zhou, S.A 和 Hsieh, R.K.T^[12]等)。以这些假设为基础上的许多方法和模型在很多情况下应用效果很好, 但在电磁效果和变形效果都很强, 而且它们耦合作用很重要时, 就不适用了, 这样的例子, 即使在均匀材料中, 也是很多的。(例如 Nelson^[13], Maugin^[14], Zhou, S.A 和 Hsieh, R.K.T^[15, 17]等)。当试图采用经典的有效介质理论来研究电磁变形复合材料的宏观响应时, 就遇到各种困难。例如: 当在经典有效介质理论中采用众所周知的自洽方案时, 我们只能假定宏观有效本构关系已知, 而这些关系中的有效材料常数是待定的。但是, 如果连复合材料的宏观本构关系的式子都不知道, 则这个程序就根本失败了, 而且对电磁变形复合材料而言, 一般都是如此, 对于这类复合材料而言, 它们的宏观本构关系和宏观材料常数都是从复合材料的特殊的材料微结构和微观的材料性质中推导出来的。

* 原稿为英文, 由钱伟长译为中文, 陈明伦、杨砚校对。

在本文中,从材料的多极(R·K·T·Hsieh^[81])概念出发,研究弹性电介质中大量的统计分配的非均匀性的稳定的宏观性质.特别是,将运用统计连续统的材料多极理论(S·A·Zhou和 R·K·T·Hsieh^[12]和 S·A·Zhou^[18])研究弹性电介质复合材料的非均匀性的微结构效应(大小,形状,异性取向…)和电弹性耦合现象对宏观特性的影响.在这一理论中,复合材料的模型为数量多的非均匀颗粒散布在一均匀基质中所组成的介质,这些颗粒假定是牢固地和基质结合在一起的.复合材料的微结构假定是无规则的,所以可以采用统计处理.非均匀颗粒在模型中看作为点材料诱导所生的多极子,而复合材料微观场的总体平均所导出的各种宏观场,是用均匀基质中材料多极子的统计连续统来描写的.

在下文,首先在第二节中给出一个无限弹性电介质中具有电极化的椭球弹性不均匀性的基本解,它在研究弹性电介质复合材料时至关重要.文中将证明,在一个无限弹性介质中具有椭球弹性不均匀性的经典 Eshelby 弹性解^[20],由于存在着电弹性相互作用而应与修正.第三节中引入了材料多极子的统计连续统的概念,而第四节则发展了处理多极子统计连续统的办法来研究具有不规则分布的非均匀性的弹性电介质复合材料.第五第六节,通过材料多极子统计连续统理论研究了弹性电介质复合材料的宏观性质.

二、弹性电介质固体中一种椭球非均匀性的解

众所周知,对于弹性不均匀夹杂体的经典 Eshelby 结果,在研究各种弹性复合材料(例如, Eshelby^[19], Mura^[20])的宏观性质时至关重要.在本节,我们研究一种无限弹性电介质中夹杂着一个电极化的椭球不均匀弹性颗粒的问题.颗粒的尺寸比分子的尺寸大,从而可以作连续统处理.不考虑电缩作用,则颗粒的电介极化可以写成下式

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi^* \mathbf{E} + \mathbf{P}^0 \quad (2.1)$$

这里 \mathbf{P}^0 是自发极化, χ^* 是颗粒的介电极化率.

在下文中,我们假定,颗粒材料和基质材料的性质都是各向同性的,它们分别用 \mathbf{C}^* 和 \mathbf{C} 表示弹性模量,用 χ^* 和 χ 表示介电极化率.而且基质的介电极化是很小的,所以,作用在基质上的电体积力可以略去不计.

首先,让我们研究在一无限弹性均匀基质中一个位于 x' 的电偶极子在外电场 \mathbf{E} 的作用下所受的电力在 x 点产生的弹性变形.利用格林函数法可得弹性位移场

$$u_i(x) = G_{ij}(x - x' - \frac{d}{2} \mathbf{n}') f_j^+ + G_{ij}(x - x' + \frac{d}{2} \mathbf{n}') f_j^- \quad (2.2)$$

其中 \mathbf{n}' 是在电偶极子方向内的单位矢量, d 是电偶极子两个点电荷间的距离, G 是弹性介质的格林函数,而 f^+ 和 f^- 是点电体积力,它们是

$$f^+ = q\mathbf{E}\left(x' + \frac{d}{2} \mathbf{n}'\right), \text{ 及 } f^- = -q\mathbf{E}\left(x' - \frac{d}{2} \mathbf{n}'\right) \quad (2.3)$$

这里 q 是点体的电荷.对于一个理想的点电偶极子 \mathbf{p} 而言,它是通过两电荷间距离无限缩短,同时,使电荷量不断增加,使乘积 $\mathbf{p} = qd\mathbf{n}'$ 保持为常矢量的极限过程得到的,这时 (2.2) 式的位移变成

$$u_i(x) = G_{ij}(x - x') p_j E_{j,i}(x') - G_{ij,k}(x - x') p_k E_j(x') \quad (2.4)$$

这里,假定外电场足够光滑,所以,一切高阶项 $O(d^2)$ 在极限过程中趋近于零.

这就证明了,这样一个电偶极子所产生的弹性场可以模拟为由在 x' 处的所诱生弹性单极

点

$$P_{j,k} = p_k E_j(x') \quad (2.5)$$

和在 x' 处所诱生的点体积力

$$f_i = p_j E_{i,j}(x') \quad (2.6)$$

所产生的弹性场。这里的总体积力对于均匀外电场而言应该等于零。

现在，对于在某种外电场和机械载荷(用 E^0 和 u^0 表示)作用下，夹杂在基质中的具有连续统电极化 P 的不均匀颗粒电位移场和弹性位移场可以分别求得如下：

$$E_i = E_i^0 + \int_{V_1} P_k^i(x') G_{i,k}^e(x-x') dx' \quad (2.7)$$

和

$$u_i = u_i^0 + \int_{V_1} f_j^i(x') G_{i,j}^c(x-x') dx' - \int_{V_1} P_{j,k}^i(x') G_{i,j,k}^c(x-x') dx' \quad (2.8)$$

其中 G^e 和 G^c 分别为无限基质中的电格林函数和弹性格林函数。上角码 e 和 c 分别用以区别与电有关的量和与弹性有关的量。

可以证明，这种颗粒的效果可以模型如下：用下列定义的连续统电偶极子的分布

$$P_k^i = P_k^0 + \Delta e_{kj} E_j \quad (2.9)$$

并分别用下列定义的体积力和连续统弹性单极点

$$f_j^i = P_k E_{j,k} \quad (2.10)$$

及

$$P_{j,k}^i = P_k E_j - \Delta C_{jkmn} u_{m,n} \quad (2.11)$$

其中 Δe 和 ΔC 为颗粒的材料性质和作为各向同性材料的基质的材料性质之间的摄动值。它们是

$$\Delta e_{ij} = (e^* - e) \delta_{ij} \quad (2.12)$$

其中 $e (= e_0(1+\chi))$ 和 $e^* (= e_0(1+\chi^*))$ 分别为基质和颗粒的介电常数，而且

$$\Delta C_{ijkl} = (\lambda^* - \lambda) \delta_{ij} \delta_{kl} + (\mu^* - \mu) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.13)$$

这里的 λ ， μ 和 λ^* ， μ^* 分别是基质和颗粒的拉梅弹性常数。

为了决定这些诱生的连续统电的和弹性的多极子，我们只能求解方程式(2.7)和(2.8)，一般说来它们是耦合的，因为弹性变形和电场有关，但电场又和颗粒的取向有关，而颗粒取向又受弹性变形的影响。作为初步近似，我们可以略去由于弹性变形所产生的颗粒取向微小变化对电场的影响。于是，对于均匀外电场和弹性应变场而言，我们可以发现电所诱生的体积力等于零，而且颗粒内的电场和弹性应变场也是均匀的，它们分别为

$$E_i = \left(\delta_{ij} + \frac{\Delta e}{e} L_{ij}^e \right)^{-1} \left(E_j^0 - \frac{1}{e} L_{im}^e P_m^0 \right) \quad (2.14)$$

及

$$e_{ij} = (\delta_{im} \delta_{jn} + L_{ijkl}^c \Delta C_{ikmn})^{-1} (e_{nn}^0 + L_{mnik}^c E_i P_k) \quad (2.15)$$

其中 L^e 和 L^c 分别为电去极化张量和弹性去极化张量，定义为

$$L_{ij}^e = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{x'_i n'_j}{|x'_i|^{3/2}} dS' \quad (2.16)$$

