

粘弹性 Timoshenko 梁的动力学普遍方程 及其动态特性分析*

肖灿章 计伊周 常保平

(陕西机械学院, 1988年10月12日收到)

摘 要

本文用直接方法在时域内推导了粘弹性 Timoshenko 梁的控制微分方程, 它同时计及了材料的拉伸粘性和剪切粘性。为了测定标准线性固体的复模量和三参数, 对有机玻璃 (PMMA) 和尼龙 6 (PCL) 试件成功地应用了强迫振动梁技术。通过大量数值计算, 对粘弹性 Timoshenko 梁的动力特性, 特别是阻尼特性进行了分析。结果表明, 材料粘性对结构的动力特性, 尤其是对阻尼有较大影响。对于高粘性材料, 其动力学性质用标准线性固体模型来描写是合适的。

一、引 言

近年来, 由高分子聚合物材料制成的结构以及和纤维复合制成的结构得到广泛应用。这类材料由于其强烈的时间、温度和频率效应使得传统的弹性理论显得不相适应, 而必须代之以更复杂的粘弹性理论。目前, 虽然粘弹性理论体系已经基本完备, 但仍有许多专题尚待进一步研究。粘弹性结构动力理论就是其中之一。在涉及这类问题的文献中, 以研究梁的振动问题居多。但它们都存在若干不足之处。首先, 从所建立的控制微分方程上看, 有些方程异常复杂^[1,2,3], 物理意义含糊, 给深入分析带来困难; 有的方程由于从一开始就引入了具体模型, 被迫作了简化, 失去一般性^[4]; 有些方程形式呈挠度与转动两变量耦合^[5,6], 使用不方便。其次, 从所采用的粘弹性模型来看, 不少文献都把材料作为 Kelvin-Voigt 固体处理^[1,4,6,7,8], 众所周知, Kelvin-Voigt 模型不符合实际固体的材料力学行为, 特别是在动力学领域内它不能准确地描述材料的阻尼特性。最后, 从材料粘弹性描述的完整上看, 有些文献所得出的控制方程都没能完整地反映材料粘弹性^[7,9,10,11], 只是一个近似方程。此外, 上述文献的研究存在两个共同问题, 一是没有充分研究粘弹性梁的动力特性, 特别是其阻尼特性; 二是都没有对其理论计算进行实验验证。

本文运用微分算子方法直接推导了粘弹性 Timoshenko 梁的动力学普遍方程, 推导中同时保持了拉伸和剪切粘性, 所得到的方程是完整精确的, 适合于任何一种粘弹性模型。其次, 本文作者利用强迫振动梁的实验技术成功地测量了材料的复模量以及标准线性固体模型

* 蒋咏秋推荐。

的粘弹性参数并用于本文中分析粘弹性梁的动力特性，特别是阻尼特性。通过大量计算结果所得的曲线图比较了工程梁与Timoshenko梁、标准线性固体模型与Kelvin-Voigt模型之间的异同，并得到了粘弹性频率与弹性频率之间、阻尼与频率之间以及阻尼、频率与材料粘性之间的关系。

二、粘弹性Timoshenko梁的动力学普遍方程

设拉伸粘弹性和剪切粘弹性的本构关系分别为

$$P_0(\sigma) = Q_0(\varepsilon) \quad (2.1)$$

$$P_1(\tau) = Q_1(\gamma) \quad (2.2)$$

其中 P_0 , P_1 , Q_0 和 Q_1 是微分算子, σ , ε , τ 和 γ 分别是拉压应力及应变和剪切应力及应变。如果假设拉伸和剪切服从线粘弹性规律, 则微分算子形式为

$$P_i = \sum_{k=1}^m (p_i)_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} \quad (i=0, 1) \quad (2.3)$$

$$Q_i = \sum_{k=1}^n (q_i)_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} \quad (i=0, 1) \quad (2.4)$$

