应用数学和力学，第11卷第2期(1990年2月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

几类非线性系统对白噪声参激与/或外激平稳响应的精确解*

朱位秋

(浙江大学，1988年10月31日收到)

摘　要

用福克-普朗克-柯尔莫哥洛夫方程方法构造了一类二阶、三类高阶非线性系统对白噪声参激与/或外激的平稳响应的精确解．讨论了解的存在与唯一性及解的性态．所考虑的系统的共同特点是非保守力依赖于相应保守系统的首次积分，因此可称为广义能量依赖系统．文中指出，对每个广义能量依赖系统，存在一族与之随机等价的非广义能量依赖系统，它们有相同的平稳概率密度．并指出对一给定广义能量依赖系统，如何找到其等价随机系统．作为例子，给出了二阶广义能量依赖随机系统的等价随机系统．最后指出并用例子说明，许多非广义能量依赖非线性随机系统的精确平稳解可通过寻求其等价广义能量依赖系统而找到．

一、引　言

在过去25年中对非线性系统对随机激励的响应进行了广泛的研究，发展了若干精确与近似方法[1~5]．当激励为高斯白噪声时，线性或非线性系统的响应是扩散的马尔柯夫过程．响应的精确概率密度可用福克-普朗克-柯尔莫哥洛夫方程(简称FPK方程)方法得到．然而，只对线性系统与少数一阶非线性系统已知FPK方程的精确瞬态解[2]．FPK方程精确稳态解的知识也远未成熟．至今，最一般的精确平稳解乃由Caughey与Ma为在高斯白噪声外激下的一类二阶与一类高阶非线性系统得到[6,7]．同受白噪声外激与参激的二阶非线性系统精确平稳解的第一个例子由Dimentberg[8]给出．最近，Yong与Lin[9]应用了详细平衡的概念发展了一种得到在白噪声参激与/或外激下的非线性系统精确平稳解的步骤．作为例子，他们推广了Dimentberg[8]之解．

本文考虑一类二阶、三类高阶非线性动态系统对白噪声参激与/或外激的平稳响应．所考虑的四类非线性随机系统是Caugheg与Ma[6,7]及Dimentberg[10]所研究情况的推广，包括了某些参激的可能性；也是Dimentberg[8]及Yong与Lin[9]所研究情况的推广，非线性与激励更为一般．这些系统的特点是非保守力依赖于相应保守系统的首次积分，可称为广义能量依赖系统．文中首先构造了四类广义能量依赖非线性随机系统的平稳响应的精确解．然

* 丁浩江推荐．本文曾为第十七届国际理论与应用力学大会录用．
国家自然科学基金资助项目．

后讨论了解的存在与唯一性及解的性态。最后指出，对四类广义能量依赖非线性随机系统的每一个，它的精确平稳解也是许多非广义能量依赖随机系统的精确平稳解。具有相同平稳解的随机系统称为等价随机系统。在一族等价随机系统中，广义能量依赖系统可看作是该族的“中心”。指出了对于给定广义能量依赖系统如何找到其等价的随机系统，作为例子，给出了二阶广义能量依赖非线性随机系统的等价随机系统。指出并用例子说明，许多非广义能量依赖非线性随机系统的精确平稳解可通过寻求其等价的广义能量依赖随机系统而找到。Yong 与 Lin[9]发现的未期结果，即在高斯白噪声参数与外激的适当组合下，一个非线性系统的响应可为高斯过程，可用等价随机系统的概念解释。

二、二阶广义能量依赖非线性随机系统

考虑如下形式二阶非线性随机系统

$$\ddot{x}+a\dot{x}\left(H_yf(H)-\frac{H_{yy}}{H_y}\right)+\frac{H_x}{H_y}=b\sum_{k=1}^{m}g_k(H)\xi_k(t) \tag{2.1}$$

