文章编号: 1000_0887(2004) 06_0643_10

多孔介质中可压缩流体力学方程组经典解的整体存在性与破裂现象*

刘法贵[1], 孔德兴[2]

(1. 华北水利水电学院 数学与信息科学系, 郑州 450008;
2. 上海交通大学 应用数学系, 上海 200030)

(戴世强推荐)

摘要: 利用拟线性双曲型方程组极值原理, 改进了 HSIAO Ling 和 D. Serre 得到的关于多孔介质中可压缩流体力学方程组解的存在性结果, 给出了其 Cauchy 问题的一个关于经典解整体存在和破裂的完整结果。这些结果说明强耗散有助于“小”解的光滑性。

关 键 词: 多孔介质; 可压缩流体力学; 方程组; 经典解; 整体存在性; 破裂
中图分类号: O175.27 文献标识码: A

引 言

考虑多孔介质中可压缩流体力学方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}-\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial p(v,S)}{\partial x}+2\alpha u=0,\\[2mm] \dfrac{\partial S}{\partial t}=0,\end{cases}\tag{1}$$

其中 v、u、S 分别表示气体的比容、速度和熵, p 表示压强, 其状态方程 $p=p(v,S)$ 满足 $p_v<0,\ \forall v>0$。

显然, (1) 是一严格双曲型方程组且其特征根分别为

$$\lambda_1\overset{\Delta}{=}-\sqrt{-p_v},\quad \lambda_2\overset{\Delta}{=}0,\quad \lambda_3\overset{\Delta}{=}\sqrt{-p_v}.$$

考察下述初值:

$$t=0:\ u=u_0(x),\ v=v_0(x),\ S=S_0(x),\tag{2}$$

其中 $v_0(x)(>0)$, $u_0(x)$ 是 C^1 函数, 且 C^1 模有界, $S_0(x)$ 是 C^2 函数且 C^2 模有界。本文将研究 Cauchy 问题(1), (2) 经典解的整体存在性与破裂现象。

对 $\alpha=0$ 的情形, 该问题经典解的整体存在性与破裂现象已被较好地研究过[1~4]。对耗

* 收稿日期: 2001_11_27; 修订日期: 2003_12_08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10001024); 国家基础研究资助课题(G2000077306)
作者简介: 刘法贵(1965—), 男, 河南内乡人, 教授, 博士(联系人. Tel: +86_371_5727655_3399; Fax: +86_371_5790220; E_mail: liufagui@ncwu.edu.cn).

散情形(即 $\alpha > 0$), 如果方程组是等熵的(即 $S(t, x)$ 恒为常数), 那么许多关于经典解的整体存在性与破裂现象的结果已被建立[5~8]• 然而, 对非等熵情形, 研究结果则比较少[9,10]• 肖玲等人[9]考虑了方程(1)具如下初值的 Cauchy 问题:

$$t = 0: u = u_0(x), v = v + v_0(x), \quad S = S + S_0(x), \tag{3}$$

其中 $v(> 0)$, S 为常数, $u_0(x)$, $v_0(x) \in C^1$ 具紧支集, $S_0(x) \in C^2$ 具紧支集• 对多方气体, 在 $u_0(x)$, $v_0(x)$ 的 C^1 模和 $S_0(x)$ 的 C^2 模充分小的假设下证明了该 Cauchy 问题(1)、(3) 在 $t \geqslant 0$ 上存在唯一的整体经典解[9]• 郑永树[10]得到了整体经典解存在的充分条件和必要条件•

利用极值原理[11], 本文将改进[9]和[10]中的结果, 给出一个关于经典解整体存在性和破裂的完整结果• 为此, 首先在第 1~2 节中建立一些先验估计, 利用这些先验估计在第 3~4 节中给出主要结果及其证明•

1 一致先验估计 I

考虑多方气体

$$p = (\gamma - 1)\rho^\gamma \exp\left(\frac{S}{c_v}\right), \tag{4}$$

其中 $c_v > 0$ 是比热容, $\gamma \in (1, 3)$ 为绝热指数, $\rho = v^{-1}$ 是气体密度• 为简单起见, 不妨设 $c_v = 1$• 此时,

$$p = (\gamma - 1)\rho^\gamma \exp S• \tag{5}$$

由(1c)式及初始条件, 易知

$$S(t, x) = S_0(x)• \tag{6}$$

于是(1)、(2)等价于

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial p(v, S_0(x))}{\partial x} + 2\alpha u = 0, \end{cases} \tag{7}$$

$$t = 0: \ u = u_0(x), \ v = v_0(x), \tag{8}$$

其中 p 由(5)确定•

引入

$$w = u + h(x, v), \ z = u - h(x, v), \tag{9}$$

其中

$$h(x, v) = 2\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} v^{-(\gamma - 1)/2} \exp\left(\frac{S_0(x)}{2}\right)• \tag{10}$$

