

底部形状对圆柱形港池中驻波的影响

马云丽 李家春

(中国科学院力学研究所, 1988年10月31日收到)

摘 要

本文用摄动法讨论了具有不规则底部的圆柱形港池中的驻波。假设流体是无粘性、不可压、无旋的。为方便起见, 采用柱坐标系。速度势、波形以及频率均以相应于振幅的小参数进行摄动展开, 获得了轴对称波驻的分析解。当 $\omega_1=0$ 时, 算出了二阶频率。作为一个算例, 取圆柱体底部为一轴对称抛物面, 算出这种不规则底部对驻波产生的影响。最后, 对几何因素的影响进行了详细的讨论。

一、引 言

从50年代起, 人们开始研究非线性驻波。直到60年代, Tadjbakhsh 和 Keller^[1]使用 Keller-Ting 方法解决了二维驻波, 得到三阶近似解。与此同时, Mark^[2]算出了轴对称解。在某些临界深度, Keller 的解不唯一。最近, Vanden-Broeck^[3]解决了临界深度的疑难。李家春^[4]研究了几何形状的不规则性对水体振荡的影响, 他还进一步详细讨论了几何因素与非线性效应耦合的影响^[5], 并且导出一些很有用的结论。

本文研究的是不规则底部对波形的影响, 对水体振荡的影响。实际上, 湖泊、港湾的底部是不平坦的, 所以, 从理论上和实际上研究非均匀底部的影响是十分重要的。

二、基本方程与边界条件

我们首先研究底面略偏离水平面的圆柱形水体的固有振荡, 这些结果可推广到研究任意形状水体的不规则底部对驻波的影响。

假设流体是无粘性、不可压缩的, 其运动是无旋的。在本文中暂且不考虑非线性效应, 也就是 $\epsilon \ll \delta$, 其中 ϵ 和 δ 分别代表同振幅及几何形状有关的小参数。假若水体的几何形状接近圆柱形, 我们选取 r 为径向, θ 为方位角的柱坐标系, z 轴垂直向上, 原点取在未扰动时自由面的位置。如图1。

方程 $z = -h + \delta \cdot f(r, \theta)$ 描述底部不规则形状。 $-h$ 是平均深度, δ 是个小参数, $f(r, \theta)$ 是描述底部对水平偏离的分布函数。

在上述假设下, 速度势 ϕ 满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.1)$$

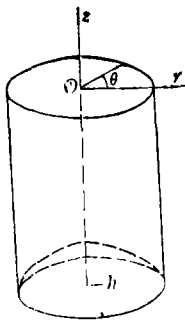


图 1

如果水波自由面的形状为 $z=\eta(r,\theta,t)$, 那么, 在该自由面上要满足运动学与动力学条件, 线性化以后, 可以表示为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \omega \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \omega \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta &= 0 \end{aligned} \right\} z=0 \quad (2.2)$$

$$\omega \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad (2.3)$$

底部与侧壁边界条件为:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad z = -h + \delta f(r, \theta) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad r = a \quad (2.5)$$

为方便起见, 将上述方程中的变量无量纲化.

$$r = K^{-1}r', \quad z = K^{-1}z', \quad \eta = \epsilon K^{-1}\eta', \quad t = (Kg)^{-\frac{1}{2}}t'$$

$$\omega = (Kg)^{\frac{1}{2}}\omega', \quad \phi = \epsilon g^{\frac{1}{2}}K^{-3/2}\phi', \quad P = \rho g K^{-1}P'$$

再令 $t'' = (\omega')^{-1}t'$, 为方便计, 略去所有无量纲量的上标, 得如下方程及边界条件为:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.1)'$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \omega \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \omega \frac{\partial \phi}{\partial t} + \eta &= 0 \end{aligned} \right\} z=0 \quad (2.2)'$$

$$\omega \frac{\partial \phi}{\partial t} + \eta = 0 \quad (2.3)'$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad z = -h + \delta f(r, \theta) \quad (2.4)'$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad r = a \quad (2.5)'$$

其中 η 为波高, ϕ 是速度势, ω 圆频率, P 为压力, ρ 为水的密度, g 是重力加速度, ϵ 为波的斜度.

