应用数学和力学，第11卷第3期(1990年3月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非线性固体的各向异性程度*

张 进 敏

(上海市应用数学和力学研究所，1988年5月30日收到)

摘 要

这篇文章目的在于将在 Rychlewski 和张进敏(1988)中得到详细研究的线弹性体各向异性度的概念推广到非线性非弹性体。所定义的各向异性度的良好特性说明了其合理性。

一、引 言

一个物质的各向异性主要体现在两个方面：各向异性类型和各向异性程度。前者由物质的对称群表示。两个物质有相同的对称群那么就说他们有相同各向异性类型。关于物质对称群的数学结构，按对称群对物质的分类以及有给定物质对称群的物质的本构关系表示等问题，已有许多成功的研究结果。到目前为止，数学家和理性力学家的大量的注意力集中在这方面的研究上。另一方面与此相反，对于各向异性程度的研究几乎完全被忽略。众所周知，对于横向各向同性材料（其物质对称群或相同或相互共轭）轴向模量和径向模量的差是特征物质行为的一个重要参数。这种差是一种特定意义下的各向异性程度的度量。到目前为止在这方面的研究如此之少，以至人们还不知道对于一般材料该怎样度量它们的各向异性程度。

在岩石力学界，通常使用各向异性常数

$$a=\frac{C_{11}-C_{12}}{2C_{44}} \tag{1.1}$$

去度量弹性岩石的各向异性程度(Pros 和 Babuska(1967)和 Brace(1965))，这里C_{ij}是弹性系数。Aleksandrov 等(1965)认为这种各向异性系数只适用于立体晶体。而对于一般的弹性体应用类似于(1.1)中a的六个相互独立的参数描述。这种参数在各向同性时恒为1，在立方对称时都退化为(1.1)，而对于横向各向同性6个参数中两两相等且有一对恒为1。Nye(1957)则认为物质的各向异性程度可用它偏离一各向同性材料的程度来度量。

由于最一般的各向异性体有21个独立的弹性常数，其中有18个是独立的物质不变量，所以任何以少于18个参数去度量各向异性程度的计划都不能刻画各向异性的所有方面。但有时存在一些各向异性参数，它从各向异性行为的某一特殊方面去度量各向异性程度。

目前 Rychlewski(1984)已提出一种度量任意p-阶张量的各向异性程度的度量方法，它是该张量的轨迹直径与该张量的两倍范数的比值。实际上这种参数能用来作为系统研究一般任意阶的张量泛函关系的各向异性程度的出发点。

张进敏(1988)，Rychlewski 和张进敏(1988)已经详细研究了线弹性材料的各向异性

* 钱伟长推荐。

度，并且给出了横向各向同性材料，立方对称材料和正交各向异性材料各向异性度的封闭公式，给出了几个数值计算实例。

在这篇论文中，我们首先重温在张进敏(1988)中得到详细研究的线弹性材料各向异性度的物理意义。基于这种物理解释，我们将各向异性度的定义推广到一般材料，获得物质的总体各向异性度和在某一状态各向异性度的概念。最后，我们归纳了所定义的各向异性度的特性，这些良好特性说明所定义各向异性度的合理性。

二、线弹性物质的各向异性度

一个线弹性固体的力学行为可以完全通过下述本构关系描述

$$T=AE \tag{2.1}$$

这里T是第二 Piola-Kirchhoff 应力张量，E 是 Lagrange 应变张量。A 被称作该固体的弹性张量，有时简称该固体的弹性(Elasticity)。

本构关系(2.1)是相对于某一给定的原始构型给定的。如果将弹性体相对于实验室参考标架从一个构型旋转到另一参考构型，并相对于固定的实验室标架在旋转后的物体上施以与以前一样的应变，我们将得到下列的应力输出

$$T^R=(R*A)E \tag{2.2}$$

这里$R*A$是对A作R旋转后的结果，

$$(R*A)_{ijkl}=R_{ir}R_{js}R_{km}R_{ln}A_{rsmn} \tag{2.3}$$

旋转前后物体的应力响应的差别为

$$\Delta T^R=T^R-T=(R*A-A)E \tag{2.4}$$

如果旋转R是固体的一个对称旋转，也即物质对 R 非敏感，那么差ΔT^R变为零。但在一般情形，当R不是该固体的对称旋转时，差ΔT^R存在。而且这种差对于不同的固体将不同，尽管这些固体可能具有相同的物质对称群。这差的存在及它的变化性要求我们引进一个量去度量它，即度量物质的各向异性度。