式中a与b为常数，$y=\dot{x}^2/2$，下标x与y表示偏导数，$H=H(x,y)$为下列保守系统的首次积分

$$\ddot{x}+H_x/H_y=0 \tag{2.2}$$

$f(H)$与$g_k(H)$为H的函数。假定H为二次可微，$g_k(H)$为一次可微。为保证系统(2.1)之平稳解的存在与唯一而加于$f(H)$ 与 $g_k(H)$ 的其他条件将在下面讨论。$\xi_k(t)$ 是物理高斯白噪声，均值为零，相关函数$E[\xi_k(t)\xi_l(t+\tau)]=2D_{kl}\delta(\tau)$。当$g_k(H)$确实依赖于$H$ 时，$g_k(H)\cdot\xi_k(t)$表示参激，否则它是外激。系统(2.1)是 Caughey 与 Ma[6]所研究的那类系统的推广，考虑更为一般的激励，包括某些类型的参激。Dimentberg[8]所考虑的系统及Yong与Lin[9]的推广也作为特殊情形包括在系统(2.1)之中。本文将用类似于 Caughey 与 Ma[6]所用的方法构造方程(2.1)的精确平稳解。

系统(2.1)的响应是一个2维时齐马尔柯夫矢量过程。以$p(x,\dot{x},t|x_0,\dot{x}_0)$记响应的转移概率密度，支配$p(x,\dot{x},t|x_0,\dot{x}_0)$的FPK方程形为

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\dot{x}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\dot{x}}\left\{\left[\left(aH_yf(H)-a\frac{H_{yy}}{H_y}-b^2H_y\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_k'g_l\right)\dot{x}+\frac{H_x}{H_y}\right]p\right\}+b^2\frac{\partial^2}{\partial\dot{x}^2}\left(\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_kg_lp\right) \tag{2.3}$$

式中，$g_k'=dg_k(H)/dH$。在推导(2.3)时计及了 Wong-Zakai 修正项。平稳概率密度$p_s(x,\dot{x})=\lim\limits_{t\to\infty}p(x,\dot{x},t|x_0,\dot{x}_0)$，如果它存在，必为下列简化 FPK 方程之解。

$$-\dot{x}\frac{\partial p_s}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\dot{x}}\left\{\left[\left(aH_yf(H)-a\frac{H_{yy}}{H_y}-b^2H_y\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_k'g_l\right)\dot{x}+\frac{H_x}{H_y}\right]p_s\right\}+b^2\frac{\partial^2}{\partial\dot{x}^2}\left(\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_kg_lp_s\right)=0 \tag{2.4}$$

$p_s(x,\dot{x})$ 肯定是(2.4)的解，如果它满足

$$-\dot{x}\frac{\partial p_s}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{H_x}{H_y}p_s\right)=0 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left[\left(aH_yf(H)-a\frac{H_{yy}}{H_y}-b^2H_y\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g'_kg_l\right)\dot{x}p_s\right]$$

$$+b^2\frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^2}\left(\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_kg_lp_s\right)=0 \tag{2.6}$$

(2.5)表示概率环流的平衡，(2.6)表示概率势流为零。

(2.5)之通解为[6]

$$p_s=\phi(H)H_y \tag{2.7}$$

式中ϕ是任意函数。由于p及其一阶偏导数随$|x|+|\dot{x}|\to\infty$而趋于零，(2.6)意味着

$$\left(aH_yf(H)-a\frac{H_{yy}}{H_y}-b^2H_y\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g'_kg_l\right)\dot{x}p_s+b^2\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_kg_lp_s\right)=0 \tag{2.8}$$

(2.7)代入(2.8)得

$$\left[H_y^2\left(af(H)+b^2\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g'_kg_l\right)+H_{yy}\left(b^2\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_kg_l-a\right)\right]\dot{x}\phi(H)$$

$$+\dot{x}H_y^3\left(b^2\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_kg_l\right)\frac{d\phi}{dH}=0 \tag{2.9}$$