如果 $\epsilon \ll \delta \ll 1$, 我们可对 ϕ , η , ω 以 δ 为小参数进行摄动展开:

$$\phi = \phi_0 + \delta \phi_1 + \delta^2 \phi_2 + \dots, \quad \eta = \eta_0 + \delta \eta_1 + \delta^2 \eta_2 + \dots, \quad \omega = \omega_0 + \delta \omega_1 + \delta^2 \omega_2 + \dots \quad (2.6)$$

对于本问题, 如何描述底部边界条件是问题的关键. 在非均匀底部

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\epsilon f_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\epsilon f_\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial z}}{\sqrt{1 + \epsilon^2 f_r^2 + \epsilon^2 f_\theta^2 / r^2}} \quad (2.7)$$

将(2.6), (2.7)代入方程(2.4)中, 展开并合并 δ 的同阶项, 得在边界 $z=-h$ 处各阶方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_0}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= \phi_{0r} f_r + \frac{1}{r^2} \phi_{0\theta} f_\theta - \phi_{0zz} f \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial z} &= \frac{1}{2} \phi_{0z} (f_r^2 + \frac{1}{r^2} f_\theta^2) + \phi_{0rz} f f_r + \frac{1}{r^2} \phi_{0z\theta} f f_\theta \\ &\quad - \frac{1}{2} \phi_{0zzz} f^2 + \phi_{1rz} f_r + \frac{1}{r^2} \phi_{1z\theta} f_\theta - \phi_{1zz} f \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

三、摄动解

零级近似方程与边界条件为

$$\nabla^2 \phi_0 = 0 \quad (3.1)$$

$$\phi_{0z} = 0 \quad z = -h \quad (3.2)$$

$$\phi_{0r} = 0 \quad r = a \quad (3.3)$$

$$\phi_{0z} + \omega_0^2 \phi_{0zz} = 0 \quad z = 0 \quad (3.4)$$

这就是圆柱形水体的固有线性振荡。若考虑轴对称问题，定解条件与 θ 无关，其解为

$$\phi_0^{(m)} = \frac{\omega_0^{(m)}}{K^{(m)} \operatorname{sh} K^{(m)} h} J_0(K^{(m)} r) \operatorname{ch} K^{(m)}(z+h) \cos t \quad (3.5)$$

$$\eta_0^{(m)} = J_0(K^{(m)} r) \sin t \quad (3.6)$$

以及色散关系

$$\omega_0^{(m)2} = K^{(m)} \operatorname{th} K^{(m)} h \quad (3.7)$$

其中 $J_0(x)$ 为 Bessel 函数， m 表示不同的模式，若 $z^{(m)}$ 为 $J_0^{(1)}(x)$ 的第 m 个零点的值，取 $K^{(1)} = 1$ ， $a = z^{(1)} = 3.83$ ，则 $K^{(m)} = z^{(m)} / z^{(1)}$ ，于是，侧壁条件便可得到满足。

在本文中，我们只考虑基波的扰动，即只讨论 $m=1$ 的情况，于是

$$\phi_0^{(1)} = \frac{\omega_0^{(1)}}{\operatorname{sh} h} J_0(r) \operatorname{ch}(z+h) \cos t \quad (3.8)$$

$$\eta_0^{(1)} = J_0(r) \sin t \quad (3.9)$$

以及

$$\omega_0^{(1)2} = \operatorname{th} h \quad (3.10)$$

为书写方便，以后将 $m=1$ 模式的上标(1)略去。

一阶解所满足的方程及边界条件为

$$\nabla^2 \phi_1 = 0 \quad (3.11)$$

$$\phi_{1z} = f_r \phi_{0r} - \phi_{0zz} f = B_1(r) \cos t \quad z = -h \quad (3.12)$$

$$\phi_{1r} = 0 \quad r = a \quad (3.13)$$

$$\phi_{1z} + \omega_0^2 \phi_{1zz} = -2\omega_0 \omega_1 \phi_{0zt} = S_1(r) \cos t \quad z = 0 \quad (3.14)$$

