

# 中厚及薄板杂交模型的优化列式\*

狄生林 吴长春 宋启根

(东南大学) (中国科学技术大学) (东南大学)  
(陈大鹏推荐, 1988年7月30日收到)

## 摘 要

文章把杂交元的优化设计原理应用于中厚及薄板问题, 导出新的杂交应力4节点20自由度板弯曲单元。该元对各种厚度、形状板的通用性、收敛性以及极薄板分析的适应性也一并作了考察和讨论。

## 一、引 言

经典的杂交元列式中, 构造完全满足平衡条件的应力试解常常有很多困难。近年来, 卞、陈等<sup>[1~3]</sup>提倡用Reissner原理推导杂交元的方法, 通过引入Lagrange乘子而放松了单元内的平衡约束。据此, 可用自然坐标方便地构造单元应力试解, 导出的单元具有不变性。在此基础上, 文[4]提出了杂交元优化设计的概念, 并在若干弹性力学问题中获得成功<sup>[4,5]</sup>。

近年来, 计入剪切效应的板壳有限元十分热门。这类问题的实质是以 $C^0$ 类试解逼近 $C^1$ 类问题。就位移法而言, 构造通用于Mindlin中厚板及Kirchhoff薄板的板弯曲单元的关键在于, 当板变薄时, 依前者独立的横向位移和转角应自动满足后者的零剪应变条件, 否则可能导致所谓“剪切自锁”现象。已经提出许多解决办法, 见文[6]的评述。

本文进一步发展了[4]中的基本思想, 把杂交元的模式优化原理应用于厚薄板问题, 构造了通用于各种厚跨比的4节点12自由度板弯曲杂交应力元。该元数值性能理想而无自锁问题。

## 二、能量泛函<sup>[11,12]</sup>

计入剪切效应的板元的能量泛函 $\Pi_R^e$ 可表为

$$\Pi_R^e = \iint_{A^e} [M_{i,j}(-\theta_{j,i}) + Q_j(W_{,j} - \theta_j) - B_1(M_{i,j}) - B_2(Q_j)] dA \quad (2.1)$$

其中 $M_{i,j}$ ,  $Q_j$ 分别为板弯曲内力和横向剪力,  $B_1$ ,  $B_2$ 为弯曲余能和剪切余能密度。分离弯曲内力为常数部分 $M_{i,j}^c$ 和高阶部分 $M_{i,j}^h$ 之和:

\* 国家自然科学基金资助项目。

$$M_{i,j} = M_{i,j}^c + M_{i,j}^h \quad (2.2)$$

同时对转角场变量引入非协调位移 $\theta_j$ , 则

$$\theta_j = \theta_j^c + \theta_j^h \quad (2.3)$$

其中 $\theta_j^c$ 为协调位移, 为保证离散解的收敛, 可对式(2.1)附加常内力乘子项:

$$\int_{\partial A} M_{i,j}^c n_i \theta_j^c ds = \iint_A M_{i,j}^c \theta_{i,j}^c dA \quad (2.4)$$

则式(2.1)改写为

$$\begin{aligned} \Pi_R^c = & \iint_A [M_{i,j}(-\theta_{j,i}^c) + M_{i,j}^h(-\theta_{j,i}^h) + Q_j(W_{,j} - \theta_j^c) - Q_j \theta_j^c \\ & - B_1(M_{i,j}) - B_2(Q_j)] dA \end{aligned} \quad (2.5)$$

由于 $M_{i,j}^h$ 以及 $\theta_{j,i}^h$ 分别为 $M_{i,j}$ 和 $\theta_{j,i}$ 的高阶部分, 上式右端第二项可作为能量泛函的高阶数量略去。再者, 若能设法使

$$\iint_A Q_j \theta_j^c dA = 0 \quad (2.6)$$

则能量泛函(2.5)简化为

$$\begin{aligned} \Pi_R^c = & \iint_A [M_{i,j}(-\theta_{j,i}^c) + Q_j(W_{,j} - \theta_j^c) - B_1(M_{i,j}) - B_2(Q_j)] dA \\ = & \iint_A [M_{i,j} \kappa_{i,j}^c + Q_j \gamma_j^c - B_1(M_{i,j}) - B_2(Q_j)] dA \end{aligned} \quad (2.7)$$