于是(7)、(8)可写为

$$\begin{cases} D^+ w = \dfrac{1}{4\gamma} \lambda S_0'(x)(w - z) - \alpha(w + z), \\[2ex] D^- z = \dfrac{1}{4\gamma} \lambda S_0'(x)(w - z) - \alpha(w + z), \end{cases} \tag{11}$$

$$t = 0: \ w = w_0(x), \ z = z_0(x), \tag{12}$$

其中

$$D^+ = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda \frac{\partial}{\partial x}, \ D^- = \frac{\partial}{\partial t} - \lambda \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\lambda = \sqrt{\gamma(\gamma - 1)} v^{-(\gamma + 1)/2} \exp\left(\frac{S_0(x)}{2}\right), \tag{13}$$

$$w_0 = u_0(x) + h(x, v_0(x)),\ z_0 = u_0(x) - h(x, v_0(x)). \tag{14}$$

记

$$w = w\exp\left(-\frac{S_0(x)}{2}\right),\ z = -z\exp\left(-\frac{S_0(x)}{2}\right). \tag{15}$$

从(11)、(12)可得到

$$\begin{cases} D^+ w = \left(\alpha + \dfrac{\lambda S_0'(x)}{4\gamma}\right)(z - w), \\ D^- z = \left(\alpha - \dfrac{\lambda S_0'(x)}{4\gamma}\right)(w - z), \end{cases} \tag{16}$$

$$t = 0:\ w = w_0(x)\exp\left(-\frac{S_0(x)}{2\gamma}\right),\ z = -z_0(x)\exp\left(-\frac{S_0(x)}{2\gamma}\right). \tag{17}$$

假设(H) 存在正常数 ε 和 v_0 使得

$$\|u_0(x)\|_{C^0} \leqslant \varepsilon,\ 0 < v_0 - \varepsilon \leqslant v_0(x) \leqslant v_0 + \varepsilon,\ \|S_0'(x)\|_{C^0} \leqslant \varepsilon. \tag{18}$$

引理 1.1 在假设(H)下, 如果 ε 充分小, 则在 Cauchy 问题(1)、(2)的 C^1 解的存在区域上, 存在不依赖于 (t, x) 和 ε 的常数 $c_i(i = 1, 2, 3)$ 使得

$$-c_1\varepsilon + c_2 \leqslant w(t, x),\ z(t, x) \leqslant c_1\varepsilon + c_3. \qquad \square$$

证明 由(10)、(14)和(18), 从(17)可得

$$-C_1\varepsilon + C_2 \leqslant w_0(x),\ z_0(x) \leqslant C_1\varepsilon + C_3,$$

这里及以后出现的 $C_j(j = 1, 2, \dots)$ 表示不依赖于 (t, x) 和 ε 的常数.

根据局部经典解存在唯一性定理[12], 存在 $\tau > 0$ 使得 Cauchy 问题(1)、(2)在 $0 \leqslant t \leqslant \tau$ 存在唯一的 C^1 解. 因此, 由连续性, 取充分小的 $\tau > 0$ 使

$$-C_1\varepsilon + \frac{1}{2}C_2 \leqslant w(t, x),\ z(t, x) \leqslant C_1\varepsilon + 2C_3.$$

为证引理 1.1, 只须证存在常数 C_4、C_5 和 C_6 使得在 C^1 解存在区域上成立

$$-C_4\varepsilon + \frac{1}{2}C_5 \leqslant w(t, x),\ z(t, x) \leqslant C_4\varepsilon + 2C_6, \tag{19}$$

则有

$$-C_4\varepsilon + C_5 \leqslant w(t, x),\ z(t, x) \leqslant C_4\varepsilon + C_6, \tag{20}$$

