应用数学和力学，第11卷第3期(1990年3月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

奇异摄动问题的一致收敛离散方法解的一致高阶精度外推*

孙光甫

(福州大学计算机科学系，1989年10月7日收到)

摘　　要

本文讨论基于整体误差一致展开式的一致收敛离散方法解的一致高阶精度外推．将该方法应用于非自共轭问题的 Il'in-Allen-Southwell 格式，我们得到了二阶一致收敛的外推解，并用数值计算说明该结论．

一、引　　言

众所周知，Richardson 外推技巧是获得初边值问题高阶近似解的方法之一．然而，由于解的复杂的边界层性质，使该技巧应用于奇异摄动问题的一致收敛离散方法更加困难[1],[2],[3]．本文将应用不同于[1],[2],[3]中的方法来处理这一问题．我们首先建立离散方法整体误差的一致展开式，再根据展开式构造一致高阶精度的外推解，该外推解含有与摄动参数有关的权因子．

为说明该方法的应用，我们将考虑非自共轭问题 $\varepsilon u''(x)+au'(x)-b(x)u(x)=f(x)$，$0<x<1$，$u(0)$，$u(1)$给定，$\varepsilon\in(0,\ 1]$，$a>0$，$b(x)\geqslant0$的 Il'in-Allen-Southwell 格式．我们知道该格式是$O(h)$一致收敛．我们将证明由该格式整体误差展开式推出的外推解 $\bar{u}^h(x)$为$O(h^2)$一致收敛，这改进了文[2]中的结果，那里估计式为$|\bar{u}^h(x)-u(x)|\leqslant M(\delta,\ \gamma)h^{2-\gamma}$，当$x>\delta$时，其中$\delta$，$\gamma$是区间$(0,\ 1)$中的任意常数，$M$不依赖于$h$和$\varepsilon$．

我们将给出数值计算证实理论结果．

二、整体误差一致展开式

我们考虑奇异摄动两点边值问题

$$\begin{cases}L_\varepsilon u(x,\ \varepsilon)=f(x,\ \varepsilon) \qquad (x\in(0,1)) & (2.1)\\ u(0,\ \varepsilon)=\beta_0,\ u(1,\ \varepsilon)=\beta_1 & (2.2)\end{cases}$$

及离散格式

* 林宗池推荐．国家自然科学基金资助项目．

$$\begin{cases}L_\varepsilon^h u^h(x,\ \varepsilon)=f^h(x,\ \varepsilon) \qquad (x\in(0,\ 1)^h) & (2.3)\\ u^h(0,\ \varepsilon)=\beta_0,\ u^h(1,\ \varepsilon)=\beta_1 & (2.4)\end{cases}$$

这里 L_ε和L_ε^h分别为线性微分和差分算子，$\varepsilon\in(0,1]$是奇异摄动参数，$(0,1)^h$表示区间$(0,1)$以h为步长的均匀网格，$f^h(x,\ \varepsilon)=f(x,\ \varepsilon)$，当$x\in(0,\ 1)^h$时。

全文中，我们将用c（有时有下标）表示与ε，h及x无关的一般正常数。$f\in C^k[0,\ 1]$表示函数$f(x,\ \varepsilon)$对任一小参数ε，关于$x\in[0,\ 1]$ k阶连续可导。

我们假定

(A). 对任何函数$f\in C^k[0,\ 1]$，问题(2.1),(2.2)有唯一解 $u\in C^k[0,\ 1]$，这里k为一正整数。

(B). 如果$f^h(x,\ \varepsilon)$是$(0,\ 1)^h$上的网格函数，则格式(2.3)，(2.4)有唯一解$u^h(x,\ \varepsilon)$。进一步，当

$$\|f^h\|\leqslant c\left[1+\sum_{j=1}^{J}M_j(h,\ \varepsilon)\|\psi_j^h\|\right]$$

时，有

$$\|u^h\|\leqslant c\left[1+\sum_{j=1}^{J}\widetilde{M}_j(h,\ \varepsilon)\|\psi_j^h\|\right].$$

这里 $M_j(h,\ \varepsilon)$及$\widetilde{M}_j(h,\ \varepsilon)(j=1,2,\cdots,J)$是$h$和$\varepsilon$的非负函数，$\psi_j(x,\ \varepsilon)(j=1,\ 2,\ \cdots,\ J)$是特定的边界层函数，$\psi_j^h(x,\ \varepsilon)=\psi_j(x,\ \varepsilon)(x\in(0,\ 1)^h)$。