上式简化后减少了相应系数矩阵的形成, 同时由于不含内参, 省去了静力凝聚过程, 有效地提高了单刚形成的效率。

### 三、内力的优化格式

对图1的四边形板元, 在四个角点实施离散Kirchhoff约束, 即取

$$\theta_{x,i} = (W_{,x})_i, \quad \theta_{y,i} = (W_{,y})_i \quad (3.1)$$

横向位移取Melosh双三次插值函数<sup>[6]</sup>:

$$W = N_W \cdot q \quad (3.2)$$

式中

$$q = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T, \quad q_i = [W_i, \theta_{x,i}, \theta_{y,i}]^T$$

对图示母元而言, Melosh插值跨单元连续, 但其一阶导数跨单元间断。

对单元转角显然可以构造一双线性插值

$$\theta_a = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}_a = N_{\theta} \cdot q \quad (3.3)$$

式中

$$N_{\theta} = [N_{\theta_1}, N_{\theta_2}, N_{\theta_3}, N_{\theta_4}], \quad N_{\theta_i} = \begin{bmatrix} 0 & N_i(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\xi, \eta) \end{bmatrix}$$

在此基础上引入单元内位移

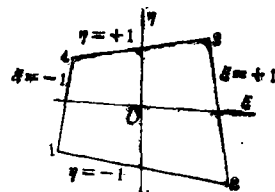


图1 单元自然坐标

$$\theta_\lambda = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}_\lambda = \begin{bmatrix} \xi^2 & \eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 & \eta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_\lambda \cdot \lambda \quad (3.4)$$

则  $\theta = \theta_q + \theta_\lambda$  构成了完备二次转角试解，这与三次  $W$  试解是相称的，因为对薄板有  $\theta_j = W_{,j}$ ，定义双线性力矩场：

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta & 0 & \xi\eta & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \xi & 0 & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 & 0 & \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_4 \\ \vdots \\ \beta_8 \\ \vdots \\ \beta_9 \\ \vdots \\ \beta_{12} \end{Bmatrix} \\ = \phi_o \beta_o + [\phi_1 \quad \phi_1] \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_1 \end{Bmatrix} = M_o + M_h \quad (3.5)$$

常剪力场：

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_{13} \\ \beta_{14} \end{Bmatrix} = \beta_o \quad (3.6)$$

对应上式，可以验证，为保证式(2.6)的满足只需将(3.4)式改为

$$\theta_\lambda = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}_\lambda = \begin{bmatrix} \xi^2 - 1/3 & \eta^2 - 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 - 1/3 & \eta^2 - 1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_\lambda \lambda \quad (3.4)'$$

下面推导优化的内力场。注意到挠度函数  $W \in C^0$ ，则单元优化条件<sup>[4]</sup>形如

$$\int_{\partial A'} \mathbf{T}_\lambda^T \mathbf{u}_\lambda ds = \int_{\partial A'} (M_n^h \theta_n^\lambda + M_{ns}^h \theta_s^\lambda) ds = \iint_{\partial A'} \theta_\lambda^T \begin{bmatrix} l & 0 & m \\ 0 & m & l \end{bmatrix} \mathbf{M}_h ds = 0 \quad (3.7)$$

式中  $l, m$  为单元边界上的单位外法矢分量。将式(3.5)中定义的  $\mathbf{M}_h$  及式(3.4)' 代入优化条件，即得到关于  $\beta$  的四个约束方程，由此消去  $\beta_1$ ，得到所要求的弯曲内力优化格式：

$$\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1^2 \eta & a_3^2 \xi & \xi\eta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b_1^2 \eta & b_3^2 \xi & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 b_1 \eta & a_3 b_3 \xi & 0 & 0 & \xi\eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_8 \end{Bmatrix} = \phi_M^* \beta_M^* \quad (3.8)$$

系数为

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \xi_i x_i, & a_2 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \xi_i \eta_i x_i, & a_3 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \eta_i x_i \\ b_1 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \xi_i y_i, & b_2 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \xi_i \eta_i y_i, & b_3 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \eta_i y_i \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

合并式(3.8)及式(3.6)为

$$\sigma^* = \begin{Bmatrix} M^* \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_M^* & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_M^* \\ \beta_Q \end{Bmatrix} = \phi^* \beta^* \quad (3.10)$$

式(3.10)就是对应内位移(3.4)建立的板弯曲杂交元的 $10\beta$ 优化内力格式。对应 $\sigma^*$ 的广义应变记为

$$\varepsilon_q = \begin{Bmatrix} \kappa_q \\ \gamma_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -D\theta_q \\ dW - \theta_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -DN_\theta \\ dN_W - N_\theta \end{Bmatrix} \cdot q = B_q \cdot q \quad (3.11)$$