用算子 P_0 , P_1 分别作用于梁截面的弯矩 M 和剪力 V 上, 可得

$$P_0(M) = \int_A Q_0(\varepsilon) \cdot z dA \quad (2.5)$$

$$P_1(V) = \int_A Q_1(\gamma) dA \quad (2.6)$$

由 Timoshenko 梁理论, 梁变形后的斜率可记为

$$\partial w / \partial x = \phi + \gamma \quad (2.7)$$

拉伸应变为

$$\varepsilon = -z \partial \phi / \partial x \quad (2.8)$$

将(2.7)、(2.8)式代入(2.5)和(2.6), 可得

$$P_0(M) = -I Q_0(\partial \phi / \partial x) \quad (2.9)$$

$$P_1(V) = A Q_1(\partial w / \partial x - \phi) \quad (2.10)$$

这两个式子实际上就是粘弹性 Timoshenko 梁的广义本构关系。设记 ρ 为材料的体积密度, 则考虑转动惯量的动平衡关系是

$$\partial V / \partial x - \rho A \partial^2 w / \partial t^2 + f = 0 \quad (2.11)$$

$$\partial M / \partial x + \rho I \partial^2 \phi / \partial t^2 - V = 0 \quad (2.12)$$

以复合算子 $P_0 P_1$ 作用于(2.11)和(2.12), 然后将(2.9)和(2.10)代入, 经整理后得到

$$A P_0 Q_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - A P_0 Q_1 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \rho A P_0 P_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + P_0 P_1 (f) = 0 \quad (2.13)$$

$$I P_1 Q_0 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + A P_0 Q_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) - \rho I P_0 P_1 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) - A P_0 Q_1 (\phi) = 0 \quad (2.14)$$

这就是粘弹性 Timoshenko 梁动力学普遍方程的耦合形式。而去耦形式的粘弹性 Timoshenko

梁的动力学普遍方程可由此出发, 经过代换运算和整理化简得出如下:

$$\begin{aligned} I Q_0 Q_1 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) - \rho I (P_0 Q_1 + P_1 Q_0) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + \rho A P_0 Q_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \\ + \rho^2 I P_0 P_1 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \right) = P_0 Q_1 (f) - \frac{I}{A} P_0 Q_0 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \\ + \frac{\rho I}{A} P_0 P_1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} I Q_0 Q_1 \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \right) - \rho I (P_0 Q_1 + P_1 Q_0) \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + \rho A P_0 Q_1 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \\ + \rho^2 I P_0 P_1 \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial t^4} \right) = P_0 Q_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

注意到(2.15)和(2.16)的齐次形式完全相同, 因此, 在研究梁的动力学特性时, 只需取其中一个研究。

在方程(2.15)中, 如不计横向剪切和转动惯量的影响, 即令 $\rho I = 0$, $Q_1 \rightarrow \infty$, 则有

$$I Q_0 (\partial^4 w / \partial x^4) + \rho A P_0 (\partial^2 w / \partial t^2) = P_0 (f) \quad (2.17)$$

这就是粘弹性工程梁的动力学方程^[11]。如果再令 $Q_0 = E$, $P_0 = 1$, 上式即退化成弹性工程梁的动力学方程。如在方程(2.15)中令 $Q_0 = E$ 和 $Q_1 = kG$ (k 为剪切修正系数) 和 $P_0 = P_1 = 1$, 则方程就退化成弹性 Timoshenko 梁的动力学方程,

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho I \left(1 + \frac{E}{kG} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \\ = f - \frac{EI}{kGA} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\rho I}{kGA} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

由此可以看出方程(2.15)、(2.16)是一个普遍方程, 它同时计及了拉伸和剪切的粘性, 又包括了横向剪切和转动惯量的影响, 适用于任何一个粘弹性模型, 由此出发可导出各种特定条件下粘弹性 Timoshenko 梁的控制微分方程。