若H_{yy}/H_y^2为常数，或仅依赖于H，则(2.1)之精确平稳解由积分(2.9)得到

$$p_s(x,\dot{x})=CH_y\left(\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_k(H)g_l(H)\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\int_0^H F(u)du\right] \tag{2.10}$$

式中

$$F(u)=\frac{H_{yy}}{H_y^2}+\frac{a(f(u)-H_{yy}/H_y^2)}{b^2\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_k(u)g_l(u)} \tag{2.11}$$

而C是归一化常数

$$C^{-1}=\iint_{-\infty}^{\infty}p_s(x,\dot{x})dxd\dot{x} \tag{2.12}$$

对大多数古典动态系统$H_{yy}=0$。此时解(2.10)化为

$$p_s(x,\dot{x})=CH_y\left(\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_kg_l\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{a}{b^2}\int_0^H\frac{f(u)}{\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_k(u)g_l(u)}du\right] \tag{2.13}$$

令$b^2\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_k(H)g_l(H)=a$，而$H_{yy}/H_y^2$为任意，例如，Caughey 与 Ma[6]所考虑的

情形，只有一个白噪声外激，其强度为$2D=2a/b^2$，则(2.1)之平稳解为

$$p_s(x,\dot{x})=CH_y\exp\left[-\int_0^H f(u)du\right] \tag{2.14}$$

此与 Caughey 与 Ma[6]的结果相同。

为建立本解与 Dimentberg[8]及 Yong 与 Lin[9] 所得之解之间的关系，令 $H=\dot{x}^2/2+x^2/2$，考虑 Yong 与 Lin[9]所考察的非线性随机系统

$$\ddot{x}+f(H)\dot{x}+x=x\xi_1(t)+\dot{x}\xi_2(t)+\xi_3(t) \tag{2.15}$$

式中$\xi_j(t)$是强度为$2D_j$的独立物理高斯白噪声。在$D_1=D_2$条件下，系统 (2.15) 与下列系统具有相同的 FPK 方程

$$\ddot{x}+f(H)\dot{x}+x=\sqrt{2H}\,\xi_1(t)+\xi_3(t) \tag{2.16}$$

按解(2.13)，(2.16)的平稳概率密度为

$$p_s(x,\dot{x})=C(2D_1H+D_3)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\int_0^H \frac{f(u)}{2D_1u+D_3}du\right] \tag{2.17}$$

此与 Yong 与 Lin[9]用详细平衡概念得到的相同。若限于$f(H)=2\alpha+2\beta_1H$，解 (2.17) 变成

$$p_s(x,\dot{x})=C(2D_1H+D_3)^{K_1\beta-K_2}\exp(-\beta H) \tag{2.18}$$

式中

$$\beta=\beta_1/D_1,\ K_1=D_3/D_1,\ K_2=\alpha/D_1+1/2 \tag{2.19}$$

(2.18)与 Dimentberg[8]所得结果相同，只是符号不一样。

因此，Caughey 与 Ma[6]，Dimentberg[8]及 Yong 与 Lin[9] 所得之精确平稳解都是本文结果的特殊情形。

三、高阶广义能量依赖非线性随机系统

本节中将构造三类高阶广义能量依赖非线性随机系统的精确解。

首先，考虑下列耦合非线性随机系统

$$\begin{Bmatrix}\dot{x}_{2i-1}\\ \dot{x}_{2i}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}h_i(x_{2i})\\ -f_i(H)h_i(x_{2i})-G_i(x_1,x_3,\cdots,x_{2n-1})\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\ \sum_{k=1}^{m}g_{ik}(H)\xi_{ik}(t)\end{Bmatrix} \tag{3.1}$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