式中的算子矩阵为

$$D = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}, \quad d = \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{Bmatrix}$$

对应简化泛函式(2.7), 有

$$\Pi_k^* = \iint_{A'} \left( -\frac{1}{2} \sigma^{*T} S \sigma^* + \sigma^{*T} \varepsilon_q \right) dA = -\frac{1}{2} \beta^{*T} H \beta^* + \beta^{*T} G_q \quad (3.12)$$

式中已定义

$$G_q = \iint_{A'} \phi^{*T} B_q dA, \quad H = \iint_{A'} \phi^{*T} S \phi^* dA$$

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \frac{12}{Et^3} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix}, \quad S_2 = \frac{2(1+\mu)}{Et} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

最后, 单元刚度矩阵为

$$K^* = G_q^T H^{-1} G_q \quad (3.13)$$

#### 四、数值比较

为考察上两节导出的优化板弯曲杂交元的数值性能, 本节进行了一系列计算比较。以下称本文导出的单元为 $10\beta$ 元。

##### 1. 中厚板与薄板分析的通用性

表1给出了简支板在均布荷载作用下的中心挠度系数。简支边界条件取为 $W = \theta_x = 0$ 。对本文 $10\beta$ 元给出四分之一板 $4 \times 4$ 网格的计算结果。板的厚跨比 $t/s$ 从 $1/100$ 到 $1/4$ 逐渐增大。系统比较表明:  $10\beta$ 优化模式严格适用于各种厚度的板, 以较少的自由度获得了极好的结果。表2则给出了均布荷载作用下四边简支及四边夹支方板的弯曲内力解答。

##### 2. 关于解的自锁试验

与文[9]的例相同, 用简支方板在分布荷载作用下的算例来检查 $10\beta$ 元是否会发生解的自锁现象。图2显示了板的跨厚比 $s/t$ 从 $s/t=10$ 渐增至 $s/t=10^6$ (极薄板)时的中心挠度相对于薄板理论解的变化情况。可见位移法中厚板元 $S8^{(8)}$ 有自锁现象, 不能计算薄板, 而本文的 $10\beta$ 元和文[9]中的 $C8$ 元都不存在剪切自锁问题。图中 $W_{\text{exact}}$ 为薄板弹性理论解。对于跨厚比 $s/t < 100$ 的情况, 显然不能用该理论求解。

表1 简支方板受均布荷载 $q_0$ 的中心挠度系数 $r_q = W_{max}Et^3/q_0s^4 (\mu=0.3)$

厚跨比 $t/s$	经典薄板理论解	Reissner板理论解	本文优化杂交元 $10\beta$	Cook: $H5$ 取自[7]	Pryor et al. 取自[7]	Rao et al. 取自[7]
0.01	0.04437	0.04439	0.04426		0.04423	
0.05	0.04437	0.04486	0.04474		0.04469	0.04483
0.10	0.04437	0.04632	0.04621		0.04612	0.04627
0.15	0.04437	0.04876	0.04867		0.04852	0.04866
0.20	0.04437	0.05217	0.05211		0.05186	0.05201
0.25	0.04437	0.05656	0.05653	0.05620	0.05617	0.05631
1/4板网格 节点未知量总数(约束前)			$4 \times 4$ $n=75$	$8 \times 8$ $n=243$	$6 \times 6$ $n=245$	$2 \times 2$ $n=108$

表2 均布荷载作用下方板的内力系数 ( $s/t=100, \mu=0.3$ )

1/4板网格	周边简支		周边夹支	注
	$m_x=m_y$	$m_{xy}$	$m_x=m_y$	
$2 \times 2$	0.463	0.0230	0.0239	$m_x = \frac{(M_x)_{max}}{q_0s^2}$ $m_{xy} = \frac{(M_{xy})_{max}}{q_0s^2}$
$4 \times 4$	0.475	0.0290	0.0230	
$6 \times 6$	0.477	0.0305		
薄板经典解	0.479	0.0325	0.0231	

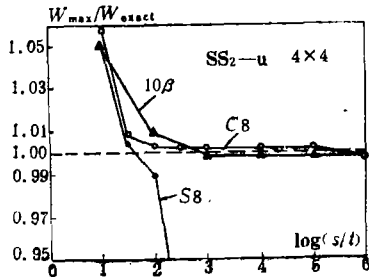


图2 方板自锁试验(1/4板网格 $4 \times 4$ )