其中

$$C_4 \geqslant C_1,\ 0 < C_5 \leqslant C_2,\ C_6 \geqslant C_3. \tag{21}$$

由(9)、(10)、(15)、(19)和 $S(t, x) = S_0(x)$ 的 C^2 模有界性, 直接从(13)和(18)两式, 当 $\varepsilon > 0$ 适当小时, 得到

$$\lambda\|S_0'(x)\|_{C^0} \leqslant C_7\varepsilon \leqslant 4\alpha\gamma.$$

$$\alpha - \frac{\lambda S_0'(x)}{4\gamma} \geqslant 0,\ \alpha + \frac{\lambda S_0'(x)}{4\gamma} \geqslant 0.$$

从而利用极值原理[11]知, 在 C^1 解的存在区域上成立

$$-C_1\varepsilon + C_2 \leqslant w(t, x),\ z(t, x) \leqslant C_1\varepsilon + C_3.$$

注意到(21), 可得(20). 取 $c_1 \geqslant C_1$, $0 < c_2 \leqslant C_2$ 及 $c_3 \geqslant C_3$, 即证得引理 1.1. $\square$

由(15)可得到:

推论 1.1 在假设(H)下, 如果 ε 充分小, 则存在不依赖于 (t, x), ε 的正常数 $c_i(i = 4, 5, 6)$, 使得在 Cauchy 问题(1)、(2)的 C^1 解的存在区域上成立

$$-c_4\varepsilon+c_5\leqslant w(t,x),\ -z(t,x)\leqslant c_4\varepsilon+c_6. \tag{22}$$

□

同理可证:

引理 1.2　在假设(H) 下, 如果 ε充分小且

$$\|S_0(x)-S_0\|_{C^0}\leqslant\varepsilon, \tag{23}$$

其中 S_0 是常数. 则存在不依赖于(t,x)、ε的正常数$k_i(i=1,2,\cdots,6)$, 使得在 Cauchy 问题(1)、(2) 的 C^1 解的存在区域上成立

$$\begin{cases}-k_1\varepsilon+k_2\leqslant w(t,x),\ z(t,x)\leqslant k_1\varepsilon+k_2,\\ -k_3\varepsilon+k_4\leqslant w(t,x),\ -z(t,x)\leqslant k_3\varepsilon+k_4,\\ |u(t,x)|\leqslant k_5\varepsilon,\ |v(t,x)-v_0|\leqslant k_6\varepsilon.\end{cases} \tag{24}$$

□

2　一致先验估计 II

对(11) 关于 x 求导, 得

$$\begin{cases}D^+w_x=-\dfrac{\gamma+1}{4}\rho w_x^2+\dfrac{\gamma+1}{4}\rho w_xz_x-\left(\alpha-\dfrac{3\lambda S_0'(x)}{2(\gamma-1)}\right)w_x-\\ \qquad\left(\dfrac{\lambda S_0'(x)}{2(\gamma-1)}+\alpha\right)z_x-\dfrac{\lambda^2v}{\gamma-1}\left(\dfrac{S_0'(x)}{\gamma-1}-S_0''(x)\right),\\ D^-z_x=-\dfrac{\gamma+1}{4}\rho z_x^2+\dfrac{\gamma+1}{4}\rho w_xz_x-\left(\alpha+\dfrac{3\lambda S_0'(x)}{2(\gamma-1)}\right)z_x+\\ \qquad\left(\dfrac{\lambda S_0'(x)}{2(\gamma-1)}-\alpha\right)w_x-\dfrac{\lambda^2v}{\gamma-1}\left(\dfrac{S_0'(x)}{\gamma-1}-S_0''(x)\right).\end{cases} \tag{25}$$

引入 $h=\dfrac{\gamma+1}{4}\ln\rho$,

$$\begin{cases}g_1=\dfrac{4\alpha}{3-\gamma}v^{(3-\gamma)/4}+\dfrac{2\lambda v^{(3-\gamma)/4}S_0'(x)}{(3\gamma-1)(\gamma-1)},\\ g_2=\dfrac{4\alpha}{3-\gamma}v^{(3-\gamma)/4}-\dfrac{2\lambda v^{(3-\gamma)/4}S_0'(x)}{(3\gamma-1)(\gamma-1)}.\end{cases} \tag{26}$$

由(25) 式得

$$\begin{cases}D^+(w_x\exp h)=-K_1(\rho)(w_x\exp h)^2-K_2(x,v)w_x\exp h-\\ \qquad\qquad D^+g_1-K_3(x,v),\\ D^-(z_x\exp h)=-K_1(\rho)(z_x\exp h)^2-K_4(x,v)z_x\exp h-\\ \qquad\qquad D^-g_2-K_5(x,v),\end{cases} \tag{27}$$