及

$$L_{ijkl}^c = -\frac{1}{2} \int_{S_1} (G_{i,j,l'}^c + G_{i,l',j}^c) n'_k dS' \quad (2.17)$$

当颗粒为椭球形时, 它们是常量张量。这里, S_1 是椭球的表面, \mathbf{n}' 是表面 S_1 的外法向矢量, G° 是各向同性体的弹性格林函数, 它是

$$G_{ij}^\circ(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \frac{1}{8\pi\mu} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \left((3-4\nu) \delta_{ij} + \frac{(x_i-x'_i)(x_j-x'_j)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2} \right) \quad (2.18)$$

当颗粒为圆球形时, 电的和弹性去极化张量可以用显式表示:

$$L_{ij}^\circ = \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (2.19)$$

$$L_{ijkl}^\circ = \frac{1}{30\mu} \left(\frac{9\kappa+18\mu}{3\kappa+4\mu} (\delta_{kj}\delta_{il} + \delta_{ik}\delta_{jl}) - \frac{6\kappa+2\mu}{3\kappa+4\mu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \quad (2.20)$$

而在圆球颗粒内的电场和弹性应变场可以推出显式为

$$\mathbf{E}_i = \frac{3\varepsilon}{3\varepsilon + \Delta\varepsilon} \left(\mathbf{E}_i^\circ - \frac{1}{3\varepsilon} \mathbf{P}_i^\circ \right) \quad (2.21)$$

及

$$e_{kk} = \frac{3\kappa+4\mu}{3\kappa+4\mu+3\Delta\lambda+2\Delta\mu} e_{kk}^\circ + \frac{E_k P_k}{3\kappa+4\mu+3\Delta\lambda+2\Delta\mu} \quad (2.22)$$

对于 $i \neq j$ 而言, 有

$$e_{ij} = \frac{5\mu(3\kappa+4\mu)}{5\mu(3\kappa+4\mu) + \Delta\mu(6\kappa+12\mu)} e_{ij}^\circ + \frac{(3\kappa+6\mu)(E_i P_j + E_j P_i)}{10\mu[(3\kappa+4\mu) + \Delta\mu(12\kappa+24\mu)]} \quad (2.23)$$

其中 $\kappa = \lambda + 2\mu/3$ 为弹性体积模量, 颗粒的介电极化 \mathbf{P} 和电场 \mathbf{E} 分别由 (2.1) 和 (2.21) 式给出。

可以证明, 对于具有电极化的一个椭球弹性不均匀颗粒夹杂在一无限弹性电介质中而言, 由于电弹性相互作用的存在, 经典 Eshelby 弹性解必须在方程 (2.15) 的右侧增加一项, 进行修正。

在颗粒内部和外部的应力场可以根据 (2.8) 式, 动量和动量矩平衡原理求得。

$$t_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl} u_{k,l}(\mathbf{x}) + (\Delta C_{ijkl} u_{k,l}(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_j(\mathbf{x}) E_i(\mathbf{x})) \gamma(\mathbf{x}) \quad (2.24)$$

其中 $\gamma(\mathbf{x})$ 是指示函数, 它的定义是

$$\gamma(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{x} \text{ 在 } V_1 \text{ 中}) \\ 0 & (\mathbf{x} \text{ 不在 } V_1 \text{ 中}) \end{cases} \quad (2.25)$$

颗粒中弹性变形场的反对称部份可以用反对称变形张量 $2\omega = \nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T$ 来研究, 经过一些计算后, 得

$$\omega_{ij} = \omega_{ij}^\circ + L_{ijkl}^\circ (\Delta C_{lmnp} e_{mn} - P_k E_l) \quad (2.26)$$

其中 L° 张量的定义为

$$L_{ijkl}^\circ = \frac{1}{2} \int_{S_1} (G_{it, j'}^\circ - G_{jt, i'}^\circ) n'_k dS' \quad (2.27)$$

在圆球颗粒的情况下, 它是

$$L_{ijkl}^\circ = \frac{1}{6\mu} (\delta_{ik}\delta_{lj} - \delta_{il}\delta_{kj}) \quad (\text{在 } V_1 \text{ 中}) \quad (2.28)$$

对于圆球颗粒而言, 我们可以从 (2.26) 式求得

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u}^\circ + \frac{\varepsilon}{\mu(3\varepsilon + \Delta\varepsilon)} \mathbf{P}^\circ \times \mathbf{E}^\circ \quad (2.29)$$

它给出在转动张量和颗粒自发极化引起的电矩之间的比例关系。

这里证明，圆球颗粒的转动张量和颗粒的弹性性质无关，而且在均布外载下，它在颗粒也是一个常量矢量。必须指出，(2.29)式只能适用于颗粒的小转动，因为这个解是从小变形理论推导出来的。对于颗粒的大转动而言，我们应该采用有限变形理论。

本节的结论为，我们用多极子理论研究并求得了具有电极化的一个椭球弹性不均匀夹杂体夹杂在无限弹性电介质中的基本解。我们发现，在均布的电场和弹性载荷下，具有电极化的椭球弹性夹杂体所产生的弹性应变和电场都是均匀的，而且可以从(2.14)式和(2.15)式求得。具有自发极化的夹杂体受电矩作用时引起(2.29)式所表示的夹杂颗粒的均匀转动。无限弹性介质夹杂着椭球不均匀颗粒的经典 Eshelby 解，在弹性电介质的情况下，应有电弹性相互作用的修正。

三、统计连续统的材料多极子

上文业已证明基质上的一个非均匀夹杂体可以用均匀基质中的连续统材料多极子束模型化。而且，虽然某些复合材料可以有规则的结构，例如叠层介质那样，其材料性质可以有明确的周期性，但是，大量的复合材料，微结构非常复杂，很难在每一点上确定其材料性质。很有可能，关于这类复合材料的微结构只有一些统计信息。例如，有关弥散强化或硬化的材料，颗粒增强的材料，以及切断的纤维增强的材料等。为了研究由大数量杂乱分布的非均匀颗粒的各种复合材料，我们采用统计法进行研究，在本节内，我们将引进统计连续统的电多极和弹性多极的概念。

和经典的统计力学的吉布斯 (Gibbs) 系综相象的概念，我们考虑有大量几何形状相同，宏观电性质和弹性性质相同，受到数量相同的点体电荷阵列和点体力的阵列的作用的独立系综，但这些点体电荷的未定分布情况已变化，这些点体力的每一样品的分布和取向也改变 (图1)。设某一已给样品中共有 M 个体荷和体力阵列，则其总电场和总弹性位移场一般可以写成

$$E_i(x; x^1, \dots, x^M, \omega^1, \dots, \omega^M) = \sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} P_{S_1 \dots S_k}^{\omega^\alpha} G_{,i S_1 \dots S_k}^\alpha(x, x^\alpha) \quad (3.1a)$$

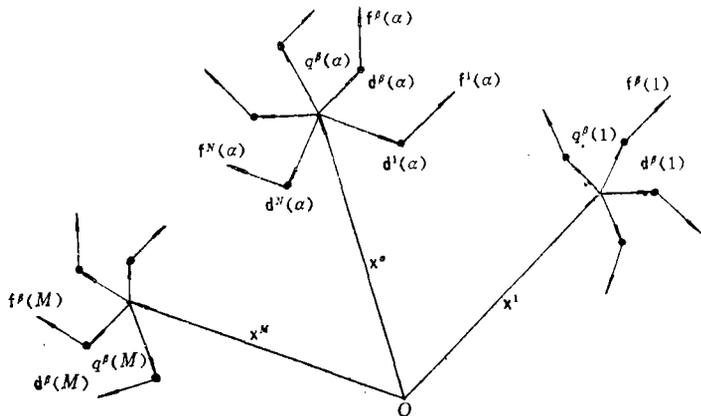


图1 点体力阵列的分布图

$$u_i(x; x^1, \dots, x^M; \omega^1, \dots, \omega^M) = \sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} P_{jS_1 \dots S_k}^{\alpha} G_{ij, S_1 \dots S_k}(x, x^{\alpha}) \quad (3.1b)$$