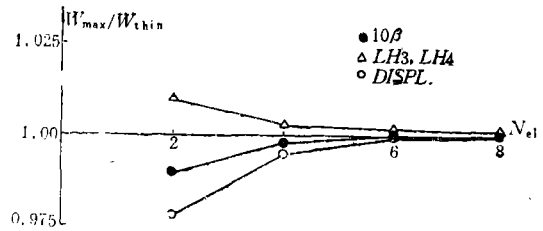


图3(a) 周边简支, 分布荷载作用( $s/t=100$ )

### 3. 单元的收敛性比较

周边简支或夹支方板受分布或集中荷载作用的结果示于图3(a), (b), (c), (d), 图4 以及图5。其中 $LH3, LH4$ 为Spiker的四节点Mindlin板弯曲杂交元<sup>[10]</sup>。比较结果表明 $10\beta$ 元的数值结果和收敛性更为理想。图中横坐标 $N_e$ 为1/4板每边的等分数, 各图均取自文[10]。

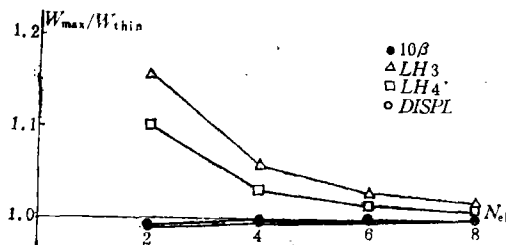


图3(b) 周边简支, 中点集中力作用( $s/t=100$ )

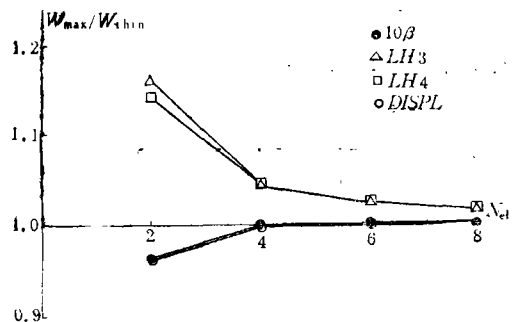


图3(c) 周边夹支, 分布荷载作用( $s/t=100$ )

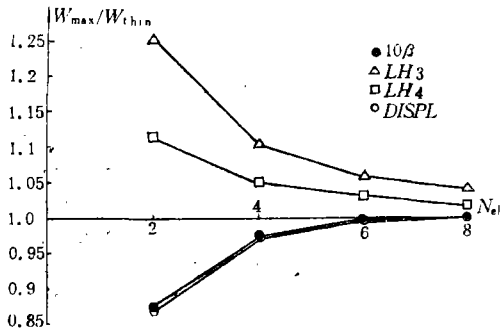


图3(d) 周边夹支, 中点集中力作用 (s/t=100)

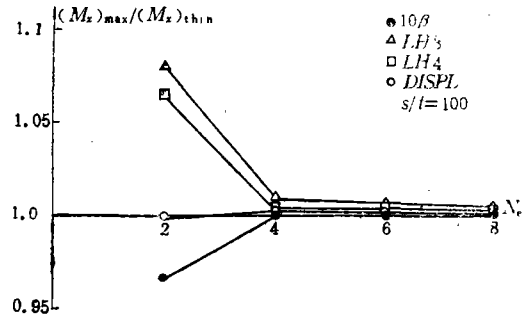


图4 简支方板受分布荷载作用时 M\_x 的收敛比较 (s/t=100)

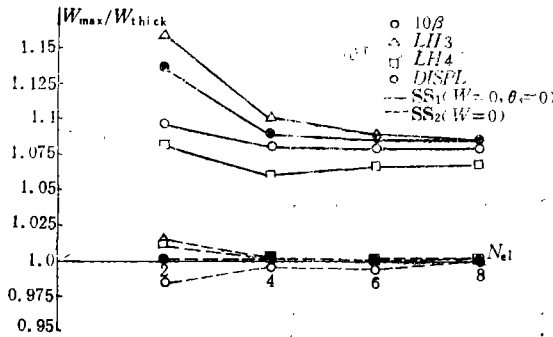


图5 简支方板受均布荷载作用中点位移收敛比较 (s/t=10)