式中$\xi_{ik}(t)$是物理高斯白噪声，均值为零，相关函数$E[\xi_{ik}(t)\xi_{jl}(t+\tau)]=2D_{kl}\delta_{ij}\delta(\tau)$。假定函数$G_i(x_1,x_3,\cdots,x_{2n-1})$具有势函数$U(x_1,x_3,\cdots,x_{2n-1})$，即

$$G_i(x_1,x_3,\cdots,x_{2n-1})=\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}U(x_1,x_3,\cdots,x_{2n-1})\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{3.2}$$

而H由下式定义

$$H(X)=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_{2i}}h_i(u)du+U(x_1,x_3,\cdots,x_{2n-1}) \tag{3.3}$$

式中

$$X=[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T \tag{3.4}$$

当所有$f_i(H)$相同，且只有一个白噪声外激时，即

$$f_i(H)=f(H) \quad 和 \quad \sum_{k=1}^{m} g_{ik}(H)\xi_{ik}(t)=\xi_i(t) \tag{3.5}$$

(3.1)化为 Caughey 与 Ma[7]所考虑的一类系统。

系统(3.1)的响应是 $2n$ 维时齐马尔柯夫矢量过程。其平稳概率密度$p_s(X)$，若存在，将是下列简化 FPK 方程之正解

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{-\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}[h_i(x_{2i})p_s]+\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\left[\left(f_i(H)-\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g'_{ik}g_{il}\right)h_i(x_{2i})p_s\right.\right.$$

$$\left.\left.+G_i(x_1,x_3,\cdots,x_{2n-1})p_s\right]+\frac{\partial^2}{\partial x_{2i}^2}\left(\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_{ik}g_{il}p_s\right)\right\}=0 \tag{3.6}$$

式中$g'_{ik}=dg_{ik}(H)/dH$。

若$p_s(X)$满足下列方程，则它必是(3.6)之解

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{G_i\frac{\partial p_s}{\partial x_{2i}}-h_i(x_{2i})\frac{\partial p_s}{\partial x_{2i-1}}\right\}=0 \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\left[\left(f_i(H)-\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g'_{ik}g_{il}\right)h_i(x_{2i})p_s+\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\left(\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_{ik}g_{il}p_s\right)\right]=0 \qquad i=1,2\cdots,n \tag{3.8}$$

(3.7)表示概率环流的平衡，(3.8)表示概率势流为零。

(3.7)之通解为[7]

$$p_s=\phi(H) \tag{3.9}$$

式中ϕ是任意函数。由于p_s及其一阶偏导数随$|X|\to\infty$而趋于零，(3.8)意味着

$$\left(f_i(H)-\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g'_{ik}g_{il}\right)h_i(x_{2i})p_s+\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\left(\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_{ik}g_{il}p_s\right)=0 \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{3.10}$$

将(3.9)代入(3.10)，得

$$h_i(x_{2i})\left[\left(f_i(H)+\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g'_{ik}g_{il}\right)\phi+\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_{ik}g_{il}\frac{d\phi}{dH}\right]=0 \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{3.11}$$

假定没有一个h_i恒等于零，且比值 $f_i(H)\Big/\left(\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_{ik}g_{il}\right)$与 i 无关，即

$$\frac{f_i(H)}{\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_{ik}g_{il}}=\frac{f(H)}{\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_kg_l} \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{3.12}$$

(3.12)的物理意义是，由耗散引起的能量输出与由随机激励引起的能量输入之比在所有分量方向上相同。积分(3.11)，得(3.1)之精确平稳解。

$$p_s(X)=C\Big(\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_k(H)g_l(H)\Big)^{-\frac{1}{2}}\exp\Big[-\int_0^H\frac{f(u)}{\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_k(u)g_l(u)}du\Big] \tag{3.13}$$

式中C是归一化常数。

限于情形(3.5)，则有

$$p_s(X)=\exp\Big[-\frac{1}{D}\int_0^H f(u)du\Big]\Big/\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big[-\frac{1}{D}\int_0^H f(u)du\Big]dX \tag{3.14}$$