其中 x^{α} 是一个随机变量 (不同的样品各不相同), 它表示第 α 个点体力阵列的中心位置, 也代表第 α 个点体电荷阵列的中心位置, 而 ω^{α} 是一种随机参量 (也可以提几种随机参量), 它表徵体积力和体积电荷阵列的微结构. 假定样品是无限的弹性电介质材料, G^{α} 和 G_{ij} 分别是样品的电格林函数和弹性格林函数, $P_{S_1 \dots S_k}^{\alpha}$ 和 $P_{jS_1 \dots S_k}^{\alpha}$ 分别是第 α 个点电荷阵列和第 α 个点体积力阵列的 k 阶电多极矩和弹性多极矩. 对于自身是电中性的电荷阵列而言, $P^{\alpha\alpha} = 0$, 而对于在自身平衡的点体积力阵列而言, $P_j^{\alpha} = 0$. 如果点体积电荷和点体积力相互独立, 都保持恒定持久, 则我们得

$$P_{S_1 \dots S_k}^{\alpha} = P_{S_1, S_k}^{\alpha}(x^{\alpha}, \omega^{\alpha}) = \sum_{\beta=1}^{N(\alpha)} q^{\beta}(x^{\alpha}, \omega^{\alpha}) d_{S_1}^{\beta}(x^{\alpha}, \omega^{\alpha}) \dots d_{S_k}^{\beta}(x^{\alpha}, \omega^{\alpha}) \quad (3.2a)$$

和

$$P_{jS_1 \dots S_k}^{\alpha} = P_{jS_1 \dots S_k}(x^{\alpha}, \omega^{\alpha}) = \sum_{\beta=1}^{N(\alpha)} f_j^{\beta}(x^{\alpha}, \omega^{\alpha}) d_{S_1}^{\beta}(x^{\alpha}, \omega^{\alpha}) \dots d_{S_k}^{\beta}(x^{\alpha}, \omega^{\alpha}) \quad (3.2b)$$

这里, $N(\alpha)$ 为第 α 个点体积力阵列中点体积电荷和点体积力的数目, 而 $d^{\beta}(\alpha)$ 是从 x^{α} 画到点体积电荷 $q^{\beta}(\alpha)$ 和点体积力 $f^{\beta}(\alpha)$ 的第 β 个位置矢量. 如果点体积电荷和点体积力都诱生, 而且因相互作用而相互系赖, 则一般有

$$P_{S_1 \dots S_k}^{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{N(\alpha)} q^{\beta}(x^{\alpha}; x^1, \dots, x^M; \omega^1, \dots, \omega^M) d_{S_1}^{\beta} \dots d_{S_k}^{\beta} \quad (3.3a)$$

和

$$P_{jS_1 \dots S_k}^{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{N(\alpha)} f_j^{\beta}(x^{\alpha}; x^1, \dots, x^M, \omega^1, \dots, \omega^M) d_{S_1}^{\beta} \dots d_{S_k}^{\beta} \quad (3.3b)$$

这显示, 第 α 个点体积电荷和点体积力的阵列模型代表电的和弹性多极材料, 它和其它体积电荷和体积力的阵列, 位置, 分布等有关. 这里, 由于电-力学的相互作用的存在, 电的体积电荷可以源于力学, 而力学的体积力可以源于电学.

现在, 设 $f(\Omega^1, \dots, \Omega^M)$ 是联合概率密度函数, 其中 $\Omega^{\alpha} = (x^{\alpha}, \omega^{\alpha})$, 则由于随机分布的点体积电荷阵列和点体积力阵列而生的系综平均电场和弹性位移场可以表示为

$$\langle E_i \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_V P_{S_1 \dots S_k}^{\alpha}(x') G_{iS_1 \dots S_k}^{\alpha}(x, x') dx' \quad (3.4a)$$

和

$$\langle u_i \rangle(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_V P_{jS_1 \dots S_k}(x') G_{ij, S_1 \dots S_k}(x, x') dx' \quad (3.4b)$$

其中 k 阶的统计连续统电多极和弹性多极分别定义为

$$P_{S_1 \dots S_k}^e(x') = \sum_{\alpha=1}^M \int_{\Gamma} F_{S_1 \dots S_k}^{e\alpha}(\Omega') d\Gamma' \quad (3.5a)$$

和

$$P_{jS_1 \dots S_k}(x') = \sum_{\alpha=1}^M \int_{\Gamma} F_{jS_1 \dots S_k}^{\alpha}(\Omega') d\Gamma' \quad (3.5b)$$

其中

$$F_{S_1 \dots S_k}^{e\alpha} = \underbrace{\int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} f(\Omega^1, \dots, \Omega^M) P_{S_1 \dots S_k}^{e\alpha} d\Omega^1 \dots d\Omega^{\alpha-1} d\Omega^{\alpha+1} \dots d\Omega^M}_{M-1} \quad (3.6a)$$

和

$$F_{jS_1 \dots S_k}^{\alpha} = \underbrace{\int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} f(\Omega^1, \dots, \Omega^M) P_{jS_1 \dots S_k}^{\alpha} d\Omega^1 \dots d\Omega^{\alpha-1} d\Omega^{\alpha+1} \dots d\Omega^M}_{M-1} \quad (3.6b)$$

这里的 Ω 是一个定义空间, $\Omega = V \times \Gamma$, 其中 V 是整个弹性电介质的容积, Γ 为参量空间, $\omega^{\alpha} \in \Gamma$.

当点体积力阵列是恒定保持不变时, (3.5)式可以化为

$$P_{S_1 \dots S_k}^e(x') = \int_{\Gamma} \rho(\Omega') P_{S_1 \dots S_k}^e(\Omega') d\Gamma' \quad (3.7a)$$

和

$$P_{jS_1 \dots S_k}(x') = \int_{\Gamma} \rho(\Omega') P_{jS_1 \dots S_k}(\Omega') d\Gamma' \quad (3.7b)$$

这里

$$\rho(\Omega') = \sum_{\alpha=1}^M W_{\alpha}(\Omega') \quad (3.8)$$

和

$$W_{\alpha} = \underbrace{\int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} f(\Omega^1, \dots, \Omega^M) d\Omega^1 \dots d\Omega^{\alpha-1} d\Omega^{\alpha+1} \dots d\Omega^M}_{M-1} \quad (3.9)$$

函数 $\int_{\Gamma} \rho(\Omega') d\Gamma'$ 的物理意义为单位容积的电多极子和弹性多极子的总数。这是因为

$$\int_{\Omega} \rho(\Omega') d\Omega' = \int_V \left(\int_{\Gamma} \rho(\Omega') d\Gamma' \right) dx' = M \quad (3.10)$$

这就证明了, 由于离散的统计分布的点体积电荷和点体积力的阵列所产生的系综平均电场和弹性位移场, 可以用(3.5)式或(3.7)式所定义的以统计连续统电多极子和弹性多极子为模型的复合材料的电场和弹性位移场来表示。

四、非均匀颗粒的统计连续统多极模型

本节将用统计连续统电多极模型和弹性多极模型来研究具有电极化的 M 个大数量的统计分布的非均匀颗粒所组成的弹性电介质复合材料。一切颗粒假定形状相同、尺寸相同，自发的电极化强度相同，只是它们有不同取向。用数学公式来列出本题，对于不同的复合材料的样品形状和边界条件，有多种可能性。为了避免使用“无限”样品的概念，从而引起有关收敛的困难^[7]，本文将考虑一种有限的圆球样品，它假定完全夹嵌在一种无限的均匀弹性电介质内，这种弹性电介质和复合材料基质有相同的材料性质（见图2）。

我们企图寻找这样一种弹性电介质复合材料的整体性质。这一非均匀的复合材料样品的几何结构是用指示函数表示的，它是

$$\gamma^{\alpha}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{x} \text{ 在 } V_{\alpha} \text{ 中}) \\ 0 & (\mathbf{x} \text{ 不在 } V_{\alpha} \text{ 中}) \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 V_{α} 为第 α 个非均匀体（ $\alpha=1, 2, \dots, M$ ）的体积。非均匀体的尺寸永远假定比复合材料样品的尺寸小得很多，但比分子（或原子）的尺寸又大得多。这样，非均匀颗粒可以当作介电常数为 ϵ^* 和弹性模量为 C^* 的连续统来处理。

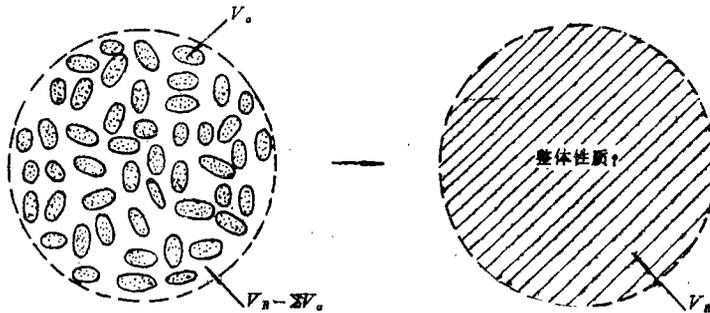


图 2

利用第二节的结果，在外场（ E° 和 u° ）作用下，复合材料中的微观电场和微观弹性位移场可以写为

$$E_i = E_i^{\circ} + \sum_{\alpha=1}^M \int_{V_{\alpha}} (P_k^{\circ(\alpha)} + \Delta\epsilon_{kj} E_j) G_{ik}^{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (4.2)$$