ΔT^R是随R和E变化的一个函数，人们能容易地获得下列估计

$$\begin{aligned}\|\Delta T^R\|=\|(R*A-A)E\|&<\|R*A-A\|\|E\|\\&<\max_{R\in O}\|R*A-A\|\|E\|\end{aligned} \tag{2.5}$$

这里对任意一p阶张量B范数$\|\cdot\|$定义为

$$\|B\|=B\cdot B=(B_{\alpha_1\cdots\alpha_p}B_{\alpha_1\cdots\alpha_p})^{1/2} \tag{2.6}$$

(2.5)中的等式可由某些旋转R和E达到，所以(2.5)是一个最细估计。其最大值

$$d(A)=\max_{R\in O}\|R*A-A\| \tag{2.7}$$

能被理解作物体在各种不同定向下，经任意一单位模应变所得的应力的差别的最大范数。

直径 $d(A)$是一带有物理量纲的参数。引进另一参数：O-轨迹直径与两倍张量范数的比值，

$$\delta(A)=\frac{d(A)}{2\|A\|} \tag{2.8}$$

去度量张量的各向异性程度似乎更自然。

$\delta(A)$有一下限0和一上限1，即$0\leqslant\delta(A)\leqslant1$，因为

$$d(A)=\max_{R\in O}\|A-R*A\|$$
$$\leqslant\max_{R\in O}(\|A\|+\|R*A\|)=2\|A\| \tag{2.9}$$

当等式有效时，有

$$\|A-R*A\|^2=\|A\|^2+\|R*A\|^2-2A\cdot(R*A)=4\|A\|^2 \tag{2.10}$$

这方程可简化为

$$A\cdot(R*A)=-\|A\|^2 \tag{2.11}$$

根据线性代数的基本知识，上面的方程当且仅当

$$R*A=-A \tag{2.12}$$

时才成立。换句括说，当且仅当存在一个旋转R使得A旋转后与A本身刚好反号时，各向异性程度$\delta(A)$才等于单位1。

事实上，张进敏(1988)已经证明对于线弹性材料其各向异性度决不可达到1，并找到了几种具有特殊对称特性的材料的各向异性度的最大可能值。例如对于横向同性材料和立方对称材料，最大可能的各向异性度分别为$\sqrt{7}/4$和$4\sqrt{3}/9$。

张进敏(1988)，Rychlewski 和张进敏(1988)已经详细调查了线弹性材料的各向异性度，并给出了横向各向同性，立方对称性及正交各向异性等材料各向异性度的数值算例。在许多性况下，在工程结构中使用的材料经常在其线弹性范围外工作，但到目前为止没人讨论过这种非线性非弹性材料的各向异性度问题。在下一节，我们就是试图研究这种材料的各向异性度向量。

三、一般固体的各向异性度

到目前为止，我们仅讨论了任意p-阶张量的各匤异性程度。除线弹性体外，别的物质的物质特性通常不能仅由一个单独的张量描述，而是要通过n个张量或n个张量函数。在这一节，我们将提出某些有前途的参数去度量非线弹性体的各向异性度。从工程实际应用的现实出发，下列三种情况好象特别有研究价值：i)线性固体；ii)非线性弹性体；iii)非线性非弹性体。下面我们将分别加以研究。

A. 线性固体

线性固体是指以下式为本构关系的固体。

$$T=A_1E_1+A_2E_2+\cdots+A_NE_N \tag{3.1}$$

这里，$A_1A_2\cdots A_N$是N个与宗量E_1，$E_2\cdots$，E_N独立的线性算子，所有宗量被假设是 Lagrange 型的，因而是相对于某一固定的参考标架的。当如果将物体作一个正交旋转R，并相对于参考标架施加相同的广义应变E_1，…，E_N则响应T变成

$$T^R=(R*A_1)E_1+(R*A_2)E_2+\cdots+(R*A_N)E_N \tag{3.2}$$

这里对任意p-阶张量型算子A，$R*A_i$定义为

$$(R*A)_{\alpha_1\cdots\alpha_p}=R_{\alpha_1\beta_1}\cdots R_{\alpha_p\beta_p}A_{\beta_1\cdots\beta_p} \tag{3.3}$$