三、材料的粘弹性模型

上述动力学普遍方程适合于任何一个粘弹性模型, 但在实际应用时必须选择一种既简单、又能较好地反映材料特性的模型。考虑到 Kelvin-Voigt 模型在反映实际材料特性中的不合理性和多参数模型的不切实际, 因为这些参数的实验确定非常困难, 本文选用了标准线性固体模型来描述材料的粘弹性性质。困难在于直至目前尚未有一个成熟的方法确定此模型的三个参数, 即材料的松弛模量 E_R , 蠕变系数或应变松弛时间 τ_σ 和松弛系数或应力松弛时间 τ_ϵ 。

众所周知, 对跨高比较大的试件来说, Euler-Bernoulli 梁的基频振动不论和实验值还是和 Timoshenko 梁理论值都相当符合。我们即利用这一点, 在 Euler-Bernoulli 梁理论的基础上, 通过实测梁基频振动的复模量反算出 E_R , τ_σ 和 τ_ϵ 。

如以 $E^*(\omega)$ 代表材料的复模量, ω 为激振力频率, 则利用实部和虚部可将 $E^*(\omega)$ 表示为

$$E^*(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega) \quad (3.1)$$

可以证明, 在梁横向振动的各阶共振频率下, 复模量的实部 $E'(\omega)$, 虚部 $E''(\omega)$ 和材料松弛

模量 E_R 满足下列关系:

$$(E' - E_R)^2 + E''^2 = R_n^2 \quad (3.2)$$

$$E'' / (E' - E_R) = \operatorname{tg} \phi_n \quad (3.3)$$

式中 ϕ_n 为各阶相位滞后角, R_n 为一与各阶振型有关的常数.

(3.2)式说明在各阶共振频率下, 复模量的实部 $E'(\omega)$ 和虚部 $E''(\omega)$ 构成一组同心圆, 圆心在 $(E_R, 0)$ 处, 半径 R_n 随模态而变化^[12].

通过实测求得 E' 和 E'' 后, 可以经过换算得到标准线性固体材料的复模量表达式

$$\tilde{E}^* = E_R \left[\frac{1 + \omega^2 \tau_\sigma \tau_s}{1 + \omega^2 \tau_s^2} + i \frac{\omega(\tau_\sigma - \tau_s)}{1 + \omega^2 \tau_s^2} \right] \quad (3.4)$$

令其和(3.1)相等, 即可解出

$$\tau_s = 1 / \omega_n \operatorname{tg} \phi_n \quad (3.5)$$

$$\tau_\sigma = \tau_s + \frac{1 + \omega_n^2 \tau_s^2}{\omega_n} \cdot \frac{E''}{E_R} \quad (3.6)$$

E_R 的测量最为简单, 可利用共振频率直接获得. 事实上, E_R 就是动模量, 它和固有频率 ω_n 的关系为

$$\omega_n^2 = \lambda_n^4 E_R I / \rho A \quad (3.7)$$

式中 λ_n 称为振型特征值, 它定义为

$$\lambda_n^4 = \omega_n^{(4)} / \omega_n \quad (3.8)$$

ω_n 是振型函数, 其右上角记号表示关于变量 x 的导数的阶数.

对两种材料所作的试件, 即一种是有机玻璃(PMMA)、另一种是尼龙6(PCL)所作的实验结果表明 PMMA 材料不宜用标准线性固体模型来描述其力学行为, 这个结论和余家钰等人得出的结论^[13] 完全一样. 而 PCL 材料在不同频率下测得的三个参数较为一致, 这说明实验方法是可靠的和 PCL 材料完全可以用标准线性固体模型描述.

有关剪切状态下这些相应的量的测量问题是一个有待解决的问题. 鉴于各向同性的弹性材料存在着关系式 $E = 2(1 + \mu)G$, 根据相应性原理, 我们设想各向同性的粘弹性材料也应有类似的关系, 只不过拉伸模量和剪切模量都应该是复数. 至于泊松比 μ , 存在许多争论. 由于在用静拉伸方法测 PCL 和 PMMA 材料的泊松比时, 发现蠕变过程中的不同时刻获得的泊松比很接近, 因此, 我们在以后的分析中都将泊松比取为常数.