和

$$u_i = u_i^{\circ} + \sum_{\alpha=1}^M \left(\int_{V_{\alpha}} f_k^{\circ(\alpha)} G_{ij}^{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' - \int_{V_{\alpha}} P_{jk}^{\circ(\alpha)} G_{ij,k}^{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right) \quad (4.3)$$

考虑到非均匀体的几何结构和它们的取向，(4.2)式和(4.3)式可以进一步表达为

$$E_i(\mathbf{x}; \Omega^1, \dots, \Omega^M) = E_i^{\circ} + \sum_{\alpha=1}^M \int_{V_1} (P_k^{\circ(\alpha)} + \Delta\epsilon_{jk} E_j^{\circ(\alpha)}) G_{ik}^{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\alpha} - \mathbf{y}^{\alpha}) d\xi \quad (4.4)$$

$$u_i(\mathbf{x}; \Omega^1, \dots, \Omega^M) = u_i^* + \sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \mathbf{P}_{jS_1 \dots S_k}^{c(\alpha)}(\Omega^1, \dots, \Omega^M) G_{ij, S_1 \dots S_k}^c(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \quad (4.10)$$

这就证明, 某一已给离散分布的非均匀体可以用一种离散分布的诱生电的和弹性多极模型来表示, 这些诱生电多极体和弹性多极体定义如下:

$$P_{S_1 \dots S_k}^{e(\alpha)} = k \int_{V_1} (P_{S_1}^{o(\alpha)} + \Delta \varepsilon_{jS_1} E_j^{(\alpha)}) y_{S_2}^{\alpha} \dots y_{S_k}^{\alpha} d\xi \quad (k=1, 2, \dots) \quad (4.11)$$

和

$$P_j^{e(\alpha)} = \int_{V_1} P_m^{o(\alpha)} E_j^{(\alpha)} d\xi \quad (k=0) \quad (4.12)$$

$$P_{jS_1 \dots S_k}^{c(\alpha)} = -k \int_{V_1} \left(\Delta C_{mnjS_1} u_m^{(\alpha)} P_{S_1}^{-(\alpha)} E_j^{(\alpha)} - \frac{1}{k} P_m^{o(\alpha)} E_j^{(\alpha)} y_{S_1}^{\alpha} \right) y_{S_2}^{\alpha} \dots y_{S_k}^{\alpha} d\xi \quad (4.13)$$

当 $k=1$ 时, $y_{S_2}^{\alpha} \dots y_{S_k}^{\alpha} = 1$. 这里证明了, 在非均匀体的模型中, 点电荷阵列的总的合成电荷 (即零级电多极子等于零, 这是因为这些非均匀体的电性总的讲来是中性的. 不过, 由于电的和弹性的相互作用所诱生的体积力项由 (4.12) 式给出, 一般讲来, 它不等于零. 这里可以看到, 如果颗粒内部的微观电场是均匀的, 则这一项应该等于零.

让我们考虑有大量的这样的样品, 在复合材料内的电场和弹性位移场的系综平均可以写为

$$\begin{aligned} \langle E_i \rangle(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} f(\Omega^1, \dots, \Omega^M) E_i(\mathbf{x}; \Omega^1, \dots, \Omega^M) d\Omega^1 \dots d\Omega^M \\ &= E_i^* - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{V_R} \bar{\mathbf{P}}_{S_1 \dots S_k}^e(\mathbf{x}') G_{i, S_1 \dots S_k}^e(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (4.14)$$

和

$$\begin{aligned} \langle u_i \rangle(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} f(\Omega^1, \dots, \Omega^M) u_i(\mathbf{x}; \Omega^1, \dots, \Omega^M) d\Omega^1 \dots d\Omega^M \\ &= u_i^* + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{V_R} \bar{\mathbf{P}}_{jS_1 \dots S_k}^c(\mathbf{x}') G_{ij, S_1 \dots S_k}^c(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (4.15)$$

其中 $f(\Omega^1, \dots, \Omega^M)$ 为 M 点的联合统计密度函数, 而 $\Omega^{\alpha} \in \Omega$ 是一个定义空间, $\Omega = V_R \times \Gamma$, 其中 $\Gamma = (0, \pi) \times (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ 为一参量空间, 而 V_R 为复合材料样品的体积.

(4.14) 式和 (4.15) 式证明: M 个这样的统计分布的非均匀颗粒的宏观系综平均性质, 可以用下述诱生统计连续统电多极子和弹性多极子的分布模型来表示:

$$\bar{\mathbf{P}}_{S_1 \dots S_k}^e(\mathbf{x}') = \sum_{\alpha=1}^M \int_{\Gamma} \mathbf{Z}_{S_1 \dots S_k}^{e(\alpha)}(\Omega') d\Gamma' \quad (4.16)$$

和

$$\bar{\mathbf{P}}_{jS_1 \dots S_k}^c(\mathbf{x}') = \sum_{\alpha=1}^M \int_{\Gamma} \mathbf{Z}_{jS_1 \dots S_k}^{c(\alpha)}(\Omega') d\Gamma' \quad (4.17)$$

其中

$$Z_{S_1 \dots S_k}^{e(\alpha)} = \int_0 \dots \int_0 \underbrace{f(\Omega^1, \dots, \Omega^M)}_{M-1} P_{S_1 \dots S_k}^{e(\alpha)} d\Omega^1 \dots d\Omega^{\alpha-1} d\Omega^{\alpha+1} \dots d\Omega^M \quad (4.18)$$

和

$$Z_{jS_1 \dots S_k}^{c(\alpha)} = \int_0 \dots \int_0 \underbrace{f(\Omega^1, \dots, \Omega^M)}_{M-1} P_{jS_1 \dots S_k}^{c(\alpha)} d\Omega^1 \dots d\Omega^{\alpha-1} d\Omega^{\alpha+1} \dots d\Omega^M \quad (4.19)$$

当 $\alpha=1$ 时, $d\Omega^{\alpha-1}=1$, 而当 $\alpha=M$ 时, $d\Omega^{\alpha+1}=1$.

可能会有一些特殊情况。假如第 α 个非均匀体的电多极体和弹性多极体模型并不和它的周围的非均匀体的几何位置及取向有关, 即

$$P_{S_1 \dots S_k}^{e(\alpha)} = P_{S_1 \dots S_k}^e(\Omega^\alpha) \quad (4.20)$$

和

$$P_{jS_1 \dots S_k}^{c(\alpha)} = P_{jS_1 \dots S_k}^c(\Omega^\alpha) \quad (4.21)$$

则(4.16)式和(4.17)式可以化为

$$P_{S_1 \dots S_k}^e(x') = \int_{\Gamma} \rho(\Omega') P_{S_1 \dots S_k}^e(\Omega') d\Gamma' \quad (4.22)$$

和

$$P_{jS_1 \dots S_k}^c \int_{\Gamma} \rho(\Omega') P_{jS_1 \dots S_k}^c(\Omega') d\Gamma' \quad (4.23)$$

其中函数 $\rho(\Omega')$ 为

$$\rho(\Omega') = \sum_{\alpha=1}^M W_\alpha(\Omega') \quad (4.24)$$

其中

$$W_\alpha(\Omega') = \int_0 \dots \int_0 \underbrace{f(\Omega^1, \dots, \Omega^M)}_{M-1} d\Omega^1 \dots d\Omega^{\alpha-1} d\Omega^{\alpha+1} \dots d\Omega^M \quad (4.25)$$

函数 $\int_{\Gamma} \rho(\Omega') d\Gamma'$ 的物理意义为每单位体积的多极数, 这是因为我们有

$$\int_{V_p} \left(\int_{\Gamma} \rho(\Omega') d\Gamma' \right) dx' = M \quad (4.26)$$

稀释悬融系统或稀释系统都是这种情况的实际例子, 在这类问题中, 颗粒内的微观电场和弹性位移场都可以用自治程序近似求解。此外, 容许成对相互作用近似的系统, 或容许有最近相互作用近似的系统亦经常出现, 在这类系统中, (4.16)式和(4.17)式还可以简化。这里指出, 合理的近似不仅可以使多体相互作用问题得到简化, 在许多场合, 还可以求得必要的统计信息。这里并不涉及经典的闭合态问题^[3], 因为在所提出的统计连续统多极体方法中, 我