其中

$$B_1(r) = \frac{\omega_0}{\operatorname{sh} h} [f_r J_0'(r) - f J_0(r)] \quad (3.15)$$

$$S_1(r) = 2\omega_1 J_0(r) \quad (3.16)$$

我们将 ϕ_1 分解成两部分， $\bar{\phi}_1$ 和 N_1 ，则 $\phi_1 = \bar{\phi}_1 + N_1$ ，其中 N_1 必须满足 Laplace 方程 $\nabla^2 N_1 = 0$ ，及边界条件

$$\left. \frac{\partial N_1}{\partial r} \right|_{r=a} = 0, \quad \left. \frac{\partial N_1}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$$

因此

$$N_1 = \sum_{m=1}^{\infty} C_1^{(m)} \operatorname{ch} K^{(m)} z J_0(K^{(m)} r) \cos t \quad (3.17)$$

在 $z = -h$ 边界上 N_1 要满足非齐次条件

$$\frac{\partial N_1}{\partial z} = B_1(r) \cos t$$

由此容易确定 $C_1^{(m)}$ 为

$$C_1^{(1)} = \frac{2}{a^2 \operatorname{sh} h J_0^2(a)} \int_0^a r J_0(r) B_1(r) dr \quad (3.18)$$

$$C_1^{(m)} = \frac{2}{a^2 K^{(m)} \operatorname{sh} K^{(m)} h J_0^2(K^{(m)} a)} \int_0^a r J_0(K^{(m)} r) B_1(r) dr \quad (3.19)$$

至于 $\bar{\phi}_1$, 定解问题的提法为

$$\nabla^2 \bar{\phi}_1 = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial r} = 0 \quad r = a \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial z} = 0 \quad z = -h \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial z} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_1}{\partial t^2} = Q_1(r) \cos t \quad z = 0 \quad (3.23)$$

其中

$$Q_1(r) = S_1(r) + \omega_0^2 U_1(r) \quad (3.24)$$

而

$$U_1(r) = \sum_{m=1}^{\infty} C_1^{(m)} J_0(K^{(m)} r) \quad (3.25)$$

若令

$$\bar{\phi}_1 = \sum_{m=1}^{\infty} A_1^{(m)}(t) J_0(K^{(m)} r) \operatorname{ch} K^{(m)}(z+h) \quad (3.26)$$

代(3.26)入(3.23)中, 得

$$\omega_0^2 \operatorname{ch} K^{(m)} h A_1^{(m)''} + K^{(m)} \operatorname{sh} K^{(m)} h A_1^{(m)} = q_{1c}^{(m)} \quad (3.27)$$

其中

$$q_{1c}^{(1)} = \frac{2}{a^2 J_0^2(a)} \int_0^a r J_0(r) Q_1(r) dr \quad (3.28)$$

$$q_{1c}^{(m)} = \omega_0^2 C_1^{(m)} \quad (3.29)$$

为了消除长期项, 令 $q_{1c}^{(1)} = 0$, 于是得

$$2\omega_1 + \omega_0^2 C_1^{(1)} = 0 \quad (3.30)$$

即

$$\omega_1 = -\frac{\omega_0^2}{a^2 \operatorname{sh} h J_0^2(a)} \int_0^a r J_0(r) B_1(r) dr \quad (3.31)$$

而

$$A_1^{(m)}(t) = a_1^{(m)} \cos t \quad (3.32)$$

其中

$$a_1^{(m)} = \frac{\omega_0^2 C_1^{(m)}}{(\omega_0^{(m)2} - \omega_0^2) \operatorname{ch} K^{(m)} h} \quad (3.33)$$

