

深水中浮体的突然起动问题*

陶明德

(复旦大学, 1988年11月23日收到)

摘要

在本文中, 我们应用 Lagrang 方法讨论了深水中浮体的突然起动, 求得了问题的解析解。从数值结果可知: 当浮体宽度保持不变而增加深度时, 扰动区域扩大, 动态压力也增加。

一、引言

研究流体-固体的相互作用是一个重要课题, 在这研究领域中有个内容是分析当浸润在液体中的固体突然起动时液体作用在固体上的动态压力。为了研究坝体对地震的响应, Westergaard^[1]采用附加质量法首先导得了水库中的水作用在垂直坝面上的动态压力表达式。Chwang 和 Housner^[2]利用 von Kármán 的动量平衡方法研究了地震时作用在倾斜坝面上的动态压力。Chwang^[3]又用复变函数方法从精确理论求解了同样问题。本文采用 Lagrange 方法来研究深水中浮体突然起动以后自由面的变形和作用在浮体上的动态压力。因为采用 Lagrange 方法, 所以在自由面上的非线性边界条件能精确满足。该方法在[4]中曾叙述过, 在[5]中使用这一方法求解了在长水槽中加速平板的问题。本文仅考虑在垂直平面中的二维运动, 浮体近似地作为一个矩形。在不同的深宽比下, 所得的自由面变形和动态压力系数具有良好的规律性。

二、问题

如图1所示, y 轴垂直向下, x 轴沿着未扰动自由面水平向左。浮体为一矩形, 该矩形的宽度为 l , 下沉的深度为 h 。在初始时浮体突然以速度 $u(t)$ 向前运动, 因此在前部的自由面将抬升, 在后部的自由面会下陷, 同时浮体要受到一个向后作用的动态压力。

我们把自变量取为 a, b 和 t , 其中 a, b 为 Lagrange 变量, 取为初始时水质点的直角坐标。未知函数取为 $X(a, b, t), Y(a, b, t)$ 和

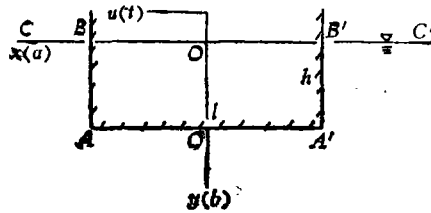


图 1

*戴世强推荐。

$p(a, b, t)$, 其中 X, Y 为 t 时刻质点的直角坐标, p 为总压力. Lagrange 型的运动方程为

$$X_{,t} X_a + (Y_{,t} - g) Y_a + \frac{1}{\rho} p_a = 0, \quad X_{,t} X_b + (Y_{,t} - g) Y_b + \frac{1}{\rho} p_b = 0 \quad (2.1a, b)$$

连续性方程为

$$X_a Y_b - X_b Y_a = 1 \quad (2.2)$$

在(2.1)中的 ρ 为液体密度. 按照[4]的做法, 由(2.1)消去 p 后可得

$$(X_a X_{b,t} + Y_a Y_{b,t}) - (X_b X_{a,t} + Y_b Y_{a,t}) = 0 \quad (2.3)$$

我们再把 X, Y 和 p 都设成 t 的幂级数

$$\left. \begin{aligned} X(a, b, t) &= a + X^{(2)}(a, b)t^2 + X^{(4)}(a, b)t^4 + \dots \\ Y(a, b, t) &= b + Y^{(2)}(a, b)t^2 + Y^{(4)}(a, b)t^4 + \dots \\ p(a, b, t) &= p^{(0)}(a, b) + p^{(2)}(a, b)t^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.4a, b, c)$$

在(2.4)中不包含 t 的奇次幂项, 这是因为在(2.1)中如以 t 换成 $-t$ 后(2.1)的形式不变, 故如果再对浮体的速度也作些限制, 就完全可以使(2.4)中仅含 t 的偶次幂项. 当然这里的解仅适用于 $t \ll 1$ 的情况.