经过对上述 PCL 材料制成的试件在悬臂梁条件下的模态实测, 并将实测结果与用上述方法所得三参数进行理论计算的结果对比, 总的情况说明实验所得的三参数是可靠的^[12].

四、粘弹性简支 Timoshenko 梁的动力特性分析

各种边界条件下粘弹性 Timoshenko 梁的振型和复频率方程已由 T. C. Huang 导出^[2]. 对于简支-简支梁, 其复频率方程为

$$s^4 + \frac{1}{\rho} \left[\frac{b}{G_1} + \left(\frac{1}{G_0} + \frac{1}{G_1} \right) \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right] s^2 + \frac{1}{\rho^2 G_0 G_1} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 = 0 \quad (4.1)$$

式中 $b = A/l$, s 为 Laplace 变量, G_0 和 G_1 分别是弯曲复柔度和剪切复柔度, l 为梁长.

将标准线性固体的复柔度方程

$$G(s) = (1 + \tau_s s) / E_R (1 + \tau_\sigma s) \quad (4.2)$$

代入(4.1), 经过整理, 即可得出以标准线性固体为模型的粘弹性简支-简支 Timoshenko 梁的复频率方程

$$\begin{aligned} \Omega^6 + \frac{1}{c} \left(\frac{1}{\tau_s} + \frac{1}{\tau'_s} \right) \Omega^5 + \frac{1 + (\beta_n c)^2 \tau_s \tau'_s + (\gamma_n c)^2 \tau'_s \tau_s}{c^2 \tau_s \tau'_s} \Omega^4 \\ + \frac{\beta_n^2 (\tau_s + \tau'_s) + \gamma_n^2 (\tau'_s + \tau_s)}{c \tau_s \tau'_s} \Omega^3 + \frac{a(\beta_n^2 + \gamma_n^2) + \gamma_n^4 c^2 \tau_s \tau'_s}{a c^2 \tau_s \tau'_s} \Omega^2 \\ + \frac{\gamma_n^4 (\tau_s + \tau'_s)}{a c \tau_s \tau'_s} \Omega + \frac{\gamma_n^4}{a c^2 \tau_s \tau'_s} = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

式中 $c = \sqrt{E_R/\rho}$, $a = E_R/G_R$, $\Omega = s/c$, $\gamma_n = n\pi/l$, $b = A/I$, $\beta_n = \sqrt{(b + \gamma_n^2)/a}$. 另外, 凡符号右上角带“'”的表示剪切松弛时间, 否则为拉伸松弛时间, G_R 表示修正剪切松弛模量. Ω 也表示复频率, 与 s 不同的只是除了一个常数 c , 可称为无量纲复频率.

设采用的基本计算参数如下:

梁长 $l = 0.1\text{m}$, 梁高 $h = 0.01\text{m}$, 材料密度 $\rho = 1150\text{kg/m}^3$, 泊松比 $\mu = 0.42$, 松弛模量 $E_R = 2.3\text{GPa}$, 松弛系数 $\tau_s = 0.001159\text{s}$, 蠕变系数 $\tau_\sigma = 0.001606\text{s}$, 剪切修正系数 $k = 5/6$.

上述具有实系数的六次代数方程用林士谔-Bairstow 方法求数值解. 为了便于分析梁的动力特性, 画出了以固有频率、模态阻尼和其它参数的关系曲线, 见图 1 至图 9, 这里我们引用了粘性比 VR 的概念, 它定义为

$$VR = \Delta\tau / (\Delta\tau) \quad (4.4)$$

$\Delta\tau = \tau_\sigma - \tau_s$, 它表征材料的粘性, 而 $(\Delta\tau)$ 则为尼龙 6(PCL) 的实测蠕变系数和实测松弛系数之差. 因此, VR 表示以 $(\Delta\tau)$ 为基准的材料相对粘性大小. VR 愈小, 说明材料粘性愈小, 反之则粘性愈大.