其中

$$K_1(\rho)=\frac{\gamma+1}{4}\rho\exp(-h),\quad K_2(x,v)=\alpha-\frac{5-\gamma}{4(\gamma-1)}\lambda S_0'(x), \tag{28a, b}$$

$$K_3(x,v)=\frac{\lambda^2v^{(3-\gamma)/4}}{(\gamma-1)(3\gamma-1)}\left[\frac{5\gamma-3}{2(\gamma-1)}(S_0'(x))^2-3(\gamma-1)S_0''(x)\right]-\frac{\alpha}{\gamma-1}\lambda v^{(3-\gamma)/4}S_0'(x), \tag{28c}$$

$$K_4(x,v)=\alpha+\frac{5-\gamma}{4(\gamma-1)}\lambda S_0'(x), \tag{28d}$$

$$K_5(x,v)=\frac{\lambda^2 v^{(3-\gamma)/4}}{(\gamma-1)(3\gamma-1)}\left[\frac{5\gamma-3}{2(\gamma-1)}(S_0'(x))^2-3(\gamma-1)S_0''(x)\right]+$$
$$\frac{\alpha}{\gamma-1}\lambda v^{(3-\gamma)/4}S_0'(x). \tag{28e}$$

记

$$W=w_x\exp h+g_1,\quad Z=z_x\exp h+g_2. \tag{29}$$

于是有

$$\begin{cases}D^+W=-K_1W^2+(2K_1g_1-K_2)W-K_1g_1^2+K_2g_1-K_3,\\ D^-Z=-K_1Z^2+(2K_1g_2-K_4)Z-K_1g_2^2+K_4g_2-K_5.\end{cases} \tag{30}$$

设 $\Delta_1=K_2^2-4K_1K_3$, $\Delta_2=K_4^2-4K_1K_5$. 容易验证, 在 C^1 解的存在区域上成立

$$\Delta_1\geqslant 0,\quad \Delta_2\geqslant 0. \tag{31}$$

因此,(30)式可改写为

$$\begin{cases}D^+W=-K_1(W-W_1)(W-W_2),\\ D^-Z=-K_1(Z-Z_1)(Z-Z_2),\end{cases} \tag{32}$$

其中

$$\begin{cases}W_1=\dfrac{K_2-2K_1g_1-\sqrt{\Delta_1}}{2K_1},\quad W_2=\dfrac{K_2-2K_1g_1+\sqrt{\Delta_1}}{2K_1},\\[2ex] Z_1=\dfrac{K_4-2K_1g_2-\sqrt{\Delta_2}}{2K_1},\quad Z_2=\dfrac{K_4-2K_1g_2+\sqrt{\Delta_2}}{2K_1}.\end{cases} \tag{33}$$

定义

$$\sigma_1=\inf_{(t,x)\in D}W_2(t,x)-\sup_{(t,x)\in D}W_1(t,x),\quad \sigma_2=\inf_{(t,x)\in D}Z_2(t,x)-\sup_{(t,x)\in D}Z_1(t,x),$$

其中 D 表示 Cauchy 问题(1)、(2) 的 C^1 解的存在区域. 考虑(32)具下列初值的 Cauchy 问题:

$$t=0:\ W=W_0(x),\quad Z=Z_0(x), \tag{34}$$

其中

$$\begin{cases}W_0(x)=w_0'(x)[\exp h(x,v_0(x))]+\\ \qquad\dfrac{4\alpha}{3-\gamma}(v_0(x))^{(3-\gamma)/4}+\dfrac{2\lambda_0(x)(v_0(x))^{(3-\gamma)/4}S_0'(x)}{(3\gamma-1)(\gamma-1)},\\ Z_0(x)=z_0'(x)\exp[h(x,v_0(x))]-\\ \qquad\dfrac{4\alpha}{3-\gamma}(v_0(x))^{(3-\gamma)/4}+\dfrac{2\lambda_0(x)(v_0(x))^{(3-\gamma)/4}S_0'(x)}{(3\gamma-1)(\gamma-1)},\end{cases} \tag{35}$$

这里

$$\lambda_0(x)=\sqrt{\gamma(\gamma-1)}(v_0(x))^{-(\gamma+1)/2}\exp\left(\frac{S_0(x)}{2}\right). \tag{36}$$