我们知道问题(2.1)，(2.2)的解的边界层性态与$f(x,\ \varepsilon)$的性质有关。为方便起见，我们定义下面的正则函数类

$$R^k[0,\ 1]=\{f(x,\ \varepsilon)\,|\,f\in C^k[0,\ 1],\ |D_x^i f(x,\ \varepsilon)|\leqslant c,\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ k\}$$

及奇异函数类

$$S_j^k[0,1]=\{f(x,\varepsilon)\,|\,f\in C^k[0,\ 1],\,|D_x^i f(x,\varepsilon)|\leqslant c[1+\varepsilon^{-\lambda_{ji}}\psi_j(x,\varepsilon)],i=0,1,\cdots,\ k\}$$

这里$\lambda_{ji}>0$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ k)$与$\psi_j(x,\ \varepsilon)$有关

对局部误差的一致展开式，我们假定

(C). 设$u(x,\ \varepsilon)$是问题(2.1)，(2.2)的解，而$u^h(x,\ \varepsilon)$是格式(2.3)，(2.4)的解，则

(1). 当$f\in R^k[0,\ 1]$时，则对$x\in(0,\ 1)^h$有

$$L_\varepsilon^h u(x,\ \varepsilon)=L_\varepsilon^h u^h(x,\ \varepsilon)+p(x,\ \varepsilon)\gamma(h,\ \varepsilon)h^n+\sum_{j=1}^{J}q_j(x,\ \varepsilon)\delta_j(h,\ \varepsilon)h^n+R_u^h(x,\ \varepsilon) \tag{2.5}$$

其中 $p\in R^k[0,\ 1]$，$q_j\in S^k[0,\ 1]$与h无关，$\gamma(h,\varepsilon)$，$\delta_j(h,\ \varepsilon)$仅与$h$，$\varepsilon$有关且以$c$为界，又

$$\|R^h\|\leqslant ch^{n+m}\left[1+\sum_{j=1}^{J}M_j(h,\ \varepsilon)\|\psi_j^h\|\right].$$

(2). 若$f\in S^k[0,\ 1]$，则对$x\in(0,\ 1)^h$有

$$L_\varepsilon^h u(x,\ \varepsilon)=L_\varepsilon^h u^h(x,\ \varepsilon)+R_s^h(x,\ \varepsilon) \tag{2.6}$$

这里

$$\|R^h\|\leqslant ch^n\left[1+\sum_{j=1}^{J}M_j(h,\ \varepsilon)\|\psi_j^h\|\right]$$

我们有如下的整体误差一致展开式

定理2.1　若$u(x,\ \varepsilon)$及$u^h(x,\ \varepsilon)$分别为问题(2.1)，(2.2)及格式(2.3)，(2.4)的解，且条件(A)，(B)，(C)成立．则对$x\in(0,\ 1)^h$有

$$u^h(x,\ \varepsilon)=u(x,\ \varepsilon)+\xi(x,\ \varepsilon)\gamma(h,\ \varepsilon)h^n+\sum_{j=1}^{J}\eta_j(x,\ \varepsilon)\delta_j(h,\ \varepsilon)h^n+B^h(x,\ \varepsilon) \tag{2.7}$$

其中　ξ，$\eta_j\in C^k[0,\ 1]$与h无关

$$\|B^h\|\leqslant ch^N\left[1+\sum_{j=1}^{J}\widetilde{M}_j(h,\ \varepsilon)\|\psi_j^h\|\right]\qquad (N=\min(n+m,\ 2n))$$

证明　由条件(A)，对p，$q_j\in C^k[0,\ 1]$，我们有ξ，$\eta_j\in C^k[0,\ 1]$，分别满足

$$\begin{cases}L_\varepsilon\xi(x,\ \varepsilon)=-p(x,\ \varepsilon) & (x\in(0,1))\\ \xi(0,\ \varepsilon)=\xi(1,\ \varepsilon)=0\end{cases} \tag{2.8}$$

及

$$\begin{cases}L_\varepsilon\eta_j(x,\ \varepsilon)=-q_j(x,\ \varepsilon) & (x\in(0,\ 1))\\ \eta_j(0,\ \varepsilon)=\eta_j(1,\ \varepsilon)=0\end{cases} \tag*{(2.9)$_j$}$$

令

$$B^h(x,\varepsilon)=u^h(x,\varepsilon)-u(x,\varepsilon)-\xi(x,\varepsilon)\gamma(h,\varepsilon)h^n-\sum_{j=1}^{J}\eta_j(x,\ \varepsilon)\delta_j(h,\ \varepsilon)h^n\qquad (x\in(0,1)^h)$$