最后, 得一阶解

$$\begin{aligned} \phi_1 = & p_1 t + q_1 + (e_1 \cos t + s_1 \sin t) J_0(r) \operatorname{ch}(z+h) \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} a_1^{(m)} J_0(K^{(m)} r) \operatorname{ch} K^{(m)}(z+h) \cos t + \sum_{m=2}^{\infty} C_1^{(m)} J_0(K^{(m)} r) \operatorname{ch} K^{(m)} z \cos t \end{aligned} \quad (3.34)$$

其中 p_1 , q_1 , e_1 和 s_1 都是未定常数. 将(3.34)和(3.8)式代入

$$\eta_1 = -\omega_1 \frac{\partial \phi_0}{\partial t} - \omega_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \quad (3.35)$$

得

$$\begin{aligned} \eta_1 = & -\omega_0 p_1 + \left[\left(\frac{\omega_1}{\operatorname{sh} h} + e_1 \right) \sin t - s_1 \cos t \right] \omega_0 J_0(r) \operatorname{ch}(z+h) \\ & - \sum_{m=2}^{\infty} a_1^{(m)} J_0(K^{(m)} r) \operatorname{ch} K^{(m)}(z+h) \sin t - \sum_{m=2}^{\infty} C_1^{(m)} J_0(K^{(m)} r) \operatorname{ch} K^{(m)} z \sin t \end{aligned} \quad (3.36)$$

由于 q_1 无关紧要, 可取 $q_1 = 0$. 选择适当的时间相位, 使 $s_1 = 0$. 再由质量守恒, 平均水面应为零 ($z=0$), 零阶解已满足, 故

$$\int_0^a r \eta_1 dr = 0 \quad (3.37)$$

由此导出

$$p_1 = 0 \quad (3.38)$$

再由振幅的限制, 要求

$$\int_{-h}^0 dz \int_0^a r J_0(r) dr \int_0^{2\pi} dt \cos t \phi(r, z, t) = \pi^2 a^2 J_0^2(a) \operatorname{th}^{\frac{1}{2}} h \quad (3.39)$$

也就是

$$\int_{-h}^0 dz \int_0^a r J_0(r) dr \int_0^{2\pi} dt \sin t \phi_1 = 0 \quad (3.40)$$

得 $e_1 = -C_1^{(1)}$, 于是所有常数均已被确定, 因而导出一阶势

$$\phi_1 = C_1^{(1)} J_0(r) [\operatorname{ch} z - \operatorname{ch}(z+h)] \cos t + \sum_{m=2}^{\infty} a_1^{(m)} J_0(K^{(m)} r) \operatorname{ch} K^{(m)}(z+h) \cos t$$

$$+ \sum_{m=2}^{\infty} C_1^{(m)} J_0(K^{(m)}r) \operatorname{ch} K^{(m)}z \cos t \quad (3.41)$$

其中系数 $a_1^{(m)}$, $C_1^{(m)}$ 由(3.18), (3.19)和(3.33)给定. 波高为

$$\eta = \left(J_0(r) + \delta \left\{ \frac{\omega_1}{\omega_0} J_0(r) + \omega_0 [C_1^{(1)} J_0(r) (1 - \operatorname{ch} h) + \sum_{m=2}^{\infty} a_1^{(m)} J_0(K^{(m)}r) \operatorname{ch} K^{(m)}h + \sum_{m=2}^{\infty} C_1^{(m)} J_0(K^{(m)}r)] \right\} \right) \sin t \quad (3.42)$$

驻波节点的位置为

$$r_m = r_{0n} + \delta r_{1n} \quad (3.43)$$

这里 $r_{0n} = 2.4048$, 是当 $J_0(r) = 0$ 时, $J_0(r)$ 的零点.