引理2.1 假设在 Cauchy 问题(1)、(2) 的 C^1 解的存在区域 D 上, $\|u\|_{C^0(D)}$ 及 $\|v\|_{C^0(D)}$ 有界,

$$\sigma_1>0,\quad \sigma_2>0, \tag{37}$$

且(31)成立. 进一步假设

$$W_0(x)>\inf_{(t,x)\in D}W_2(t,x),\quad Z_0(x)>\inf_{(t,x)\in D}Z_2(t,x), \tag{38}$$

则

$$\begin{cases} \min\left\{\inf_{x\in\mathbf{R}} W_0(x), \inf_{(t,x)\in D} W_2(t,x)\right\} \leqslant W(t,x) \leqslant \\ \qquad \max\left\{\sup_{x\in\mathbf{R}} W_0(x), \sup_{(t,x)\in D} W_2(t,x)\right\}, \\ \min\left\{\inf_{x\in\mathbf{R}} Z_0(x), \inf_{(t,x)\in D} Z_2(t,x)\right\} \leqslant Z(t,x) \leqslant \\ \qquad \max\left\{\sup_{x\in\mathbf{R}} Z_0(x), \sup_{(t,x)\in D} Z_2(t,x)\right\}. \end{cases} \tag{39}$$

□

引理 2.1 可由下述引理直接得到

引理 2.2　考虑下述初值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -k(t)(y-y_1(t))(y-y_2(t)), \qquad t>0, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{40}$$

其中 $k(t)$、$y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 均为 C^0 函数, C^0 模有界, 且满足

$$k(t) > 0, \quad \sup_t y_1(t) < \inf_t y_2(t).$$

如果

$$y_0 > \inf_t y_2(t),$$

那么在 Cauchy 问题(40) 的 C^1 解的存在区域上成立

$$\min\left\{y_0, \inf_t y_2(t)\right\} \leqslant y(t) \leqslant \max\left\{y_0, \sup_t y_2(t)\right\}.$$ □

事实上, 在 Cauchy 问题(1)、(2) 的 C^1 解的存在区域内, 令 $x_+ = x_+(t,\beta)$ 表示过点$(0,\beta)$ 的前向特征线:

$$\frac{\mathrm{d}x_+}{\mathrm{d}t} = \lambda, \quad x_+(0) = \beta. \tag{41}$$

沿此特征线, 考察关于(32) 式中的第一个方程具初值

$$W(0) = W_0(\beta)$$

的初值问题. 注意到引理 2.1 的假设, 并利用引理 2.2 可得

$$\min\left\{W_0(\beta), \inf_t W_2(t, x_+(t;\beta))\right\} \leqslant W(t, x_+(t;\beta)) \leqslant$$
$$\max\left\{W_0(\beta), \sup_t W_2(t, x_+(t;\beta))\right\}.$$

进一步注意到 β 的任意性, 容易得到(39) 式中的第一个不等式.

类似可证(39) 式中的第二个不等式.

3　整体存在性

本节将考察 Cauchy 问题(1)、(2) 的 C^1 解的整体存在性. 主要结果由定理 3.1~ 3.2 给出.

定理 3.1　在假设(H) 下, 如果

$$\| u_0'(x) \|_{C^0} \leqslant \varepsilon, \quad \| v_0'(x) \|_{C^0} \leqslant \varepsilon, \tag{42}$$

$\varepsilon > 0$ 适当小, 则 Cauchy 问题(1)、(2) 在上半平面 $t \geqslant 0$ 上存在唯一的 C^1 解. □

定理 3.2　在假设(H) 下, 进一步假设

$$\| S_0''(x) \|_{C^0} \leqslant \varepsilon. \tag{43}$$

如果

$$w_0'(x) \geqslant -\frac{4\alpha}{3-\gamma} v_0(x) - \frac{2\lambda_0(x) S_0'(x) v_0(x)}{(3\gamma-1)(\gamma-1)}, \tag{44}$$

$$z_0'(x) \geqslant -\frac{4\alpha}{3-\gamma}v_0(x)+\frac{2\lambda_0(x)S_0'(x)v_0(x)}{(3\gamma-1)(\gamma-1)},\tag{45}$$

其中 $\lambda_0(x)$ 由(36) 给出, 而 $W_1(t,x)$、$Z_1(t,x)$ 由(33) 给出. 则存在适当小的 $\varepsilon_0>0$ 使得 $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$, Cauchy 问题(1)、(2) 在上半平面 $t\geqslant 0$ 上存在唯一的 C^1 解. □

定理 3.1 的证明　根据拟线性双曲型方程组 Cauchy 问题经典解局部存在唯一性定理(见[12]), 为证定理 3.1, 只需证明在经典解 $(u,v,S)=(u(t,x),v(t,x),S(t,x))$ 的存在区域上, (u,v,S) 的 C^1 模具有一致先验估计.