#### 4. 网格畸变的影响

图6考察了当计算网格为非规则时数值解的可靠性。计算表明, 对于具有平行边的网格 I, 三种模型给出大致相当的结果。而对于网格 II, 仅用四个单元离散, 而且是完全任意的四边形单元, 此时本文 10β元与 HMPL5 的结果相当而优于 Bathe 等的模型, 见表3。

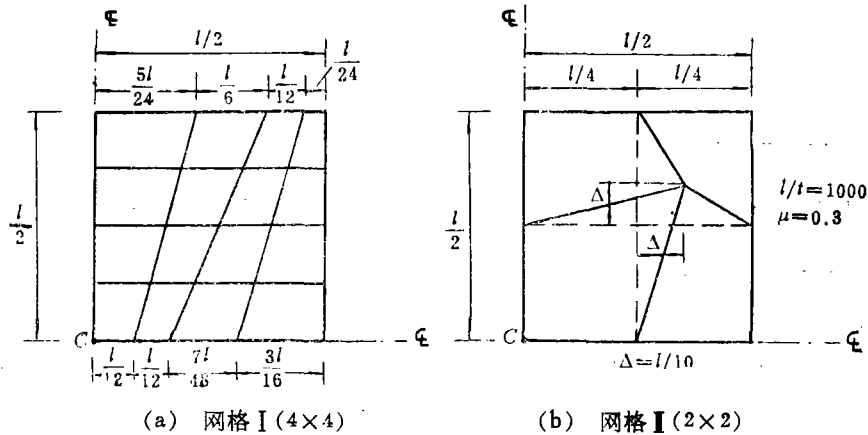


图6 网格畸变考察

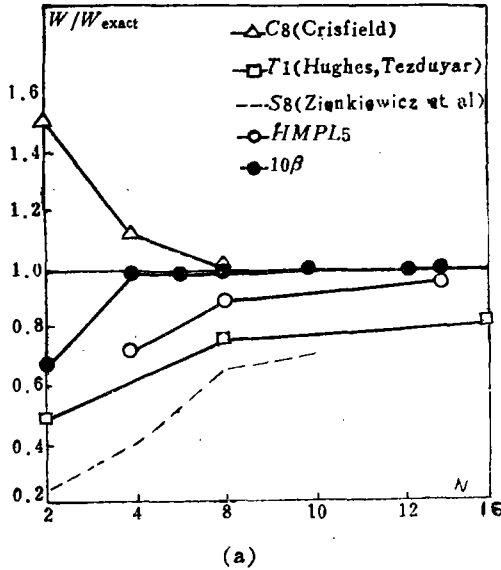
表3

网格畸变考察的数值比较

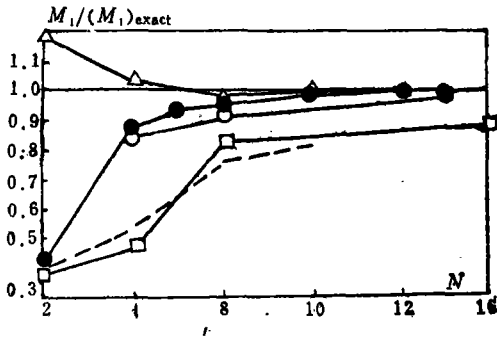
单元	$W_c/W_{exact}$		$(M_x)_c/(M_x)_{exact}$	
	网格 I	网格 II	网格 I	网格 II
HMPL5	0.992	1.030	1.02	0.94
Bathe anh Dvorkin(1985)	1.010	0.930	1.02	0.85
10β	1.009	0.968	1.02	0.952

5. 菱形板问题

图7示一均布荷载作用下的菱形板弯曲问题。板由 $N \times N$ 斜网格离散,边界约束分为 $S_1$ 型及 $S_2$ 型两种情况,如图所示。该问题由于内力的奇性分布,许多板元都呈现病态结果。尖角处的奇异性随 $r^{-4/5}$ 变化, $r$ 为所考虑位置至尖角处的距离。图7给出了几种有限的主弯矩和中心挠度的收敛曲线,材料取自文[9]。计算表明 $10\beta$ 元与高阶元 $C8^{(9)}$ 的性能相当而优于杂交元HMPL5,并且用 $10\beta$ 元计算时代价(总计算自由度)最小。