旋转前后的响应T的差为

$$\Delta T^R=T^R-T$$
$$=(R*A_1-A_1)E_1+(R*A_2-A_2)E_2+\cdots+(R*A_N-A_N)E_N \tag{3.4}$$

定义1 本构关系(3.1)的各向异性度定义为

$$\delta(A_1, \cdots, A_N)=\frac{d(A_1, \cdots, A_N)}{2\|A_1, \cdots, A_N\|} \tag{3.5}$$

这里

$$d(A_1, \cdots, A_N)=\max_{\substack{R\in O\\ \|E_i\|=1}}\|\Delta T^R\| \tag{3.6}$$

$$=\max_{\substack{R\in O\\ \|E_i\|=1}}\|(R*A_1-A_1)E_1+(R*A_2-A_2)E_2+\cdots+(R*A_N-A_N)E_N\|$$

是物质经受各种单位的广义应变时，物体作R旋转前后最大响应差范数，

$$\|A_1,\cdots,A_N\|=\max_{\|E_i\|=1}\|A_1E_1+A_2E_2+\cdots+A_NE_N\| \tag{3.7}$$

是物质经受各种单位广义应变时所能达到的最大响应范数。显然对任意$R\in O$

$$\|A_1,\cdots,A_N\|=\|R*A_1, \cdots, R*A_N\| \tag{3.8}$$

$$d(A_1,\cdots,A_N)=d(R*A_1, \cdots, R*A_N) \tag{3.9}$$

$$\delta(A_1,\cdots,A_N)=\delta(R*A_1, \cdots, R*A_N) \tag{3.10}$$

也就是说$\|A_1, \cdots, A_N\|$，$d(A_1, \cdots, A_N)$和$\delta(A_1,\cdots,A_N)$是物质不变量。从方程(3.6)，很容易证明

$$\begin{aligned}
&d(A_1, \cdots, A_N)\\
&=\max_{\substack{R\in O\\ \|E_i\|=1}}\|(R*A_1-A_1)E_1+(R*A_2-A_2)E_2+\cdots+(R*A_N-A_N)E_N\|\\
&\leqslant\max_{\substack{\|E_i\|=1\\ R\in O}}\|(R*A_1)E_1+(R*A_2)E_2+\cdots+(R*A_N)E_N\|\\
&+\max_{\|E_i\|=1}\|A_1E_1+A_2E_2+\cdots+A_NE_N\|\\
&=2\|A_1, \cdots, A_N\|
\end{aligned} \tag{3.11}$$

从上式可知，各向异性度$\delta(A, \cdots, A)$永远不会大于1。

B. 非线性弹性固体

非线性弹性固体的本构关系形式为

$$T=F(E) \tag{3.12}$$

这里F是一一对应映射。

当将物质体相对于参考标架旋转R并施加相同的应变E时，应力响应变为

$$T^R=R^TF(RER^T)R \tag{3.13}$$

应力响应在旋转前后的差值为

$$\Delta T^R=T^R-T=R^TF(RER^T)R-F(E) \tag{3.14}$$

定义2 参数

$$\delta(F, E)=\frac{d(F, E)}{2\|(F, E)\|} \tag{3.15}$$

被称作非线性弹性体在应变E时的各向异性度，这里

$$d(F, E)=\max_{\substack{R\in O\\ E'\in E/O}}\|\Delta T^R\|$$

$$=\max_{\substack{R\in O\\ E'\in E/O}}\|R^TF(RE'R^T)R-F(E')\| \tag{3.16}$$

是受弹性变形E作用时弹性体在各种定向下最大的应力响应的差范数，

$$\|(F,\ E)\|=\max_{R\in O}\|F(RER^T)\|=\max_{E'\in E/O}\|F(E')\| \tag{3.17}$$

是物体在各种定向下最大的应力范数。这里我们使用E/O表示E在正交群O下的轨迹。类似地，我们有不等式

$$\begin{aligned}d(F,\ E)&\leqslant\max_{\substack{R\in O\\ E'\in E/O}}\|R^TF(RER^T)R\|+\max_{E'\in E/O}\|F(E')\|\\&=2\|(F,\ E)\|\end{aligned} \tag{3.18}$$