由(6) 及关于 $S_0(x)$ 的假设, 容易得到 $S(t,x)$ 的 C^1 模在经典解的存在区域上有界. 另一方面, 由(6) 和(9)、(10), 从推论 1.1 可知, 存在适当小的 $\varepsilon_0>0$ 使得在 C^1 解的存在区域上成立

$$|u(t,x)|,\ |v(t,x)|\leqslant C_8.\tag{46}$$

下面在 C^1 解存在区域上建立 $(u(t,x),v(t,x))$ 的一阶导数的一致先验估计. 记

$$r=-\lambda w_x+\frac{\lambda S_0'(x)}{4\gamma}(w-z),\quad s=\lambda z_x+\frac{\lambda S_0'(x)}{4\gamma}(w-z).\tag{47}$$

于是有

$$\begin{cases} D^+ r=A(t,x)(s-r),\\ D^- s=B(t,x)(r-s),\end{cases}$$

$$t=0:\quad \begin{aligned} r&=r_0(x)\stackrel{\triangle}{=}-\lambda_0(x)w_0'(x)+\frac{\lambda_0(x)S_0'(x)}{4\gamma}(w_0(x)-z_0(x)),\\ s&=s_0(x)\stackrel{\triangle}{=}\lambda_0(x)z_0'(x)+\frac{\lambda_0(x)S_0'(x)}{4\gamma}(w_0(x)-z_0(x)),\end{aligned}$$

其中

$$A(t,x)=\alpha+\frac{(\gamma+1)\lambda w_x}{(\gamma-1)(w-z)}-\frac{\lambda S_0'(x)}{2(\gamma-1)},\tag{48}$$

$$B(t,x)=\alpha+\frac{(\gamma+1)\lambda z_x}{(\gamma-1)(w-z)}+\frac{\lambda S_0'(x)}{2(\gamma-1)},\tag{49}$$

$w_0(x)$、$z_0(x)$ 由(14) 给定, 而 λ、$\lambda_0(x)$ 分别由(13) 及(36) 给出. 取 ε 适当小, 注意到(14)、(22) 和(42), 由(48) 得

$$A(0,x)\geqslant\frac{\alpha}{2},\ B(0,x)\geqslant\frac{\alpha}{2},\qquad \forall x\in\mathbf{R}.\tag{50}$$

在 C^1 解存在区域上先验假设

$$A(t,x)\geqslant 0,\ B(t,x)\geqslant 0.\tag{51}$$

稍后将说明此先验假设的合理性.

注意到(51) 并利用极值原理[11] 知, 在 C^1 解的存在区域上成立

$$\min\left(\inf_{x\in\mathbf{R}}r_0(x),\inf_{x\in\mathbf{R}}s_0(x)\right)\leqslant r(t,x),\ s(t,x)\leqslant\max\left(\sup_{x\in\mathbf{R}}r_0(x),\sup_{x\in\mathbf{R}}s_0(x)\right).\tag{52}$$

又注意到(10)、(14)、(18) 和(42), 从(52) 可得

$$|r(t,x)|,\ |s(t,x)|\leqslant C_9\varepsilon.\tag{53}$$

利用(18c) 式, 从(47) 和(53) 可得

$$|\lambda w_x|,\ |\lambda z_x|\leqslant C_{10}\varepsilon.\tag{54}$$

另一方面, 由(22) 得

$$C_{11}\leqslant w-z\leqslant C_{12}.\tag{55}$$

因此,由(9)、(10)和(13)得

$$C_{13} \leqslant \lambda \leqslant C_{14}. \tag{56}$$

从而有

$$|w_x|,\ |z_x| \leqslant C_{15}\varepsilon \tag{57}$$

于是,由(9)、(10)可知

$$|u_x|,\ |v_x| \leqslant C_{16}\varepsilon.$$

最后指出:先验假设(51)是合理的.