而

$$r_{1n} = - \frac{\omega_0}{J_0'(r_0)} \sum_{m=2}^{\infty} C_1^{(m)} \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_m^2 - \omega_0^2} \right) J_0(K^{(m)}r_0) \quad (3.44)$$

四、二阶频率修正

如果底部形状使 $\omega_1 = 0$, 就必须计算二阶频率修正, 方法与一阶近似完全相同, 由于

$$\phi_{2z} = B_2(r) \cos t \quad z = -h \quad (4.1)$$

$$\phi_{2z} + \omega_0^2 \phi_{2zz} = S_2(r) \cos t \quad z = 0 \quad (4.2)$$

其中

$$S_2(r) = 2\omega_0 J_0(r) \quad (4.3)$$

$$B_2(r) = f_r \phi_{1r} - \phi_{1zz} f \quad (4.4)$$

同样地要求

$$q_{20}^{(1)} = 0 \quad (4.5)$$

也要满足

$$\omega_2 = - \frac{\omega_0^2}{2} C_2^{(1)} = - \frac{\omega_0^2}{a^2 \operatorname{sh} h J_0^2(a)} \int_0^a dr r J_0(r) B_2(r) \quad (4.6)$$

五、一个算例

假若圆形港池的底部形状为轴对称抛物面, 则

$$z = -h + \delta \cdot (a^2 - r^2) \quad (5.1)$$

将(5.1)代入(3.18)和(3.19), 得

$$C_1^{(1)} = \frac{2}{a^2 \operatorname{sh} h J_0^2(a)} \int_0^a r J_0(r) \frac{\omega_0}{\operatorname{sh} h} [-2r J_0' + (r^2 - a^2) J_0(r)] dr = - \frac{2a^2 \omega_0}{3 \operatorname{sh}^2 h} \quad (5.2)$$

$$C_1^{(m)} = \frac{2}{a^2 K^{(m)} \operatorname{sh} K^{(m)} h J_0^2(K^{(m)} a)} \int_0^a r J_0(K^{(m)} r) \frac{\omega_0}{\operatorname{sh} h} [-2r J_0' + (r^2 - a^2) J_0(r)] dr$$

$$= \frac{8 K^{(m)} J_0(a) \omega_0}{\operatorname{sh} h \operatorname{sh} K^{(m)} h J_0^2(K^{(m)} a) (1 - K^{(m)^2})} \quad (5.3)$$

色散关系为

$$\omega_1 = -\frac{\omega_0^2}{2} C_1^{(1)} = \frac{\omega_0^3 a^2}{3 \operatorname{sh}^2 h} \quad (5.4)$$

六、讨论与结论

由上面获得的结果，我们能导出如下的结论：

1. 修正频率的符号决定于积分

$$\int_0^a r J_0(r) B_1(r) dr \quad (6.1)$$

的符号。一般地说，具有凸面底部的水体，其体积较小，结果使修正频率较高，而凹面底部的影响则相反。

2. 底部的几何非均匀性使驻波发生变形，使其变为非轴对称的。然而，还是存在自由面完全平坦的时刻。波节线变成 $r_m = r_{0n} + \delta r_{1n}$ 。其中 r_{0n} 是零阶 Bessel 函数的第一个零点。

而

$$r_{1n} = -\frac{1}{J_0'(r_0)} \sum_{m=2}^{\infty} C_1^{(m)} \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_m^2 + \omega_0^2}\right) J_0(K^{(m)} r_0) \quad (6.2)$$