利用条件(C)及(2.8)，(2.9)$_j$，

$$L_\varepsilon^hB^h(x,\varepsilon)=-R_u^h(x,\varepsilon)-R_\xi^h(x,\varepsilon)\gamma(h,\varepsilon)h^n+\sum_{j=1}^{J}R_{\eta_j}^h(x,\varepsilon)\delta_j(h,\varepsilon)h^n\qquad (x\in(0,1)^h)$$

因此

$$\begin{aligned}\|L_\varepsilon^hB^h\|&\leqslant c_1h^{n+m}\left[1+\sum_{j=1}^{J}M_j(h,\varepsilon)\|\psi_j^h\|\right]+c_2h^{2n}\left[1+\sum_{j=1}^{J}M_j(h,\varepsilon)\|\psi_j^h\|\right]\\&\quad+c_3Jh^{2n}\left[1+\sum_{j=1}^{J}M_j(h,\varepsilon)\|\psi_j^h\|\right]\\&\leqslant ch^N\left[1+\sum_{j=1}^{J}M_j(h,\ \varepsilon)\|\psi_j^h\|\right]\end{aligned} \tag{2.10}$$

显然　$B^h(0,\ \varepsilon)=B^h(1,\ \varepsilon)=0$ 　(2.11)

因此，由条件(B)

$$\|B^k\| \leqslant ch^N\left[1+\sum_{j=1}^{J}\widetilde{M}_j(h,\ \varepsilon)\|\psi_j^h\|\right] \qquad \text{Q.E.D.}$$

由展开式(2.7)，我们可以推导出一致高阶收敛于问题(2.1)，(2.2)的解的外推解。

注 本节中，如用 $|y^h(x,\ \varepsilon)|$ $(x\in(0,\ 1)^h)$ 代替 $\|y^h\|$，结论仍然成立。

三、Il'in-Allen-Southwell 格式的外推

本节我们将第二节的结论应用于非自共轭问题

$$\begin{cases} L_\varepsilon u(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon D_x^2 u + a(x,\varepsilon)D_x u - b(x,\varepsilon)u = f(x,\varepsilon) \qquad (0<x<1) & (3.1)\\ u(0,\ \varepsilon)=\beta_0,\ u(1,\ \varepsilon)=\beta_1 & (3.2)\end{cases}$$

其中 $a,\ b,\ f\in R^k[0,\ 1]$，$a(x,\ \varepsilon)>\alpha>0$，$b(x,\ \varepsilon)\geqslant 0$。对 $x\in[0,\ 1]$。

我们知道问题(3.1)，(3.2)满足条件(A)且有如下渐近性态

(1). 若 $f\in S^k[0,\ 1]$，则[4]

$$u(x,\ \varepsilon)=\delta_1 v(x,\ \varepsilon)+z_1(x,\ \varepsilon) \qquad (3.3)$$

(2). 若 $f\in R^k[0,\ 1]$，则[5]

$$u(x,\ \varepsilon)=A(x,\ \varepsilon)+G(x,\ \varepsilon)+\varepsilon R(x,\ \varepsilon) \qquad (3.4)$$

其中 $A\in R^k[0,\ 1]$；$G(x,\ \varepsilon)=c_0 W(x,\ \varepsilon)E(x,\varepsilon)$；$R(x,\varepsilon)=\delta_2 v(x,\varepsilon)+z_2(x,\ \varepsilon)$；$|c_0|$，$|\delta_1|$，$|\delta_2|\leqslant c$ 为常数，且

$$W(x,\ \varepsilon)=\frac{1}{a(x,\ \varepsilon)}\exp\left[-\int_0^x\frac{b(s,\ \varepsilon)}{a(s,\ \varepsilon)}ds\right]$$

$$E(x,\ \varepsilon)=\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(s,\ \varepsilon)ds\right]$$

$$v(x,\ \varepsilon)=\exp[-a(0,\ \varepsilon)x/\varepsilon]$$

$$|D_x^i z_j(x,\ \varepsilon)|\leqslant c[1+\varepsilon^{-i+1}\exp(-\alpha x/\varepsilon)] \qquad (i=0,\ 1,\cdots,k;\ j=1,2)$$

问题(3.1)，(3.2)仅在 $x=0$ 有一个边界层。令 $\psi(x,\ \varepsilon)=\exp(-\alpha x/\varepsilon)$。奇异函数类可定义为

$$S^k[0,1]=\{f(x,\varepsilon)\,|\,f\in C^k[0,1],\ |D_x^i f(x,\varepsilon)|\leqslant c[1+\varepsilon^{-i}\psi(x,\varepsilon)],\ i=0,1,\cdots,k\}.$$