以(2.4)代入(2.2), 再比较 t 的各次幂项, 就可得一系列递推方程

$$X_a^{(2)} + Y_b^{(2)} = 0 \quad (2.5)$$

.....

同样以(2.4)代入(2.3)可得

$$X_b^{(2)} - Y_a^{(2)} = 0 \quad (2.6)$$

.....

还需要把(2.4)代入(2.1), 得两套递推方程

$$2X^{(2)} + \frac{1}{\rho} p_a^{(0)} = 0 \quad (2.7)$$

.....

$$2Y^{(2)} - g + \frac{1}{\rho} p_b^{(0)} = 0 \quad (2.8)$$

.....

在(2.4)中, X 和 Y 已经能满足初始位置和初始速度为零的初始条件了, 在此我们仅仅进一步求出其中的 $X^{(2)}, Y^{(2)}$ 和 $p^{(0)}$.

显然从(2.5)和(2.6)两式可知 $X^{(2)}$ 和 $Y^{(2)}$ 是 a, b 的共轭调和函数, 因此分别可作为某一解析函数 Z 的虚部和实部, 即

$$Z(z) = Y^{(2)} + iX^{(2)}, \quad z = a + ib \quad (2.9)$$

下面我们来求出 $X^{(2)}$ 和 $Y^{(2)}$ 所应满足的边值. 当 $b = h$ 时我们假定在底部的水质点永远在底部, 因此 $Y(a, h, t) \equiv 0$, 故由(2.4b)可得

$$Y^{(2)}(a, h) = 0 \quad (|a| \leq l/2) \quad (2.10)$$

当 $b = 0$ 时我们假定在自由面上的压力恒为零, 因此 $p(a, 0, t) \equiv 0$, 故由(2.4c)可得 $p^{(0)}(a, 0) = 0$, 即可得

$$p_a^{(0)}(a, 0) = 0$$

因此由(2.7)得

$$X^{(2)}(a, 0) = 0 \quad (|a| > l/2) \quad (2.11)$$

为了使(2.4)中仅含 t 的偶次幂项, 我们对浮体速度稍加限制, 使

$$u(t) = a_1 t + a_3 t^3 + \dots$$

为简单起见, 我们假设仅 $a_1 \neq 0$, 即浮体作匀加速运动. 因此当 $a = \pm l/2$ 时, 水质点的水平速度就是浮体的运动速度, 故

$$X_t(a, b, t) |_{a=\pm l/2} = u(t)$$

由此可得

$$X^{(2)}(\pm l/2, b) = a_1/2 \quad (0 < b < h) \quad (2.12)$$

这样一来, 根据(2.10)~(2.12)三式给定的边值我们就可求得 $X^{(2)}$ 和 $Y^{(2)}$.

三、求 解

求解区域为多边形 $CBAA'B'C'$, 我们首先利用 Schwarz-Christoffel 公式把 z 平面的这一多边形映为 W 平面的上半平面, 映照函数取为

$$z = M \int_0^W \sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-1/k^2}} dt + ih \quad (3.1)$$

其中 $W = u + iv$, W 平面上的对应点已列在图 2 中, (3.1) 中的 k 为一参数, 满足 $0 < k < 1$. 从 0 到 A 积分, 可得

$$\frac{l}{2} = M \int_0^1 \sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-1/k^2}} dt \quad (3.2)$$

把上式中的积分记为 I_1 . 再从 A 到 B 积分, 这时要注意 z 平面上幅角的变化, 可得

$$h = M \int_1^{1/k} \sqrt{\frac{1-t^2}{t^2-1/k^2}} dt \quad (3.3)$$

把上式中的积分记为 I_2 . 由以上两式可得宽深比 ξ 为

$$\xi = l/h = 2I_1/I_2 \quad (3.4)$$

如果给定了 ξ , 从上式就能求得(3.1)中的 k .