3. 作为一个例子，取底部形状为凸抛物面，这种不规则底部对驻波波形及频率的影响描绘在图2到图4上。

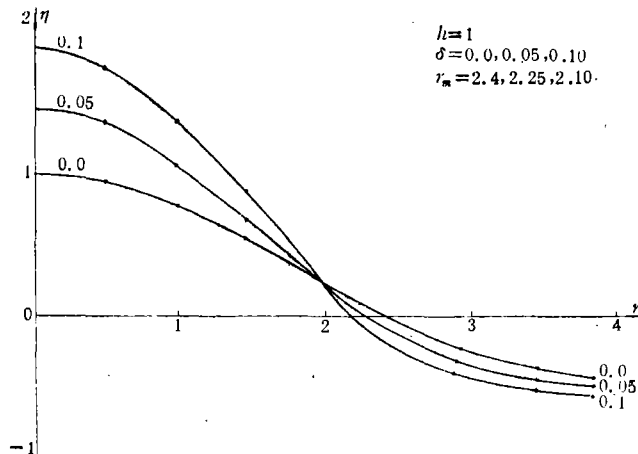


图2 $h=1$ 时的驻波波形

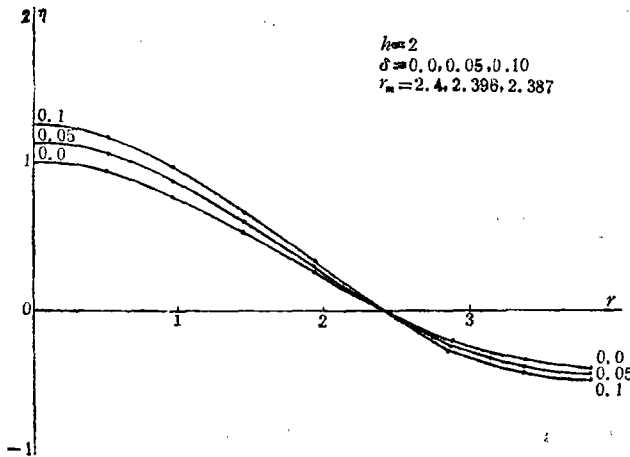
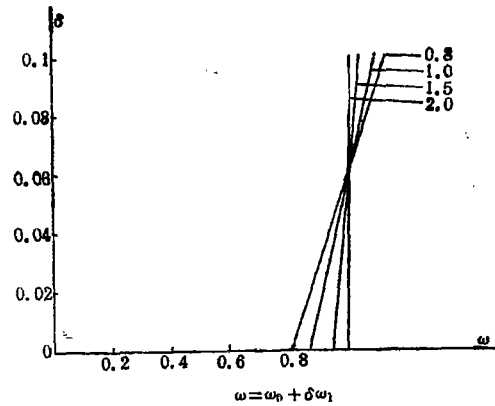
图3 $h=2$ 时的驻波波形

图4 驻波的频率

参 考 文 献

- [1] Tadjbakhsh, I. and J. B. Keller, Standing surface waves of finite amplitude, *J. Fluid Mech.*, 8 (1960), 442—451.
- [2] Mark, L. R., Periodic, finite amplitude, axisymmetric gravity waves, *J. Geo. Res.*, 67, 2 (1962), 829—843.
- [3] Vanden-Broeck, J. M., Nonlinear gravity-capillary standing waves in water of arbitrary uniform depth, *J. Fluid Mech.*, 139 (1984), 97—104.
- [4] Li, J. C., Standing waves of finite amplitude in nearly circular basins, *Proceedings of ICNM*, Shanghai, Science Press (1985), 739—744.

Effects of Bottom Topography on the Standing Waves in Circular Basins

Ma Yun-li Li Jia-chun

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

Standing waves in the cylinder basins with inhomogeneous bottom are considered in this paper. We assume that the invicid, incompressible fluid is in irrotational undulatory motion. For convenience sake, cylindrical coordinates are chosen. The velocity potentials, the wave profiles and the modified frequencies are determined (to the third order) as power series in terms of the amplitude divided by the wavelength. Axisymmetrical analytical solutions are worked out. When $\omega_1=0$, the second order frequency are gained.

As an example, we assume that cylinder bottom is an axisymmetrical paraboloid. We find out that the uneven bottom has influences on standing waves. In the end, we go into detail on geometric factors.