利用(55)~(57)和(18c)式,从(48)、(49)易得

$$A(t,x),\ B(t,x) \geqslant \frac{3}{4}\alpha \geqslant 0. \tag{58}$$

由(50)和(58)知,先验假设(51)是合理的. 定理3.1证毕. □

由(22)、(26)和(28),得到:

引理3.1 在定理3.2的假设下,存在适当小的 $\varepsilon_0 > 0$ 使得对任意的 $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$,在 Cauchy 问题(1)、(2)的 C^1 解的存在区域上成立

$$M_1 \leqslant K_1(\rho) \leqslant M_2,\quad \alpha - M_3\varepsilon \leqslant K_2(x,v),\ K_4(x,v) \leqslant \alpha + M_3\varepsilon,$$
$$|K_3(x,v)|,\ |K_5(x,v)| \leqslant M_4\varepsilon,\quad 0 < g_1(t,x),\ g_2(t,x) \leqslant M_5,$$

其中 $M_i\,(i = 1,2,3,4,5)$ 表示不依赖于 (t,x) 和 ε 正常数. □

由(26)、(28)和(33),容易得到当 $\varepsilon \to 0^+$ 时

$$W_1, Z_1 \to -\frac{4\alpha}{3-\gamma}v_0^{(3-\gamma)/4} < 0,\quad W_2, Z_2 \to -\frac{8\alpha(\gamma-1)}{(3-\gamma)(\gamma+1)}v_0^{(3-\gamma)/4} < 0. \tag{59}$$

定理3.2的证明 类似于定理3.1的证明,只需在 C^1 解的存在区域上建立 Cauchy 问题(1)、(2)的 C^1 解的一致先验估计.

在当前情形下,(46)仍然成立. 另一方面,注意到(59),存在适当小的 $\varepsilon_0 > 0$ 使得对任意的 $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ 成立

$$\inf_{(t,x)\in D} W_2 < 0,\quad \inf_{(t,x)\in D} Z_2 < 0. \tag{60}$$

于是,由(29)、(34)和(44)、(45)知,(38)成立. 这样,注意到引理3.1和定理3.2的假设,易知引理2.1的假设全部满足. 利用引理2.1,容易得到 $(u(t,x), v(t,x))$ C^0 模的一致有界性. 定理3.2获证. □

4 解的破裂

定理4.1 在假设(H)下,如果(43)成立,且存在一点 $\beta \in \mathbf{R}$ 使得

$$w_0'(\beta) < -\frac{4\alpha}{3-\gamma}v_0(\beta) - \frac{2\lambda_0(\beta)S_0'(\beta)v_0(\beta)}{(3\gamma-1)(\gamma-1)} - \frac{4\alpha}{3-\gamma}(v_0(\beta))^{(\gamma+1)/4} \tag{61}$$

或者

$$z_0'(\beta) < -\frac{4\alpha}{3-\gamma}v_0(\beta) + \frac{2\lambda_0(\beta)S_0'(\beta)v_0(\beta)}{(3\gamma-1)(\gamma-1)} - \frac{4\alpha}{3-\gamma}(v_0(\beta))^{(\gamma+1)/4}, \tag{62}$$

则存在适当小的 $\varepsilon_0 > 0$ 使得对任意的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$,Cauchy 问题(1)、(2)的 C^1 解一定在有限时间内破裂. □

引理4.1 考虑 Cauchy 问题(32)、(34). 假设在 C^1 解的存在区域 D 上,$\|u\|_{C^0(D)}$,$\|v\|_{C^0(D)}$ 有界,且(31)和(37)成立. 如果存在一点 $\beta \in \mathbf{R}$ 使得

$$W_0(\beta) < \inf_{x \in D} W_1(t, x) \tag{63}$$

或者

$$Z_0(\beta) < \inf_{x \in D} Z_1(t, x), \tag{64}$$

则 Cauchy 问题(32)、(34)的解一定在有限时间内破裂• □

该引理直接由下述引理得到•

引理 4.2 考虑(40)• 假设 $k(t)$, $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 均为连续有界函数且满足引理 2.2• 如果

$$y_0 < \inf_t y_1(t),$$

则 Cauchy 问题(40)的解一定在有限时间内破裂• □

事实上, 不失一般性, 不妨假设(63)成立• 沿着过点 $(0, \beta)$ 的前向特征线 $x_+ = x_+(t, \beta)$(见(41)), 考察关于(32)式中第一个方程具有下述初值条件 $W(0) = W_0(\beta)$ 的初值问题• 注意到引理 4.1 的假设, 易知引理 4.2 可以应用到所考察的初值问题上, 从而得到引理 4.1 的结论•