此外由(3.2)可得

$$M = l/2I_1 \quad (3.5)$$

从图 2 可知在 W 平面的实轴上

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} Z = 0 & \quad (|u| < 1) \\ \operatorname{Im} Z = a_1/2 & \quad (1 < |u| < 1/k) \\ \operatorname{Im} Z = 0 & \quad (|u| > 1/k) \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

根据(3.6)来确定 Z 的问题是一个混合边值问题, 故再作变换

$$\zeta = (W-1)/(W+1) \quad (3.7)$$

其中 $\zeta = S + iT$. 再引进未知函数的变换

$$Z^* = Y^* + iX^* = Z/\sqrt{\zeta} \quad (3.8)$$

Z^* 是 ζ 平面的上半平面中的解析函数, 在 ζ 平面的实轴上有

$$\operatorname{Im} Z^* = \begin{cases} a_1/2\sqrt{S} & (0 < S < m, 1/m < S < \infty) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以位移 $X^{(2)}(S, T)$ 和 $Y^{(2)}(S, T)$ 为

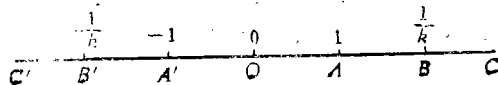


图 2

$$\left. \begin{aligned} Y^{(2)} &= \sqrt{S} Y^* = \frac{\sqrt{S}}{\pi} \left[\int_0^m \frac{a_1(\xi-S)d\xi}{2\sqrt{\xi}((\xi-S)^2+T^2)} + \int_{1/m}^\infty \frac{a_1(\xi-S)d\xi}{2\sqrt{\xi}((\xi-S)^2+T^2)} \right] \\ X^{(2)} &= \sqrt{S} X^* = \frac{\sqrt{S} T}{\pi} \left[\int_0^m \frac{a_1 d\xi}{2\sqrt{\xi}((\xi-S)^2+T^2)} + \int_{1/m}^\infty \frac{a_1 d\xi}{2\sqrt{\xi}((\xi-S)^2+T^2)} \right] \end{aligned} \right\} (3.9a, b)$$

这里的 $m=(1-k)/(1+k)$ 。为了求得自由面 BC 的形状, 从 B 到 C 积分(3.1), 可得

$$\begin{aligned} a &= M \int_{\frac{1+m}{1-m}}^{\frac{1+S}{1-S}} \sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-1/k^2}} dt + \frac{l}{2} \\ &= \frac{l}{2} \left(-\frac{1}{I_1} \int_{\frac{1+m}{1-m}}^{\frac{1+S}{1-S}} \sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-1/k^2}} dt + 1 \right) \quad (m < S < 1) \end{aligned} \quad (3.10a)$$

由(3.9a)可得

$$Y^{(2)}(S, 0) = \frac{a_1}{2\pi} \ln \left| \frac{\sqrt{m} - S\sqrt{m} - \sqrt{S}(1-m)}{\sqrt{m} - S\sqrt{m} + \sqrt{S}(1-m)} \right|. \quad (3.10b)$$

(3.10)作为 S 的参数方程, 决定了 $Y^{(2)} \sim a$ 的关系, 由此可知自由面的变形。

在 $B'C'$ 上, 自由面的变形可求得为

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{l}{2} \left(-\frac{1}{I_1} \int_{\frac{m+1}{m-1}}^{\frac{1+S}{1-S}} \sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-1/k^2}} dt - 1 \right) \\ Y^{(2)}(S, 0) &= \frac{a_1}{2\pi} \ln \left| \frac{\sqrt{m} - S\sqrt{m} - \sqrt{S}(1-m)}{\sqrt{m} - S\sqrt{m} + \sqrt{S}(1-m)} \right| \end{aligned} \right\} \left(1 < S < \frac{1}{m} \right) \quad (3.11a, b)$$