们要求的统计信息，是与研究复合材料诸微观场所采用的相互作用模型密切相关的。例如，当我们采用双体相互作用模型来近似研究微观场时，在平均运算中只用双点联接概率函数来计算统计信息，在这种近似中，高阶的统计信息是不必要的。在下节，将给出复合材料的场的具体算例。

五、电介质复合材料的统计各向异性和形状效应

本节研究的问题是：怎样用统计连续统多极体的研究方法求复合材料的有效性质，和微观结构的统计各向异性和形状效应对复合材料整体性质的影响。这里为简单起见：电弹性相互作用的效应将予略去。这种电弹性耦合效应对复合材料整体性质的影响将留待下节讨论。

我们将把求复合材料的有效介电常数和有效弹性性质完全分开。为了处理这种问题，考虑微观本构关系

$$\mathbf{D} = \left(\varepsilon + \sum_{\alpha=1}^M \Delta \varepsilon \gamma^{\alpha} \right) \cdot \mathbf{E} \quad (5.1a)$$

和

$$\mathbf{t} = \left(\mathbf{C} + \sum_{\alpha=1}^M \Delta \mathbf{C} \gamma^{\alpha} \right) : \mathbf{e} \quad (5.1b)$$

这里的 γ^{α} 为第 α 个非均匀颗粒指示函数。关系(5.1a)和(5.1b)的系综平均给出

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \varepsilon \cdot \langle \mathbf{E} \rangle + \Delta \varepsilon \left\langle \sum_{\alpha=1}^M \gamma^{\alpha} \mathbf{E} \right\rangle \quad (5.2a)$$

和

$$\langle \mathbf{t} \rangle = \mathbf{C} : \langle \mathbf{e} \rangle + \Delta \mathbf{C} : \left\langle \sum_{\alpha=1}^M \gamma^{\alpha} \mathbf{e} \right\rangle \quad (5.2b)$$

由于问题是线性的，第 α 个夹杂物 ($\alpha=1, 2, \dots, M$) 的微观电场和弹性场可以写成

$$\mathbf{E}_{i,j}^{\alpha}(\xi; \Omega^1, \dots, \Omega^M) = \mathbf{T}_{i,jkl}^{\alpha}(\xi; \Omega^1, \dots, \Omega^M) \mathbf{E}_k^{\alpha} \quad (\xi \in V_1) \quad (5.3a)$$

和

$$\mathbf{e}_{i,j}^{\alpha}(\xi; \Omega^1, \dots, \Omega^M) = \mathbf{A}_{i,jkl}^{\alpha}(\xi; \Omega^1, \dots, \Omega^M) \mathbf{e}_k^{\alpha} \quad (\xi \in V_1) \quad (5.3b)$$

这里的张量 \mathbf{T}^{α} 和 \mathbf{A}^{α} 一般事先并不知道，必须通过微观电场方程和微观弹性场方程求解来确定。

利用电多极体模型和弹性多极体模型，复合材料内的微电场可以写为

$$\mathbf{E}_{i,j}(\mathbf{x}; \Omega^1, \dots, \Omega^M) = \mathbf{F}_{i,jkl}(\mathbf{x}; \Omega^1, \dots, \Omega^M) \mathbf{E}_k^{\alpha} \quad (5.4a)$$

和

$$\mathbf{e}_{i,j}(\mathbf{x}; \Omega^1, \dots, \Omega^M) = \mathbf{B}_{i,jkl}(\mathbf{x}; \Omega^1, \dots, \Omega^M) \mathbf{e}_k^{\alpha} \quad (5.4b)$$

其中

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{\beta=1}^M R_{ij}^{\beta} \quad (5.5a)$$

及

$$B_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} + \sum_{\beta=1}^M Y_{ijkl}^{\beta} \quad (5.5b)$$

这里有

$$R_{ij}^{\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} G_{,iS_2 \dots S_k}^{\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^{\beta}) \int_{V_1} \Delta \varepsilon_{pS_1} T_{ij}^{\beta} Y_{S_2}^{\beta} \dots Y_{S_k}^{\beta} d\xi \quad (5.6a)$$

和

$$Y_{ijkl}^{\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} g_{ijnS_1 \dots S_k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^{\beta}) \int_{V_1} \Delta C_{pqns_1} A_{pqkl}^{\beta} Y_{S_2}^{\beta} \dots Y_{S_k}^{\beta} d\xi \quad (5.6b)$$

这里

$$g_{ijnS_2 \dots S_k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^{\beta}) = \frac{1}{2} (G_{in,jS_2 \dots S_k}^c(\mathbf{x}-\mathbf{x}^{\beta}) + G_{in,jS_1 \dots S_k}^c(\mathbf{x}-\mathbf{x}^{\beta})) \quad (5.7)$$

把

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \varepsilon^{eff} \cdot \langle \mathbf{E} \rangle \quad (5.8a)$$

和

$$\langle t \rangle = C^{eff} : \langle e \rangle \quad (5.8b)$$

的定义和 (5.2) 式相比较, 得结果

$$\varepsilon^{eff} = \varepsilon \delta_{ij} + \Delta \varepsilon \left\langle \sum_{\alpha=1}^M \gamma^{\alpha} T_{ij}^{\alpha} \right\rangle \langle F_{kj} \rangle^{-1} \quad (5.9a)$$

和

$$C_{ijkl}^{eff} = C_{ijkl} + \Delta C_{ijpq} \left\langle \sum_{\alpha=1}^M \gamma^{\alpha} A_{pqmn}^{\alpha} \right\rangle \langle B_{mnkl} \rangle^{-1} \quad (5.9b)$$

显然, 为了求系综平均, 我们必先有关于复合材料微结构的统计信息的详细内容。而且, 为了完成计算, 我们必须知道颗粒内的微观电场和微观弹性位移场。由于这是一个复杂的多体相互作用问题, 而且还是统计性质的, 粗看起来, 几乎是无法解决的。因此, 为了简化问题使其能解, 我们必须引进一些物理上合理的假设。例如, 对小浓度的悬融质而言, 略去颗粒间的相互作用可得一阶近似, 可以采用无限介质中夹杂一个单独的非均匀颗粒的经典解。也有人建议考虑阐明一些相互作用效应的高阶近似理论, 如在最近相互作用模型中采用了一对相互作用颗粒的解 (见 Mecoy 和 Beran^[8], 及 Jeffrey^[7,22], 和经典自洽理论 (Böttcher Hershey^[23], Hashin^[24], 等)。对于相互作用较弱的非均匀复合材料而言, 粘合理论和经典摄动法都是胜任有效的 (Hashin 和 Shtrikman^[4], Beran^[5], Hori^[25], Willis^[26]等)。

在本节, 我们将用统计连续统多极模型来研究电介质复合材料的有效性质。为了说明怎样使用统计连续统多极模型, 让我们考虑一个稀释的悬融系统, 亦即颗粒间的相互作用可以略去。而且, 为了简化问题, 也是为电介质问题和弹性问题的相似性^[12], 考虑一种硬化的

电介质复合材料, 它是由 M 个统计分布相同非均匀刚化椭球颗粒 (其介电常数为 ϵ^*) 夹杂在介电常数为 ϵ 的刚化均匀各向同性的基质中形成的, 让我们求这种硬化电介质复合材料的有效介电常数。设这些非均匀颗粒的几何排列是统计均匀的, 但不一定是统计各向同性的, 它的概率密度函数 (见第四节) 可以写成

$$\rho(\Omega') = M \rho^*(\Gamma') / V_R \quad (5.10)$$

其中

$$\rho^*(\Gamma') = \sum_{\alpha=1}^M W_\alpha^*(\Gamma') / M \quad (5.11)$$

这里

$$W_\alpha^*(\Gamma) = \int_{\Gamma} \dots \int_{\Gamma} \underbrace{g(\Gamma^1, \dots, \Gamma^M)}_{M-1} d\Gamma^1 \dots d\Gamma^{\alpha-1} d\Gamma^{\alpha+1} \dots d\Gamma^M \quad (5.12)$$

而正则条件为

$$\int_{\Gamma} \dots \int_{\Gamma} g(\Gamma^1, \dots, \Gamma^M) d\Gamma^1 \dots d\Gamma^M = 1 \quad (5.13)$$

第 α 个夹杂物的微观电场可以看作是埋在一种无限基质中的一单个非均匀椭球颗粒以某一取向受外场作用下的微观电场, 它是 [Stratton⁽²⁷⁾]

$$E_\alpha^* = \sum_{i=1}^3 \lambda_i Q_{m_i}(\Gamma^\alpha) Q_{j_i}(\Gamma^\alpha) E_i \quad (5.14)$$