式中$2D$是所有独立高斯白噪声$\xi_i(t)$的强度。(3.14)就是Caughey与Ma[7]首先得到的结果。

作为第二种情形，考虑下列耦合的一阶非线性随机方程描述的系统的平稳响应

$$\dot{x}_i=-f_i(H)H_{x_i}+\sum_{k=1}^{m}g_{ik}(H)\xi_{ik}(t) \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{3.15}$$

式中$H=H(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\xi_{ik}(t)$与(3.1)中的相同。

系统(3.15)的响应是n维时齐马尔柯夫矢量过程，其平稳概率密度$p_s(X)=p_s(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，若存在，则是下列简化 FPK 方程之解

$$\sum_{i=1}^{n}\Big\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\Big(f_i(H)-\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g'_{ik}g_{il}\Big)H_{x_i}p_s\Big]+\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Big(\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_{ik}g_{il}p_s\Big)\Big\}=0 \tag{3.16}$$

若$p_s(X)$满足下列条件，则它必是(3.16)之解

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\Big(f_i(H)-\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g'_{ik}g_{il}\Big)H_{x_i}p_s+\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_{ik}g_{il}p_s\Big)\Big]=0 \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{3.17}$$

(3.17)与(3.8)类似。类似的推导可得(3.15)的精确平稳解

$$p_s(X)=C\Big(\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_k(H)g_l(H)\Big)^{-\frac{1}{2}}\exp\Big[-\int_0^H\frac{f(u)}{\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_k(u)g_l(u)}du\Big] \tag{3.18}$$

在推导(3.18)中，对(3.15)施加了条件(3.12)。(3.18)看起来与(3.13)相同，然而这两个解中的函数H是不同的。(3.1)与(3.15)的另一差别是，(3.1)中存在概率环流，而(3.15)中没有。

若条件(3.5)满足，解(3.18)化为

$$p_s(X)=C\exp[-2H/D] \tag{3.19}$$

此与 Dimentberg[10]的结果相同。

最后，考虑用下列耦合二阶方程描述的非线性随机系统

$$\ddot{x}_i+f_i(H)H_{y_i}\dot{x}_i+\frac{H_{x_i}}{H_{y_i}}=\sum_{k=1}^{m}g_{ik}(H)\xi_{ik}(t) \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{3.20}$$

式中$y_i=\dot{x}_i^2/2$，$\xi_{ik}(t)$与(3.1)中相同，$H=H(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ y_1,y_2,\cdots,y_n)$是下列$n$个耦合的保守振子的能量积分

$$\ddot{x}_i+H_{x_i}/H_{y_i}=0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{3.21}$$

此外，假定

$$H_{y_i}=G(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ \text{对所有}i \tag{3.22}$$

系统(3.20)是 Caughey 与 Ma[6]所考虑的另一类系统的推广，当条件(3.5)满足时，(3.20)化为该情形，顺便指出，由于$H_{y_i}=G(x_1,x_2,\cdots,x_n)$对所有$i$与$y_i$无关，文[6] 之(2.15)式中$H_{y_iy_i}$必为零。

应用上述方法，可得(3.20)的精确平稳解

$$p(X,\dot{X})=CG(X)\Big(\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_k(H)g_l(H)\Big)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\int_0^H\frac{f(u)}{\sum\limits_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_k(u)g_l(u)}du\right] \tag{3.23}$$

式中$X=[x_1\ x_2\cdots x_n]^T$。在推导中仍假定满足条件(3.12)。当满足条件(3.5)时，解(3.23)化为

$$p(X,\ \dot{X})=G(X)\exp\left[-\int_0^H f(u)du\right]\Big/\iint_{-\infty}^{\infty}G(X)\exp\left[-\int_0^H f(u)du\right]dXd\dot{X} \tag{3.24}$$