换句话说，各向阶异性度$\delta(F,\ E)$决不会大于1。

推论3 设Q是一任意正交张量，那么

$$d(F,\ QEQ^T)=d(F,\ E) \tag{3.19}$$

$$\|(F,\ QEQ^T)\|=\|(F,\ E)\| \tag{3.20}$$

$$\delta(F,\ QEQ^T)=\delta(F,\ E) \tag{3.21}$$

证明

$$\begin{aligned}d(F,\ QEQ^T)&=\max_{\substack{E'\in E/O\\ R\in O}}\|R^TF(RQE'Q^TR^T)R-F(QE'Q^T)\|\\&=\max_{\substack{E''\in QE'Q^T/O\\ R\in O}}\|R^TF(RE''R^T)R-F(E'')\|\\&=d(F,\ E)\end{aligned} \tag{3.22}$$

其它两式句类似地证明。

方程(3.19)～(3.21)说明$d(F,\ E)$，$\|(F,\ E)\|$和$\delta(F,\ E)$是三个物质不变量。

由(3.15)定义的各向异性度是与应变E相关的，最大值

$$\delta(F)=\sup_{E\in\mathrm{Dom}(F)}\delta(F,\ E)=\sup_{E\in\mathrm{Dom}(F)}\frac{d(F,\ E)}{2\|(F,\ E)\|} \tag{3.23}$$

被称作该弹性物质的总体各向异性度

C. 非线性非弹性固体

这里一般本构关系是指带有N个宗量$E=(E_1,\ \cdots,\ E_N)$的非线性本构关系，其形式为

$$T=F(E_1,\ \cdots,\ E_N) \tag{3.24}$$

这里$E_1,\ \cdots,\ E_N$是N个 Lagnange 型变量，保持广义应变$E=(E_1,\ \cdots,\ E_N)$不变，而将物体相对于参考标架旋转R应力响应T的变为

$$T^R=R^TF(R*E_1,\ \cdots,\ R*E_N)R \tag{3.25}$$

旋转前后应力响应T的差为

$$\Delta T^R=T^R-T=R^TF(R*E_1,\cdots,R*E_N)R-F(E_1,\ \cdots,\ E_N) \tag{3.26}$$

以E/O表示$E=(E_1,\ \cdots,\ E_N)$在正交群O下的轨迹，即

$$E/O=\{(R*E_1,\ \cdots,\ R*E_N)\,|\,R\in O\} \tag{3.27}$$

定义4 我们称参数

$$\delta(F;\ E_1,\cdots,E_N)=\frac{d(F;E_1,\ \cdots,\ E_N)}{2\|(F;E_1,\cdots,E_N)\|} \tag{3.28}$$

为关系(3.24)在$(E_1, \cdots, E_N)$处的各向异性度，这里

$$d(F; E_1,\cdots,E_N)=\max_{\substack{R\in O\\ E'\in E/O}}\|\Delta T^R\|$$

$$=\max_{\substack{R\in O\\ E'\in E/O}}\|R^TF(R*E'_1, \cdots, R*E'_N)R-F(E'_1, \cdots, E'_N)\| \quad (3.29)$$

是在受广义变形$(E_1, \cdots, E_N)$下，物体取不同定向时所得到的最大的响应差范数，

$$\|(F; E_1, \cdots, E_N\|=\max_{E'\in E/O}\|F(E'_1, \cdots, E'_N)\| \quad (3.30)$$

是物体在各种不同定向下所受应力的最大范数。

我们同样有不等式

$$d(F; E_1,\cdots,E_N)$$

$$\leqslant\max_{\substack{R\in O\\ E'\in E/O}}\|R^TF(R*E_1, \cdots, R*E'_N)R\|+\max_{E'\in E/O}\|F(E'_1, \cdots, E'_N)\|$$

$$=2\|(F; E_1, \cdots, E_N)\| \quad (3.31)$$

换句话说，各向异性度$\delta(F; E_1, \cdots E_N)$绝不会大于1.

推论5 设Q是任意一正交张量，那么

$$d(F; Q*E_1, \cdots, Q*E_N)=d(F; E_1, \cdots, E_N) \quad (3.32)$$

$$\|(F; Q*E_1, \cdots, Q*E_N)\|=\|(F; E_1, \cdots, E_N)\| \quad (3.33)$$

$$\delta(F; Q*E_1, \cdots, Q*E_N)=\delta(F; E_1, \cdots, E_N) \quad (3.34)$$

这一推论的证明与推论 3 的证明类似.