这里

$$\lambda_i = \left(1 + \frac{abc}{2\epsilon} \Delta \epsilon B_i \right)^{-1} \quad (5.15)$$

其中

$$B_1 = \int_0^\infty \frac{ds}{(s+a^2)^{3/2} \sqrt{(s+b^2)(s+c^2)}} \quad (5.16)$$

和

$$B_2 = \int_0^\infty \frac{ds}{(s+b^2)^{3/2} \sqrt{(s+a^2)(s+c^2)}} \quad (5.17)$$

和

$$B_3 = \int_0^\infty \frac{ds}{(s+c^2)^{3/2} \sqrt{(s+a^2)(s+b^2)}} \quad (5.18)$$

其中 a, b, c 为椭球的三个轴。

诱生的电多极体可以从 (4.11) 式求得, 式中用 $P^{(\alpha)} = 0$ 。例如, 诱生的电偶极子为

$$P_\alpha^{(\alpha)} = \Delta \epsilon V_1 \sum_{i=1}^3 \lambda_i Q_{m_i}(\Gamma^\alpha) Q_{j_i}(\Gamma^\alpha) E_i \quad (5.19)$$

在统计均匀的情况下有一个富有意义的结果, 由于 (4.22) 式定义的诱生统计连续统电多极体

在稀释近似中和 x' 无关, 于是(4.14)可以化成

$$\langle E_M \rangle = E_n^0 - \frac{1}{\epsilon} \bar{P}_i^0 L_{im} \quad (5.20)$$

这里的 \bar{P}^0 为统计连续统电偶极矩, 它是

$$\bar{P}_i^0 = \Delta \epsilon f \left(\int_V \rho^*(\Gamma) \sum_{i=1}^3 \lambda_i Q_{ki}(\Gamma') Q_{ji}(\Gamma') d\Gamma' \right) E_j^0 \quad (5.21)$$

而张量 L 是去极化张量 (见deGroot和Suttorp^[27]), 它定义为

$$L_{im} = -\epsilon \int_{V_n} G_{iim}^0(x-x') dx' = \frac{1}{3} \delta_{im} \quad (5.22)$$

它和 x 无关 (对于 x 在圆球 V_n 内部而言). 这里 $f = MV_1/V_n$, 它是非均匀颗粒的容积和基质的容积之比. 现在, 把(5.20)式和(5.4a)式相比, 得

$$\langle F_{ik} \rangle = \delta_{ik} - \frac{\Delta \epsilon}{3\epsilon} \int_V \rho^*(\Gamma') \sum_{i=1}^3 \lambda_i Q_{ki}(\Gamma') Q_{ji}(\Gamma') d\Gamma' \quad (5.23)$$

利用(5.3a)式和(5.14)式, 我们可以写出

$$\left\langle \sum_{\alpha=1}^M \gamma^\alpha T_{ij}^\alpha \right\rangle = f \int_V \rho^*(\Gamma') \sum_{i=1}^3 \lambda_i Q_{ki}(\Gamma') Q_{ji}(\Gamma') d\Gamma' \quad (5.24)$$

于是, 只要颗粒取向的统计分布概率密度函数 $\rho^*(\Gamma')$ 已知, 我们就求得了决定统计各向异性电介质复合材料在稀释悬融近似下的有效介电常数的一般表达式 (即(5.9a)式, (5.23)式和(5.24)式). 例如, 对于椭球颗粒优先定向 Γ^0 的复合材料而言, 我们将取高斯分配函数

$$\rho^*(\Gamma') = c \exp(-\sigma^2 |\Gamma' - \Gamma^0|^2) \quad (5.25)$$

其中 σ 为统计参量, 它是由复合材料制作方法所决定和控制的, 而 c 则由下列正则化条件决定

$$\int_V \rho^*(\Gamma') d\Gamma' = 1 \quad (5.26)$$

这一结果指出, 非均匀颗粒对复合材料的宏观介电常数的形状效应是由参量 $\lambda_i (i=1, 2, 3)$ 所决定的, 颗粒的统计取向的效应由取向张量 $Q(\Gamma')$ 和概率密度函数 $\rho^*(\Gamma')$ 所决定.

对圆球非均匀颗粒而言, 问题就简单得多, 我们有

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{3\epsilon}{3\epsilon + \Delta \epsilon} \quad (5.27)$$

和

$$\langle F_{kj} \rangle = \frac{3\epsilon + (1-f)\Delta \epsilon}{3\epsilon + \Delta \epsilon} \delta_{kj} \quad (5.28)$$

和

$$\left\langle \sum_{\alpha=1}^M \gamma^\alpha T_{ik}^\alpha \right\rangle = \frac{3\epsilon f}{3\epsilon + \Delta \epsilon} \delta_{ik} \quad (5.29)$$

在稀释圆球非均匀颗粒的复合材料的有效介电常数为

$$\epsilon^{eff} = \epsilon \frac{2\epsilon + \epsilon^* + 2f\Delta\epsilon}{2\epsilon + \epsilon^* - f\Delta\epsilon} \quad (5.30)$$

它和 Rayleigh 混合物公式 (Rayleigh^[29]) 相同, 而这一公式是用体积平均法求得的。这就证明了, 在这一情况下, 系综平均和体积平均, 效果相等。不过, 这里应该指出, 实际物理系统很难满足各态历经假说 (见 Kröner^[30])。这个结论也证明, 只要略去颗粒间的相互作用, 对具有统计均匀分布的稀释圆球颗粒的复合材料而言, Rayleigh 混合物公式的推导和复合材料的统计各向同性的假设无关。

为了探求非均匀颗粒对稀释复合材料的宏观有效性质的形状效应, 让我们研究椭球颗粒 (有 $a=b$)。设颗粒的取向对所有方向概率相同, 则颗粒取向在 $(\theta', \theta' + d\theta')$ 和 $(\psi', \psi' + d\psi')$ 的范围内的概率为

$$\rho^*(\Gamma') d\Gamma' = \frac{1}{4\pi} \sin\theta' d\theta' d\psi' \quad (5.31)$$

利用(3.8), (5.9), (5.22)和(5.23)诸式, 电介质复合材料的有效介电常数可以推得为

$$\epsilon^{eff} = \epsilon \frac{9\epsilon + 2f\Delta\epsilon(2\lambda_1 + \lambda_3)}{9\epsilon - f\Delta\epsilon(2\lambda_1 + \lambda_3)} \quad (5.32)$$

其中 形状效应参量 λ_1 和 λ_2 分别由(5.15)~(5.18)式给出 (这里取 $a=b$)。对 $c \gg a$, 颗粒为杆状或针状。对于 $c \ll a$, 颗粒接近盘状, 对于 $c=a$, 颗粒是圆球。对于不同颗粒形状的有效介电常量的数值结果, 见图4。

这里说明, 对于完全随机取向的椭球颗粒而言, 其电介质复合材料的系综平均特性显示一种各向同性的性质。如果颗粒取向有优先定向, 比如说在 x_3 轴的方向 ($\theta^*=0$), 如果统计分布可以用高斯分配函数(5.25)式, 我们得

$$\rho^*(\Gamma') d\Gamma' = c \exp(-\sigma^2\theta'^2) \sin\theta' d\theta' d\psi' \quad (5.33)$$

其中 σ 为表示 θ' 的标准误差的统计参量, c 是(5.26)式决定的常数, 它可以写成

$$c = \left(2\pi \int_0^\pi \exp(-\sigma^2\theta'^2) \sin\theta' d\theta' \right)^{-1} \quad (5.34)$$

经过一些计算后, 得

$$(\epsilon_{ij}^{eff}) = \epsilon \frac{3\epsilon + 2\Delta\epsilon f A_1}{3\epsilon - 2\Delta\epsilon f A_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

这里的 η 是一个无量纲参量, 它是

$$\eta = \frac{(3\epsilon + 2\Delta\epsilon A_2)(3\epsilon - 2\Delta\epsilon A_1)}{(3\epsilon + 2\Delta\epsilon A_1)(3\epsilon - 2\Delta\epsilon A_2)} \quad (5.36)$$

而常数 A_1 和 A_2 分别为

$$A_1 = \pi \int_0^\pi c \exp(-\sigma^2\theta^2) (\lambda_1(1 + \cos^2\theta) + \lambda_3 \sin^2\theta) \sin\theta d\theta \quad (5.37)$$

和

$$A_2 = 2\pi \int_0^\pi c \exp(-\sigma^2\theta^2) (\lambda_1 \sin^2\theta + \lambda_2 \cos^2\theta) \sin\theta d\theta \quad (5.38)$$