此与 Caughey 与 Ma[6]之结果相同。

作为(3.20)之另一特殊情形，考虑文[9]中例5。用本文符号它是

$$\ddot{x}_i+f(H)\dot{x}_i+\omega_i^2x_i=\sum_{k=1}^{n}\dot{x}_k\xi_{ik}(t)+\sum_{k=1}^{n}x_k\eta_{ik}(t)+\zeta_i(t) \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{3.25}$$

其中

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\dot{x}_i^2+\omega_i^2x_i^2) \tag{3.26}$$

而$\xi_{ik}(t)$，$\eta_{ik}(t)$及$\zeta_i(t)$是独立物理高斯白噪声，均值为零，相关函数为

$$\left.\begin{aligned}&E[\eta_{ik}(t)\eta_{ik}(t+\tau)]=2D_{1k}\delta(\tau)\\&E[\xi_{ik}(t)\xi_{ik}(t+\tau)]=2D_2\delta(\tau)\\&E[\zeta_i(t)\zeta_i(t+\tau)]=2D_3\delta(\tau)\end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

在约束$D_2=D_{1k}\omega_k^2$下，系统(3.25)与下列系统具有相同 FPK 方程

$$\ddot{x}_i+f(H)\dot{x}_i+\omega_i^2x_i=\sqrt{2H}\,\xi_{i1}(t)+\zeta_i(t) \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{3.28}$$

按解(3.23)，(3.28)从而(3.25)之精确平稳解为

$$p_s(X,\dot{X})=C(2D_2H+D_3)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\int_0^H\frac{f(u)}{2D_2u+D_3}du\right] \tag{3.29}$$

此与 Yong 与 Lin[9]的结果相同，只是符号不同。

四、解的存在与唯一性及性态

本节讨论二阶广义能量依赖非线性随机系统的精确平稳解的存在与唯一性及解之性态。对高阶系统可作类似讨论。

若解(2.10)、(2.13)或(2.14)是可归一化的，即归一化积分(2.12)存在，那它就是存在的。由(2.10)、(2.13)及(2.14)中$p_s(x,\dot{x})$的指数性质，容易证明，$p_s(x,\dot{x})$确实是可归一

化的，若存在H_0，使得

$$F(H)>0,\ \text{如果}H>H_0 \tag{4.1}$$

与

$$F(H)\sim O(H^a),\ \text{当}H\to\infty\text{时} \tag{4.2}$$

其中$a>-1$，$F(H)$由(2.11)规定．此时，由于$p_s(x,\dot{x})$及其一阶偏导数随$|x|+|\dot{x}|\to\infty$而趋于零，解(2.10)、(2.13)或(2.14)属于良态平稳解，从而是唯一的[7]．

若随$H\to\infty$，$F(H)<0$，或者，若条件(4.1)与(4.2)满足，但$a<-1$，则解(2.10)、(2.13)或(2.14)不存在，此时(2.1)在概率意义上不稳定．

在临界情形，即条件(4.1)与(4.2)以$a=-1$满足，解随$H\to\infty$的渐近表达式可具有下列形式

$$p_s(x,\ \dot{x})\sim C\left(\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_kg_l\right)^{-\frac{1}{2}}H^{-\beta}H,\qquad H\to\infty \tag{4.3}$$

其中β为正常数．解存在的临界β值相应于系统(2.1)之分叉．

若解存在，则其性态还取决于$F(H)$．例如，若$H=0$时$\sum\limits_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_kg_l=0$，则$p_s(x,\dot{x})$可退化为$\delta(x,\dot{x})$物理上这意味着，在纯随机参激情形，系统在概率意义上稳定而无振动．

为说明上述结论，考虑(2.15)之特殊情形，即

$$\ddot{x}+[a+b(x^2+\dot{x}^2)^r]\dot{x}+x=x\xi_1(t)+\dot{x}\xi_2(t)+\xi_3(t) \tag{4.4}$$

按解(2.17)，系统(4.4)之精确平稳概率密度为

$$p_s(x,\dot{x})=C(2D_1H+D_3)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\int_0^H\frac{a+b(2u)^r}{2D_1u+D_3}du\right] \tag{4.5}$$