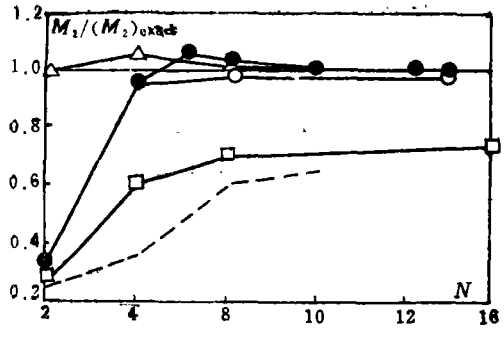
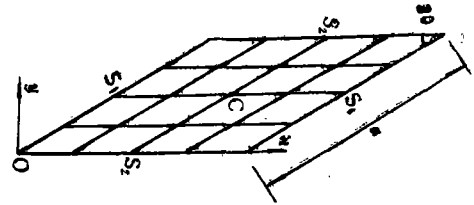
(a)



(b)

6. 圆板问题

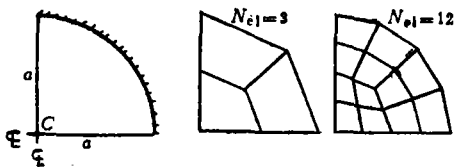
四周简支或夹支的圆板及其离散网格见图8所示,本例考察非规则网格下 $10\beta$ 元的适应性。分布荷载和集中力作用于中点的收敛曲线示于图9。边界条件 $SS_1$ 表示简支边, $W=0$ 。CL表示夹支。 $u$ 为均布荷载, $c$ 为中点集中力



(c)

$\alpha=100, t=0.1, \mu=0.3; S_{11}W=0; S_{21}W=\theta_x=0$

图7 菱形板中点C的位移、内力收敛比较



$\mu=0.3, a=5, t=0.005$

图8 圆板网格(1/4板)

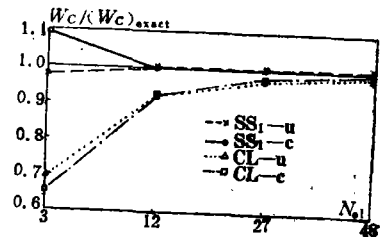


图9 圆板中点位移收敛性

作用。计算曲线表明 $10\beta$ 元的收敛是满意的。图中 $(W_o)_{\text{exact}}$ 是薄板理论给出的中点位移。

### 参 考 文 献

- [1] Pian, T. H. H. and D. P. Chen, Alternative ways for formulation of hybrid stress elements, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **18** (1982), 1679—1684.
- [2] Pian, T. H. H., D. P. Chen and David Kang, A new formulation of hybrid/mixed finite element, *Computers and Structures*, **16** (1983), 81—87.
- [3] Pian, T. H. H. and K. Sumihara, Rational approach for assumed stress finite elements, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **20** (1984), 1685—1695.
- [4] 吴长春、狄生林、黄茂光, 杂交元的优化设计, *科学通报*, **15** (1986).
- [5] 吴长春、狄生林、卞学骥, 轴对称杂交应力元的优化设计, *航空学报*, **8,9** (1987).
- [6] 胡海昌, 《弹性力学变分原理及其应用》, 科学出版社 (1981).
- [7] Wu Chang-chun, Some problems of a plate bending hybrid model with shear effect, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **18** (1982), 755—764.
- [8] Zienkiewicz, O. C., et al., Reduced integration technique in general analysis of plates and shells, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **3** (1971), 575—586.
- [9] Crisfield, M. A., A quadratic Mindlin element using shear constraints, *Computers and Structures*, **18** (1984), 833—852.
- [10] Spilker, R. L., et al., The hybrid stress model for thin plates, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **15** (1980), 1239—1260.
- [11] Pian, T. H. H. and Wu Chang-chun, Recent advances in hybrid stress finite element, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **26** (1988), 2331—2343.
- [12] 吴长春, 离散系统的非协调原理及多变量方法, 杂交元的优化理论与实践, 中国科学技术大学博士论文 (1987, 5).

## Optimizing Formulation of Hybrid Model for Thin and Moderately Thick Plates

Di Sheng-lin

(Department of Civil Engineering, Southeast University, Nanjing)

Wu Chang-chun

(Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology, Hefei)

Song Qi-gen

(Department of Civil Engineering, Southeast University, Nanjing)

### Abstract

A 20-DOF hybrid stress element based upon Mindlin plate theory is developed using the optimization design method for thin and moderately thick plates. Numerical tests consist of the convergency and performance to the plates with arbitrary thickness and shape and of the ultimate thin plate problems.