这就证明了, 倘若微椭球颗粒的取向在统计上可优先定向, 复合材料宏观有效介电常量则可

以是各向异性的。在横向各向同性的情况下，宏观有效介电常量有两个独立的常数，它们由(5.35)式给出。图5表示宏观各向异性参量 η 的数值和统计参量 σ 和颗粒形状的关系。

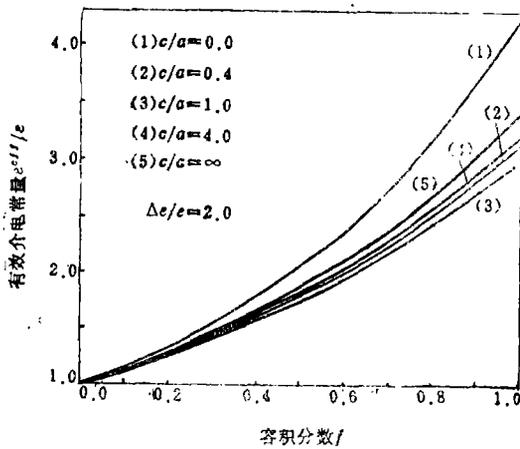


图4 椭球颗粒的形状效应对有效介电常量的影响

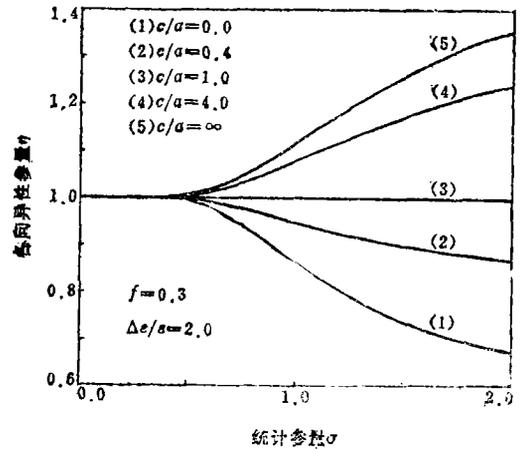


图5 颗粒的统计各向异性形状效应及其取向对有效介电常量的影响

六、弹性电介质复合材料的宏观特性

在本节，我们把电场和弹性位移场的某些相互作用考虑在内来研究复合材料（弹性电介质的）的宏观特性。我们将看到怎样用统计连续统多极子法，来预测弹性电介质复合材料的宏观特性，而无需预先假设复合材料整体的宏观本构关系。其结果证明统计连续统多极子法优于经典的有效介质理论，在有效介质理论中，我们必需预知复合材料的有效本构关系。

为了区别统计连续统多极子法的结果和有效介质理论的结果，在下文中，弹性电介质复合材料宏观特性的基本方程将被称为整体宏观本构关系，它们的系数被称为整体宏观材料系数，而在有效介质理论中则被称为有效本构关系和有效材料系数。

让我们研究具有 M 个非均匀颗粒的弹性电介质复合材料。基质和颗粒的材料性质与第四节中所描写的相同。系综平均电极化和弹性应力场可以分别写为

$$\langle P_i \rangle = \epsilon_0 \chi \langle E_i \rangle + \epsilon_0 \Delta \chi \left\langle \sum_{\alpha=1}^M \gamma^\alpha E_i \right\rangle \quad (6.1)$$

和

$$\langle t_{ij} \rangle = \lambda \langle e_{kk} \rangle \delta_{ij} + 2\mu \langle e_{ij} \rangle + \left\langle \sum_{\alpha=1}^M \gamma^\alpha (\Delta \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\Delta \mu e_{ij} - P_j E_i) \right\rangle \quad (6.2)$$

为了求得系综平均，首先要得到前面讲过的微观场的详解。为了简化起见，我们将考虑具有圆球非均匀颗粒的稀释悬融体的弹性电介质复合材料，我们还将假定复合材料有统计的均匀性和统计的各向同性。对于一阶近似，我们略去颗粒间的相互作用，也略去颗粒取向由弹性变形所引起的微小变化对整体电场所产生的影响在。这种情况下，略经计算，求得

$$\langle P \rangle = \epsilon_0 \chi^{m\alpha\alpha} \langle E \rangle \quad (6.3)$$

这里的整体宏观电介质极化率为

$$\chi^{mao} = \chi + \frac{3\epsilon f \Delta \chi}{3\epsilon + (1-f)\Delta\epsilon} \quad (6.4)$$

这和经典的 Rayleigh 混合物公式所给出的复合材料的有效电介质极化率相同, 计算 Rayleigh 混合物公式时, 我们对复合材料中稀释圆球颗粒作了刚体近似假定, 系综平均应变场为

$$\langle e_{ij} \rangle = e_{ij} + P_{ki}^o L_{ijk}^o \quad (6.5)$$

这里用(4.13)式, (4.21)式和(4.23)式, 我们可以求得统计连续弹性单极矩 \bar{P}^o .

$$P_{ii}^o = -\frac{f(3\kappa+4\mu)}{3\kappa+4\mu+3\Delta\kappa} \left(3\Delta\kappa e_{ii}^o - \frac{(3\epsilon)^2 \epsilon_0 \chi^*}{(3\epsilon+(1-f)\Delta\epsilon)^2} \right) \cdot \langle E_i \rangle \langle E_i \rangle + \frac{3\epsilon + \Delta\epsilon - \epsilon_0 \chi^*}{(3\epsilon + \Delta\epsilon)^2} (\rho^o)^2 \quad (6.6)$$

在 $i \neq j$ 时, 为

$$P_{ij}^o = -\frac{5f\mu(3\kappa+4\mu)}{5\mu(3\kappa+4\mu) + (6\kappa+12\mu)\Delta\mu} \left(2\Delta\mu e_{ij}^o - \frac{(3\epsilon)^2 \epsilon_0 \chi^*}{(3\epsilon+(1-f)\Delta\epsilon)^2} \langle E_i \rangle \langle E_j \rangle \right) \quad (6.7)$$

利用(2.20)式, (5.20)式, 我们求得在没有永久电极化时, 具有稀释圆球颗粒的弹性电介质复合材料中的整体宏观应力为

$$\langle t_{ij} \rangle = \left(\kappa^{mao} - \frac{2}{3} \mu^{mao} \right) \langle e_{mm} \rangle \delta_{ij} + 2\mu^{mao} \langle e_{ij} \rangle - \left(\frac{1}{3} (\xi - \tau) \langle P_m \rangle \langle E_m \rangle \delta_{ij} + \tau \langle P_j \rangle \langle E_i \rangle \right) \quad (6.8)$$

其中整体宏观弹性模型表示为

$$\kappa^{mao} = \kappa + \frac{(3\kappa+4\mu)f\Delta\kappa}{3\kappa+4\mu+3(1-f)\Delta\kappa} \quad (6.9)$$

和

$$\mu^{mao} = \mu + \frac{5\mu(3\kappa+4\mu)f\Delta\mu}{5\mu(3\kappa+4\mu) + 6\Delta\mu(1-f)(\kappa+2\mu)} \quad (6.10)$$

它们和在无电力[11]的情况下, 具有稀释圆球颗粒的弹性复合材料的有效弹性模量的经典结果完全相同。

如果把电弹性相互作用考虑在内, 则弹性电介质复合材料的整体宏观特性中将有两个新的无量纲电弹性参量, 它们是

$$\xi = \left(1 + \frac{3\Delta\kappa(1-f)}{3\kappa+4\mu} \right) \left(1 + (1-f) \frac{\Delta\epsilon}{3\epsilon} \right)^2 \chi^{mao} \quad (6.11)$$

和

$$\tau = \left(1 + \frac{6\Delta\mu(1-f)(\kappa+2\mu)}{5\mu(3\kappa+4\mu)} \right) \left(1 + (1-f) \frac{\Delta\epsilon}{3\epsilon} \right)^2 \chi^{mao} \quad (6.12)$$

其中 f 为颗粒的容积分数。图 6 和图 7 表示某些不同组合的两相材料的两个参量的数值结果。

只要在任一代表性容积中, 外电场和外载荷不存在明显的变化, 这些代表性容积从宏观上看比复合材料的总容积小, 而从微观上看却大得足以夹杂许多颗粒, 则(6.3)式和(6.8)式可以用来求得复合材料的整体宏观本构关系。不过, 在处理复合材料上所施载荷在长度为几个颗粒距离的尺寸中有明显的变化时, 例如有裂缝的复合材料时, 一般说来, 必须考虑高阶多极子的效应。