如果把 $Y^{(2)}$ 看作 a 的函数, 则由(3.10)和(3.11)两式所确定的函数是一奇函数。我们可以作如下证明: 在(3.10a)中设 $a_1 = a^* > 0$, a^* 对应于 $S^* \in (m, 1)$ 。现以 $S = 1/S^*$ (显然 $S \in (1, 1/m)$) 代入(3.11a)得

$$a_2 = \frac{l}{2} \left[-\frac{1}{I_1} \int_{\frac{m+1}{m-1}}^{\frac{1+1/S^*}{1-1/S^*}} \sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-1/k^2}} dt - 1 \right] = \frac{l}{2} \left[-\frac{1}{I_1} \int_{\frac{m+1}{m-1}}^{\frac{1+S^*}{1-S^*}} \sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-1/k^2}} dt - 1 \right]$$

在上述的积分中作变换 $t = -t'$, 即可得

$$a_2 = -a_1$$

即 a_1 和 a_2 是实轴上关于原点的对称点。此外以 $S = 1/S^*$ 代入(3.11b)可得

$$Y^{(2)}(S^*, 0) = -Y^{(2)}\left(\frac{1}{S^*}, 0\right)$$

因此在两个对称点 a_1 和 a_2 处的 $Y^{(2)}$ 具有大小相等但符号相反的性质, 这符合实际流动图案。

下面再来求解 $p^{(0)}$, 由(2.7)、(2.8)两式可得

$$p_a^{(0)} = -2X^{(2)}, \quad p_b^{(0)} = -2Y^{(2)} + g$$

由上面两式可知 $p^{(0)}$ 是调和函数, 故

$$p^{(0)} = -2 \left[\int X^{(2)} da + \int \left(Y^{(2)} - \frac{g}{2} \right) db \right] \quad (3.12)$$

沿 BA 从 B 到 A 积分上式 ($da=0$)

$$p_{BA}^{(0)}(b) = -2 \int_0^b Y^{(2)} db + gb = -2 \int_m^S Y^{(2)} \frac{db}{dS} dS + gb$$

由(2.1)也沿 BA 从 B 到 A 积分, 可得

$$b = -\frac{l}{2I_1} \int_{1/k}^{\frac{1+S}{1-S}} \sqrt{\frac{t^2-1}{1/k^2-t^2}} dt \quad (3.13a)$$

由此

$$\frac{db}{dS} = -\frac{kl}{I_1(1-S)^2} \sqrt{\frac{4S}{(1-S)^2 - k^2(1+S)^2}}$$

故最终

$$p_{BA}^{(0)}(b) = \frac{4kl}{I_1} \int_m^S Y^{(2)} \frac{1}{(1-S)^2} \sqrt{\frac{S}{(1-S)^2 - k^2(1+S)^2}} dS + gb \quad (0 < S < m) \quad (3.13b)$$

其中 $Y^{(2)}$ 须从(3.9a)求得, 由(3.13)可得在 BA 上的 $p^{(0)}$.

再沿 $B'A'$ 从 B' 到 A' 作同样的积分 (也有 $da=0$) 可得

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{l}{2I_1} \int_{-1/k}^{\frac{1+S}{1-S}} \sqrt{\frac{t^2-1}{1/k^2-t^2}} dt \\ p_{B'A'}^{(0)}(b) &= -\frac{4kl}{I_1} \int_{1/m}^S Y^{(2)} \frac{1}{(1-S)^2} \sqrt{\frac{S}{(1-S)^2 - k^2(1+S)^2}} dS + gb \end{aligned} \right\} \quad (3.14a, b)$$

$(\frac{1}{m} < S < \infty)$

同样可以证明在 BA 和 $B'A'$ 的对应点上的动压力有不同的符号, 因此作用在浮体上的压力为

$$F(b) = p_{BA}^{(0)}(b) - p_{B'A'}^{(0)}(b) = \frac{8kl}{I_1} \int_m^S Y^{(2)} \frac{1}{(1-S)^2} \sqrt{\frac{S}{(1-S)^2 - k^2(1+S)^2}} dS \quad (3.15)$$

其中 b 仍由(3.13a)来确定。

四、数值例子

首先通过(2.1b)由给定的宽深比 ξ 来确定 k 的值, 当 ξ 分别取为 0.5, 1.0, 2.0 时由数值方法求得 $k=0.465, 0.591, 0.708$. 这时 I_1 的值分别为 0.376, 0.488, 0.600.