$b>0$与$r>0$时，解(4.5)存在且唯一．若$r>0$而$b<0$，则解(4.5)不存在．$b=0$时系统(4.4)在概率意义上的稳定性取决于a之值．$a>D_1$时稳定，$a<D_1$不稳定．因此，$b=0$与$a=D_1$相应于系统(4.4)之分叉．$a>D_1$且无外激励，即$\xi_3(t)=0$时，(4.5)中$p_s(x,\dot{x})$退化为$\delta(x,\dot{x})$．

五、等价随机系统

上节中已证，在一定的条件下，一个给定的广义能量依赖非线性随机系统的平稳解是唯一的．然而，反之则不然，亦即，许多不同的随机系统，包括广义能量依赖系统与非广义能量依赖系统，可具有相同的平稳概率密度．具有相同平稳概率密度的所有随机系统可称为等价随机系统．这个等价的定义与上几节所有的不同，那里指的是具有相同FPK方程的随机系统．因而可说是广义随机系统．

对上述四类广义能量依赖随机系统的每一个，都存在一族等价随机系统．这些等价随机系统的方程可由该广义能量依赖系统在其非保守力上加上或乘以适当的x与$\dot{x}$的函数得到，加或乘的原则是保持概率流的平衡，或能量的统计平衡．例如，对二阶广义能量依赖系统(2.1)，其等价随机系统形为

$$\ddot{x}+\left[a\left(H_y f(H)-\frac{H_{yy}}{H_y}\right)+b^2\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_k'g_l\right]$$

$$\cdot\left(\frac{b^2\sum\limits_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_kg_lu_ku_l+\sum\limits_{r,s=1}^{n}I_{rs}h_rh_s}{b^2\sum\limits_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_kg_l}\right)\dot{x}-b^2\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_k'g_lu_ku_lH_y\dot{x}$$

$$-b^2\sum_{k,l=1}^{m}D_{kl}g_kg_l\frac{\partial u_k}{\partial \dot{x}}u_l-\sum_{r,s=1}^{n}I_{rs}\frac{\partial h_r}{\partial \dot{x}}h_s+\frac{H_x}{H_y}$$

$$=b\sum_{k=1}^{m}g_ku_k\xi_k(t)+\sum_{r=1}^{n}h_r\eta_r(t) \tag{5.1}$$

式中$u_k=u_k(x,\dot{x})$，$h_r=h_r(x,\dot{x})$为连续一次可微函数，$\eta_r(t)$是与$\xi_k(t)$独立的物理高斯白噪声，均值为零，相关函数$E[\eta_r(t)\eta_s(t+\tau)]=2I_{rs}\delta(\tau)$。当$u_k=1$与$h_r=0$时，(5.1)化为(2.1)。若$u_k$与$h_r$之一不是$H$函数，而是$x$与/或$\dot{x}$的函数，则(5.1)为非广义能量依赖系统，在等价族(5.1)中，(2.1)是最简单的广义能量依赖系统，可看作是该族的“中心”。

显然，对一给定非广义能量依赖非线性随机系统，如果能找到它的等价随机系统族的“中心”，就容易得到它的平稳解。这为寻求非广义能量依赖非线性随机系统的平稳解提供了一种简便的方法。例如，文[9]中例4

$$\ddot{x}+(\alpha+\beta x^2)\dot{x}+\omega_0^2(1+\xi_1(t))x=\xi_2(t) \tag{5.2}$$

式中$\xi_1(t)$与$\xi_2(t)$是独立高斯白噪声，强度分别为$2D_1$与$2D_2$。在$\alpha/\beta=D_2/(\omega_0^2D_1)$限制下，(5.2)等价于

$$\ddot{x}+\alpha\dot{x}+\omega_0^2x=\xi_2(t) \tag{5.3}$$

这是一个广义能量依赖线性系统。(5.3)从而(5.2)的平稳解为

$$p_s(x,\dot{x})=C\exp\left[-\frac{\alpha}{2D_2}(\dot{x}^2+\omega_0^2x^2)\right] \tag{5.4}$$