定理 4.1 的证明 在定理 4.1 的假设下, 利用推论 1.1 易知, 引理 4.1 的条件全部满足• 利用引理 4.1 并注意到(35)式, 便得到定理 4.1• □

注意到引理 1.2, 利用定理 4.1 可得

定理 4.2 在假设(H)下, 如果(23)和(43)成立, 且存在常数 δ 和点 $\beta \in \mathbf{R}$ 使得

$$w_0'(\beta) < -\delta \text{ 或者 } z_0'(\beta) < -\delta,$$

则存在适当小的 $\varepsilon_0 > 0$ 使得对任意的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, Cauchy 问题(1)、(2)的 C^1 解一定在有限时间内破裂• □

证明 注意到(24)、(6)和(23), 有

$$(61) \text{ 的右端} \geqslant -C_{17}\varepsilon,$$

$$(62) \text{ 的右端} \geqslant -C_{18}\varepsilon\text{•}$$

取 ε_0 适当小, 使得

$$-\delta < \min\{-C_{17}, -C_{18}\}\varepsilon_0, \tag{65}$$

进而利用定理 4.1, 便得到定理 4.2• □

感谢 作者感谢李大潜院士的热情耐心指导•

[参 考 文 献]

[1] LIU Tai_ping. Development of singularities in the nonlinear wave for quasilinear partial differential equations[J]. J Differential Equations, 1979, **33**(2): 92—111.

[2] ZHAO Yan_chun. Global smooth solutions for one dimensional gas dynamics systems[R]. IMA Preprint # 545, University of Minnesuta, 1989.

[3] KONG De_xing. Cauchy Problem for Quasilinear Hyperbolic Systems [M]. MSJ Memoirs No 6. Tokyo: the Mathematical Society of Japan, 2000.

[4] KONG De_xing. Life_span of the classical solutions of nonlinear hyperbolic systems[J]. J Partial Differential Equations, 1996, **11**(2): 221—240.

[5] Nishida T. Nonlinear Hyperbolic Equations and Related Topics in Fluid Dynamics [M]. Paris_Sud: Publications Math matiq es D' osay 78_02, 1978.

[6] Slemrod M. Instability of steady shearing flows in a nonlinear viscolastic fluid[J]. Arch Rational

Mech Anal, 1978, **68**(3): 211—225.

[7] LIN Long_wei, ZHENG Yong_shu. Existence and nonexistence of global smooth solutions for quasilinear hyperbolic system[J]. Chinese Ann Math, Ser B, 1988, **9**(4): 372—377.

[8] 王剑华, 李才中. 具耗散拟线性双曲型方程组整体光滑可解性与奇性形成[J]. 数学年刊, A辑, 1988, **9**(5): 509—523.

[9] HSIAO Ling, Serre D. Global existence of solutions for the systems of compressible adiabatic flow through porous media[J]. SIAM J Math Anal, 1996, **27**(1): 70—77.

[10] 郑永树. 具耗散一维气体动力学方程组整体光滑解[J]. 数学年刊, A辑, 1996, **17**(2): 155—162.

[11] KONG De_xing. Maximum principles for quasilinear hyperbolic systems and its applications[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 1998, **32**(9): 871—880.

[12] LI Ta_tsien, YU Wen_ci. Boundary Value Problems for Quasilinear Hyperbolic Systems[M]. Mathematics Series V, Duke University Press, 1985.

Global Existence and Blow_up Phenomena of Classical Solutions for the System of Compressible Adiabatic Flow Through Porous Media

LIU Fa_gui[1], KONG De_xing[2]

(1. Department of Mathematics and Information Sciences, North China Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, Zhengzhou 450008, P.R.China;
2. Department of Applied Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P.R.China)

Abstract: By means of maximum principle for nonlinear hyperbolic systems, the results given by HSIAO Ling and D. Serre was improved for Cauchy problem of compressible adiabatic flow through porous media, and a complete result on the global existence and the blow_up phenomena of classical solutions of these systems. These results show that the dissipation is strong enough to preserve the smoothness of 'small' solution.

Key words: porous media; compressible adiabatic flow; system of equations; classical solution; global existence; blow_up