进一步讲, 当复合材料的颗粒有自发的电极化 $\mathbf{P}^0 \mathbf{n}^a$ ($a=1, 2, \dots, M$) 时, 则在(6.8)式中还应增添一个应力项 $\beta_0 (\mathbf{P}^0)^2 \delta_{ij}$, 其中

$$\beta_0 = \frac{f(3e + \Delta e - \epsilon_0 \chi^*)}{3 \left(1 + \frac{3\Delta\kappa(1-f)}{3\kappa + 4\mu} \right) (3e + \Delta e)^2} \quad (6.13)$$

这个应力项即使在没有外电场和外载荷时依然同时存在, 所以, 这种应力可以当作是复合材料中的内应力。这种内应力的存在是易于理解的: 颗粒的一切永久电偶极矩产生内电场, 这种内电场产生颗粒所受的电力和电力矩, 这种内力和内力矩在平衡状态下必和机械力相平衡。

这个简单的例子证明统计连续统多极子模型优于经典的有效介质理论, 这是因为有效介质理论必须预先假定复合材料有一个有效宏观本构关系公式, 然而, 对于复杂的电磁可变形复合材料而言, 这种本构关系公式一般是不清楚的。由于电极化和磁极化有相类似的情况, 所以对弹磁复合材料而言, 可以得到相似的结论。

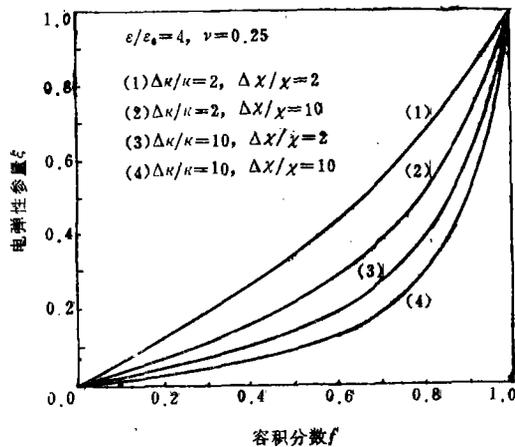


图6 宏观电弹性参数 ξ 和颗粒容积分数 f 以及微观材料性质的关系

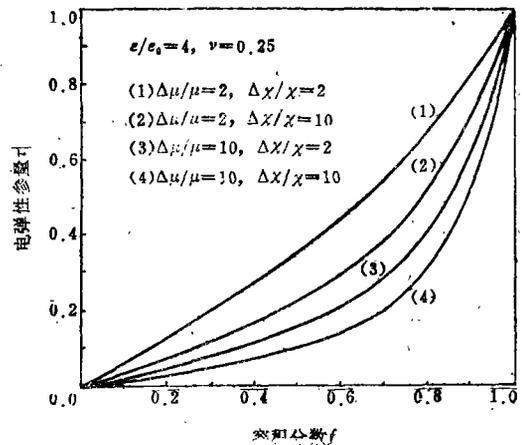


图7 宏观电弹性参数 T 和颗粒容积分数 f 以及微观材料性质的关系

七、结 束 语

本文研究出一种统计连续统多极体理论来处理具有大量统计分布的非均匀颗粒的复合材料问题。在求得了一种无限弹性电介质内具有电极化的一个椭球非均匀颗粒的电弹性相互作用的基本解以后, 推导出了弹性电介质复合材料的整体宏观本构关系, 以及阐明了电弹性相互作用效应的弹性电介质复合材料的整体宏观材料参量。我们发现, 假如基质的力学特性和非均匀颗粒的力学特性都可以用虎克定律表示其微观特性, 则复合材料的整体宏观力学本构关系可以是非虎克型的。而且在具有永久电偶极矩的非均匀颗粒的弹性电介质复合材料中, 也可以存在着整体内应力, 这种内应力是作用在微观颗粒上的电力和电矩产生的。也应指

出, 由于适当引用了近似相互作用模型以及有限体统计, 经典的有关闭域问题和收敛问题的困难在这一理论中都得以避免。椭球颗粒的统计各向异性形状效应, 和电介质耦合材料宏观有效性颗粒取向问题, 都可以用统计连续统多极子法求得显式表达, 在统计法中, 非均匀颗粒的取向是用高斯分布来代表其不规则的分布的。这一理论有其均匀性、普遍性的优点, 它使研究更加复杂的相互作用和电磁耦合现象。成为可能。

致谢 感谢作者的领导谢庆祥教授。在这一工作中, 他与作者进行了许多有助益的讨论并提出了许多建设性的意见。我还要借此机会感谢谢教授在作者在斯德哥尔·摩皇家工学院攻读博士学位期间给与作者的宝贵指导。

参 考 文 献

- [1] Böttcher, C. J. F., *Rec. Trav. Chim. Pays-Bas*, **64** (1945), 47.
- [2] Kröner, E., *Arch. Rational Mech. Anal.*, **4** (1959), 273.
- [3] Willis, J. R., *ASMEJ. Appl. Mech.*, **50** (1983), 1202.
- [4] Hashin, Z and S., J. Shtrikman, *Appl. Phys.*, **33** (1962), 3125.
- [5] Beran, M., *Statistical Continuum Theory*, Interscience Publ., New York (1968).
- [6] Miller, M. N., *J. Math. Phys.*, **10** (1969), 1988.
- [7] Jeffrey, D. J., *Proc. R. Soc. Lond.*, **A335** (1973), 355.
- [8] McCoy, J. J. and M. J. Beran, *Int. Engng. Sci.*, **14** (1976), 7.
- [9] van Beek, L. K. H., *Progress in Dielectrics*, **7** (1967), 69.
- [10] Hale, D. K., *J. Materials Sci.*, **11** (1976), 2105.
- [11] Christensen, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, John Wiley & Sons, New York (1979).
- [12] Zhou, S. A. and R. K. T. Hsieh, *Int. J. Engng Sci.*, **24** (1986), 1195.
- [13] Nelson, D. F., *Electric Optic and Acoustic Interactions in Dielectrics*, Wiley, New York (1979).
- [14] Maugin, G. A., (ed) *The mechanical behavior of electromagnetic solid continua, IUTAM Symp.*, North-Holland, Amsterdam (1984).
- [15] Moon, F. C., *Magneto-Solid Mechanics*, John Wiley & Sons, New York (1984).
- [16] Zhou, S. A., R. K. T. Hsieh, and G. A., Maugin, *Int. J. Solids Structures*, **22** (1986), 1411.
- [17] Zhou, S. A. and R. K. T. Hsieh, *Int. J. Engng. Sci.*, **26** (1988), 13.
- [18] Hsieh, R. K. T., *Int. J. Engng. Sci.*, **20** (1982), 201.
- [19] Zhou, S. A., *Material multipole mechanics electromagnetoelastic solids with defects*, Ph.D. Thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm (1987).
- [20] Eshelby, J. D., *Prog. Solid Mech.*, **2** (1961), 89.
- [21] Mura, T., *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publishers, Hague (1982).
- [22] Jeffrey, D. J., *Proc. R. Soc. Lond.*, **A338** (1974), 503.
- [23] Hershey, A. V., *J. Appl. Mech.*, **21** (1954), 236.
- [24] Hashin, Z., *J. Comp. Mater.*, **2** (1968), 284.
- [25] Horb, M., *J. Math. Phys.*, **14** (1973), 514.
- [26] Willis, J. R., *J. Mech. Phys. Solids*, **25** (1977), 185.

- [27] Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York (1941).
- [28] de Groot, S. R. and L. G. Suttorp, *Foundations of Electrodynamics*, North-Holland, Amsterdam (1972).
- [29] Rayleigh, J. W., *Phil. Mag.*, 34 (1892), 481.
- [30] Kröner, E., *Modelling Small Deformations of Polycrystals* (Ed by J. Gittus and J. Zarka), Elsevier Appl. Sci. Publ., London (1986), 229—291.

Material Multipole Mechanics of Elastic Dielectric Composites

Zhou Shu-ang

(*Department of Mechanics, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden*)

Abstract

The overall mechanical and electrical behaviors of elastic dielectric composites are investigated with the aid of the concept of material multipoles. In particular, by introducing a statistical continuum material multipole theory, the effects of the electric-elastic interaction and the microstructure (size shape, orientation, ...) of inhomogeneous particles on the overall behaviors of the composites can be obtained. A basic solution for an ellipsoidal elastic inhomogeneity with electric polarization in an infinite elastic dielectric medium is first given, which shows that classical Eshelby's elastic solution is modified by the presence of electric-elastic interaction. The overall macroscopic constitutive relations and their overall macroscopic material parameters accounting for electroelastic effect are then derived for the elastic dielectric composites. Some quantitative calculations on the problems with statistical anisotropy, the shape effect and the electric-elastic interaction are finally given for dilute composites.