(5.4)首先由 Yong 与 Lin[9] 得到，它表示高斯概率密度。这表明，在参激与外激的适当组合下，在高斯激励下的非线性系统的响应可为高斯过程。这个未期的结果可用等价随机系统的概念加以解释。

六、结　语

本文构造了四类广义能量依赖非线性随机系统的精确平稳解。证明了这些解为更多的非广义能量依赖非线性随机系统所共有，以前发表的精确平稳解的结果皆为本文结果的特殊情形。进一步推广是可能的，尤其对高阶非线性随机系统。由于解的指数性质，其存在与唯一性可容易地确定。平稳解在可靠性估计中是很有用的。具有精确平稳解的非线性随机系统可作为另外没有精确平稳解而解的性态相近的非线性随机系统的最佳代替者，并以前者之解作为后者的近似解。

参考文献

[1] Grandall, S. H. and W. Q. Zhu, Random vibration: A survey of recent developments, *J. Appl. Mech.*, 50th Anniversary Volume, **50** (1983), 953—962.

[2] Caughey, T. K., Nonlinear theory of random vibration, *Advances in Applied*

Mechanics, **11** (1971), 209—253.

[3] Roberts, J. B., Response of nonlinear mechanical systems to random excitation, Part 1: Markov method, *The Shock and Vibration Digest*, **13**, 4 (1981), 17—28.

[4] Roberts, J. B., Response of nonlinear mechanical systems to random excitation, Part 2: Equivalent linearisation and other methods, *The Shock and Vibration Digest*, **13**, 5 (1981), 15—29.

[5] Roberts, J. B., Techniques for non-linear random vibration problems, *The Shock and Vibration Digest*, **16**, 9 (1984), 3—14.

[6] Caughey, T. K. and F. Ma, The exact steady-state solution of a class of non-linear stochastic systems, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **17** (1982), 137—142.

[7] Caughey, T. K. and F. Ma, The steady-state response of a class of dynamical systems to stochastic excitation, *J. Appl. Mech.*, **49** (1982), 629—632.

[8] Dimentberg, M. F., An exact solution to a certain non-linear random vibration problem, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **17** (1982), 231—236.

[9] Yong, Y. and Y. K. Lin, Exact stationary-response solution for second order nonlinear systems under parametric and external white-noise excitations, *J. Appl. Mech.*, **54** (1987), 414—418.

[10] Dimentberg, M. F., *Nonlinear Stochastic Problems of Mechanical Vibrations*, Nauka, Moscow (1980).

Exact Solutions for Stationary Responses of Several Classes of Nonlinear Systems to Parametric and/or External White Noise Excitations

Zhu Wei-qiu

(*Dept. of Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou*)

Abstract

The exact solutions for stationary responses of one class of the second order and three classes of higher order nonlinear systems to parametric and/or external white noise excitation are constructed by using Fokker-Planck-Kolmogorov equation approach. The conditions for the existence and uniqueness and the behavior of the solutions are discussed. All the systems under consideration are characterized by the dependence of nonconservative forces on the first integrals of the corresponding conservative systems and are called generalized-energy-dependent (G. E. D.) systems. It is shown that for each of the four classes of G. E. D. nonlinear stochastic systems there is a family of non-G. E. D. systems which are equivalent to the G. E. D. system in the sense of having identical stationary solution. The way to find the equivalent stochastic systems for a given G. E. D. system is indicated and, as an example, the equivalent stochastic systems for the second order G. E. D. nonlinear stochastic system are given. It is pointed out and illustrated with example that the exact stationary solutions for many non-G. E. D. nonlinear stochastic systems may be found by searching the equivalent G. E. D. systems.