类似地，关系(3.24)的各向异性度定义为

$$\delta(F)=\sup_{E\in\mathrm{Dom}(F)}\delta(F; E_1, \cdots, E_N) \quad (3.35)$$

可以验证，当(3.24)退化成(3.12)时，定义式(3.28)，(3.35)分别退化到(3.15)和(3.23)。而当(3.24)退化到(3.1)时，(3.35)此时等价于

$$\delta(A_1, \cdots, A_N)$$

$$=\sup\left(\max_{\substack{R\in O\\ E'\in E/O}}\|(R*A_1-A_1)E'_1+\cdots+(R*A_N-A_N)E'_N\| \Big/ \max_{E'\in E/O}\|A_1E'_1+\cdots+A_NE'_N\|\right) \quad (3.36)$$

它并不退化到(3.5)。也就是说对于(3.1)我们定义了两种不同意义的各向异性度，很难说哪一种更为合理。

这样，我们在由所有固体材料组成的集合内按照它们的总体各向异性度建立了一种全序关系。对任意两固体材料S_1和S_2。我们说$S_1<S_2$如果$\delta(S_1)<\delta(S_2)$，同样有 $S_1=S_2$和$S_1>S_2$。

最后必须指出在所有前面的讨论中，我们总假设一满足下面条件的参考标架被选定：所考虑物质相对于该标架的对称群是正交群O的一个子群。按照 Noll[1972]分类，对于固体和流体材料这总是可能的。对于液晶材料这种标架是不存在的。是否这里所定义的各向异性度(3.35)对液晶材料继续有效值得进一步的调查。

综合上述，在这一节我们对三种类型的本构关系提出了度量它们的各向异性度的参数。这些参数有下列特性

1） 最大可能值是1。

2） 各向异性度永远为正，而且对于各向同性材料均为零。

3） 所定义的量是物质不变量。

4） 所有各向异性度都是在各种定向下物体的最大响应差与它最大的响应范数的比((3.5)和(3.35)的区别在于对应变的取法上)。

5） 当物质是线弹性体时，所有各向异性度都退化到(2.8)。

感谢：本文得到我的两位导师钱伟长教授和 Jan Rychlewski 教授的支持，鼓励和指导，谨在此表示衷心的感谢。

参 考 文 献

[1] Alexandrov, K. S., T. V. Ryshora, B. R. Belikov and L. A. Shabanova, anisotropy of elastic properties of rock, *Int. Geol. Rev.*, 11 (1969), 539—548.

[2] Brace, W. F., Relation of elastic properties of rocks to fabric, *J. Geophys. Research*, **70** (1965), 22—35.

[3] Lama, R. D. and V. S. Vutukuri, *Handbook on Mechanical Properties of Rocks.*, Vol. II, Trans. Tech. Publ. (1978).

[4] Lekhnitskii, S. G., Stress distribution close to a horizontal working of elliptical shape in a transversely mass with inclined planes of isotropy, *Mech. Solids*, 1 (1966), 35—41.

[5] Noll, W., A new mathematical theory of simple materials, *Arch. Ratl. Mech. Anal.*, **48** (1972), 1—50.

[6] Nye, J. F., *Physical Properties of Crystals*, Oxford Clarendon Press (1957).

[7] Pros, Z. and V. Babuska, Method for investigating the elastic anisotropy on spherical rock samples, *Zhur. Geophys.*, **33** (1967), 298—316.

[8] Rychlewski, j., "CEIIINOSSSTTUV" mathematical structure of elastic bodies, Institute of Mechanical Problem, USSR Academy of Sciences, Preprint No: 217, Moscow (1983).

[9] Rychlewski, J., The evaluation of anisotropy of properties described by symmetrical second order tensors, *Czechoslovak J. Phys.*, **34** (1984), 499-506.

[10] Rychlewski, J., Zur Abschatzung der Anisotropie, ZAMM, 65 (1985), 65—258.

[11] Rychlewski, J. and J. M. Zhang, On the anisotropy degree of linearly elastic solids, *Arch. of Mech.* (1989). (in press)

[12] Zhang, J. M., On the symmetry and insensitivity of simple materials, Ph. D. Disesrtation, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University of Technology (1988).

Anisotropy Degree of Nonlinear Solids

Zhang Jin-min

(*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai*)

Abstract

This research aims at the generalization of the concept of anisotropy degree of linearly elastic solids which has been defined and investigated in detail by Zhang[12] to that of nonlinear and non-elastic solids. The properties of the anisotropy degrees defined here show that they are reasonable.