现在我们考虑 Il'in-Allen-Southwell 格式

$$\begin{cases} L_\varepsilon^h u^h(x,\varepsilon)\equiv\varepsilon\sigma(\rho)D_+D_-u^h(x,\varepsilon)+a(x,\varepsilon)D_0u^h(x,\varepsilon)-b(x,\varepsilon)u^h(x,\varepsilon)\\ \qquad =f^h(x,\varepsilon) \qquad (x\in(0,1)^h) & (3.5)\\ u^h(0,\ \varepsilon)=\beta_0, \qquad u^h(1,\ \varepsilon)=\beta_1 & (3.6)\end{cases}$$

这里 $\sigma(\rho)=(\rho/2)\coth(\rho/2)$，$\rho=a(x,\ \varepsilon)h/\varepsilon$。

引理3.1 [4],[6]，若 $u^h(x,\ \varepsilon)$ 是格式(3.5)，(3.6)的解，且

$$|f^h(x,\ \varepsilon)|\leqslant c[1+M(h,\ \varepsilon)\psi^h(x,\ \varepsilon)] \qquad (x\in(0,\ 1)^h)$$

则

$$|u^h(x,\ \varepsilon)|\leqslant c[1+\widetilde{M}(h,\ \varepsilon)\psi^h(x,\ \varepsilon)] \qquad (x\in(0,\ 1)^h)$$

其中 $M(x,\ \varepsilon)=\exp(\alpha h/\varepsilon)/\max(h,\ \varepsilon)$，$\widetilde{M}(h,\ \varepsilon)=\exp(\alpha h/\varepsilon)$。因此格式(3.5)，(3.6)满足条件(B)。

至于格式(3.5)，(3.6)的局部误差，我们知道

引理3.2[4],[6] 若 $u(x,\varepsilon)$是(3.1)，(3.2)的解，$u^h(x,\varepsilon)$ 是 (3.5)，(3.6) 的解，且 $f\in S^h[0,1]$，则

$$L_\varepsilon^h u(x,\varepsilon)=L_\varepsilon^h u^h(x,\varepsilon)+R^h(x,\varepsilon) \qquad (x\in(0,1)^h)$$

其中

$$|R^h(x,\varepsilon)|\leqslant ch[1+M(h,\varepsilon)\psi^h(x,\varepsilon)] \qquad (x\in(0,1)^h)$$

类似[7]的证明，我们可以得到

引理3.3 若$f\in R^k[0,1]$，则

$$L_\varepsilon^h u(x,\varepsilon)=L_\varepsilon^h u^h(x,\varepsilon)+p(x,\varepsilon)\gamma(h,\varepsilon)h+q(x,\varepsilon)\delta(h,\varepsilon)h+R^h(x,\varepsilon) \qquad (x\in(0,1)^h)$$

这里 $p(x,\varepsilon)=D_x^2A(x,\varepsilon)$，$q(x,\varepsilon)=D_xa(x,\varepsilon)W(x,\varepsilon)E(x,\varepsilon)\varepsilon^{-1}$，$\gamma(h,\varepsilon)=\delta(h,\varepsilon)=[\sigma(\rho)-1]\varepsilon/h$及

$$|R^h(x,\varepsilon)|\leqslant ch^2[1+M(h,\varepsilon)\psi^h(x,\varepsilon)] \qquad (x\in(0,1))^h)$$

我们假定$a(x,\varepsilon)\equiv$const。则

$$L_\varepsilon^h u(x,\varepsilon)=L_\varepsilon^h u^h(x,\varepsilon)+p(x,\varepsilon)\gamma(h,\varepsilon)h+R^h(x,\varepsilon) \qquad (x\in(0,1)^h)$$

显然，条件(C)满足，具$n=m=1$.由上述论述中，我们知道问题(3.1)，(3.2)和格式(3.5)，(3.6)满足条件(A)，(B)，(C)。利用定理2.1

$$u^h(x,\varepsilon)=u(x,\varepsilon)+\xi(x,\varepsilon)\varepsilon[\sigma(\rho)-1]+B^h(x,\varepsilon) \qquad (x\in(0,1)^h)$$

其中

$$|B^h(x,\varepsilon)|\leqslant ch^2[1+\widetilde{M}(h,\varepsilon)\psi^h(x,\varepsilon)]\leqslant ch^2 \qquad (x\in(0,1)^h)$$

令

$$\varDelta_1=\frac{\sigma(\rho/2)-1}{\sigma(\rho/2)-\sigma(\rho)},\quad \varDelta_2=\frac{\sigma(\rho)-1}{\sigma(\rho/2)-\sigma(\rho)}$$