由于自由面的反对称性, 我们只须考察在 BC 上的自由面的上升, 而不必考察在 $B'C'$ 上自由面的下陷. 当 $\xi=0.5, 1.0, 2.0$ 时对应的 $Y^{(2)}$ 分别绘在图 3 上, 其中横坐标 $\tilde{a}=(2a/l-1)$, 而纵坐标 $\tilde{Y}^{(2)}=-2\pi Y^{(2)}/\alpha_1$. 由图 3 可知, 当浮体的宽度 l 保持不变, 则随着下沉深度 h 的增加, 扰动区域也随着扩大. 在浮体的侧壁处 $\tilde{Y}^{(2)}$ 有一对数奇性, 这是由于在角点 B 处压力出现了第一类间断点, 因此这里的位移是不真实的. 当然自由面随时间的演变还须从(2.4b)求得,

其次我们来考察作用在浮体上的动态压力分布, 记横坐标为压力系数 $K = \pi/4\alpha_1 l \cdot F$, 而纵坐标 $\eta = b/h$ 。所得的结果绘在图 4 上, 由图可知当 ξ 减小时, K 明显增加, 但在自由面处压力系数始终为零。这一压力系数可以用来估计为使浮体突然作匀加速运动时所需克服的附加水动压力。

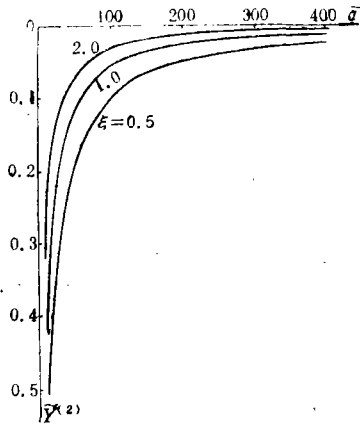


图 3

这里的流动区域较为复杂, 故只求得了 $p^{(0)}$ (在 [4] 中也只求得了 $p^{(0)}$), 求 $p^{(2)}$ 的工作量要增加很多, 以后将继续加以讨论。

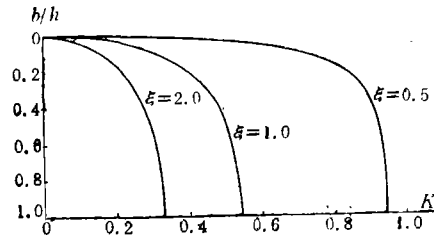


图 4

参 考 文 献

- [1] Westergaard, H. M., Water pressures on dams during earthquakes, *Trans. A. S. C. E.*, **98** (1933), 418—433.
- [2] Chwang, A. T. and G. W. Housner, Hydrodynamic pressures on sloping dams during earthquakes, Part 1, Momentum method, *J. Fluid Mech.*, **87** (1978), 335—339.
- [3] Chwang, A. T., Hydrodynamic pressures on sloping dams during earthquakes, Part 2, Exact theory, *J. Fluid Mech.*, **87** (1978), 343—348.
- [4] Stoker, J. J., *Water Waves*, Interscience Publishers Inc. (1957), 514—521.
- [5] Tao, M. D. and Y. Cen, The solution of on accelerating plate by Lagrangian method, *Proc. 7th ASCE* (1988), 49.

The Sudden Starting of a Floating Body in Deep Water

Tao Ming-de

(Fudan University, Shanghai)

Abstract

This paper applies Lagrangian method to discuss the sudden starting of a floating body in deep water and the analytical solutions are obtained. It is known from the numerical results that the disturbing domain extends and the dynamic pressure also increases when the breadth of the floating body keeps constant and its depth increases.