及

$$\bar{u}^h(x,\varepsilon)=\varDelta_1u^h(x,\varepsilon)-\varDelta_2u^{h/2}(x,\varepsilon) \tag{3.7}$$

我们有

$$\bar{u}^h(x,\varepsilon)=u(x,\varepsilon)+\varDelta_1B^h(x,\varepsilon)-\varDelta_2B^{h/2}(x,\varepsilon) \qquad (x\in(0,1)^h)$$

注意到$|\varDelta_1|+|\varDelta|_2\leqslant c$，我们得到

定理3.1：若 $u(x,\varepsilon)$及$u^h(x,\varepsilon)$分别是(3.1)，(3.2)及(3.5)，(3.6)的解，且 $a(x,t)\equiv$const，则

$$|\bar{u}^h(x,\varepsilon)-u(x,\varepsilon)|\leqslant ch^2 \qquad (x\in(0,1)^h)$$

这表明格式(3.5)，(3.6)的外推解$\bar{u}(x,\varepsilon)$二阶一致收敛于问题(3.1)，(3.2)的解。

四、数 值 实 验

我们给出 Il'in-Allen-Southwell 格式及其外推解的数值结果。问题为

$$\begin{cases}\varepsilon D_x^2u(x,\varepsilon)+8D_xu(x,\varepsilon)=(\varepsilon+8)\exp(x)+64(x+1)+8\varepsilon \qquad (x\in(0,1))\\ u(0,\varepsilon)=6,\ u(1,\varepsilon)=\exp(1-8/\varepsilon)+16\end{cases}$$

在表1中，$E_\infty^{(i)}=\max\limits_{\varepsilon\in E}\cdot\max\limits_{x\in(0,1)^h}|u(x,\varepsilon)-u^{(i)}(x,\varepsilon)|$，

其中 $u^{(i)}(x,\varepsilon)(i=1,2,3)$分别表示$u^h(x,\varepsilon)$，$u^{h/2}(x,\varepsilon)$及$\bar{u}^h(x,\varepsilon)$，$E=\{1,h^{0.5},h,h^{1.5},h^2\}$。

结果表明外推解的收敛阶与理论分析基本相符。

表 1

	$E_{\infty}^{(1)}$	$E_{\infty}^{(2)}$	$E_{\infty}^{(3)}$
$h=1/16$	5.30D—01	2.64D—01	1.01D—03
$h=1/32$	2.84D—01	1.42D—01	2.65D—04
$h=1/64$	1.47D—01	7.34D—02	6.71D—05
$h=1/128$	7.47D—02	3.73D—02	1.64D—05
$h=1/256$	3.77D—02	1.88D—02	3.57D—06

参 考 文 献

[1] Doolan, E. P., J. J. H. Miller and W. H. A. Schilders, *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers*, Boole Press, Dublin (1980).

[2] Podkorytov, E. M., An extrapolation method for raising the accuracy of approximate solutions for the equation $\varepsilon y''(x)+by'(x)-c(x)y(x)=f(x)$, *Differential Equations with a Small Parameter*, Akad. Nauk SSSR, Ural. Nauchn. Tsentr., Sverdlovsk (1980).

[3] 苏煜城，外推法对奇异摄动问题数值解的应用，应用数学和力学，6，4 (1985)，289—302.

[4] Kellogg, R. B. and A. Tsan, Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problem without turning points, *Math.*, 32 (1978), 1025—1039.

[5] Smith, D. R., The Multivariable method in singular perturbation analysis, *SIAM Rev.*, 17 (1975), 221-273.

[6] 林鹏程、孙光甫，奇异摄动问题的一类非完全指数拟合差分格式，应用数学和力学，8，12 (1987)，1065—1074.

[7] Berger, A. E., J. M. Solomon, and M. Ciment, An analysis of a uniformly accurate difference method for a singular perturbation problem, *Math. Comp.*, 37 (1981), 79—94.

Uniformly Higher Order Accurate Extrapolations to Solution of Uniformly Convergent Discretization Methods for Singularly Perturbed Problems

Sun Guang-fu

(Department of Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou)

Adstract

We discuss the uniformly higher order accurate extrapolations, which are based on the uniform expansion for global error, to solutions of uniformly convergent discretization methods for singularly perturbed problems. By applying the approach to the Il'in-Allen-Southwell scheme for a non-self-adjoint problem, we obtain an extrapolation solution which is uniformly convergent with order two. We confirm the result by numerical calculations.