五、阻 尼

由图 1 可以看出阻尼是依赖于频率的, 且其随频率的变化曲线存在一峰值, 其位置和峰值邻域曲线的陡缓程度与材料粘性有关. 当材料粘性大时, 峰值出现于低频处且峰较陡峻; 反之则阻尼峰值在高频处出现且峰较平缓.

在阻尼达到极大值前的一个频带内, 曲线基本是直线上升的, 大致符合 Kelvin-Voigt 模型规律, 这个频带宽受材料粘性控制, VR 小则频带较宽. 这就可以解释为什么 Kelvin-Voigt 模型可以适用于金属一类低粘性材料而不适用于聚合物一类高粘性材料. 这个特点从图 2 上看得更加清楚. 值得提出的是, 当 $VR = 0.1$ 时, 阻尼峰值出现的频率比基频还小, 所以该曲线实际上是将峰值以前的那部分截去了. 总而言之, 阻尼最大值的位置随 VR 增大逐渐向左移动, 故增大材料粘性可有效地抑制低频振动.

各阶模态阻尼比关于材料粘性的关系曲线也有一高峰存在, 见图 3. 低阶模态阻尼的峰值在大粘性处发生, 高阶模态阻尼的峰值在小粘性处发生. 这也意味着增加材料粘性对低频振动有抑制作用, 但对抑制高频振动并无好处. 但工程实际中危害较大的是低频振动, 因此利用高粘性阻尼材料进行振动和噪声控制确实是有理论基础的.

图 4 所示为阻尼与梁跨高比的关系曲线. 它表明当梁跨高比小时, 低阶模态阻尼较大, 而当梁跨高比大时, 高阶模态阻尼较大. 这就可以通过改变梁的几何尺寸以调节各阶模态阻尼比大小, 来满足工程的需要. 有趣的是, 不论在那种情况下, 阻尼比的最大值都是一个固

定值,且不超过 0.1,这个峰值不随频率、梁的几何尺寸和材料性质而变。这是一个值得进一步研究的问题。

横向剪切和转动惯量对阻尼的影响表示于图 5 中。图中纵坐标 ξ_T/ξ_E 为 Timoshenko 梁和 Euler 梁的阻尼比。从图中看出,横向剪切和转动惯量对阻尼的影响在于增大高频阻尼值。但在梁跨高比增大时,这种影响随之减小。如果考虑到梁的跨高比一般大于 5,则图 5 表明这种影响可以略去不计,特别是对基频时阻尼的影响更是微乎其微。

六、固有频率

在图 6 至图 8 中,其纵坐标都是粘弹性固有频率与弹性固有频率之比。这三幅图表明梁的粘弹性频率总是大于其弹性频率。它们之间的差异在低频、材料粘性较小和梁较长时很小;随着频率增高、材料粘性增大和跨高比减小时逐渐增大。

横向剪切和转动惯量对粘弹性频率的影响和对弹性频率的影响几乎是共同的,也就是说,粘性与横向剪切和转动惯量之间没有什么耦合影响。图 9 表明,横向剪切与转动惯量对粘弹性频率的影响在低阶模态及梁跨高比较大时比较小,反之则影响较大。这个结论与这两个因素对弹性梁所产生的影响是一致的。

七、结 论

本文所建立的粘弹性 Timoshenko 梁动力学普遍方程适用于任何一个粘弹性模型、同时计及了拉伸和剪切粘性,又包括了横向剪切和转动惯量的影响,因此可以从此出发推导出现有文献中的每一种控制微分方程,因而是迄今为止最完备的控制微分方程。

理论分析和实验结果都表明,标准线性固体模型可以较好地描述聚合物一类的粘弹性材料, Kelvin-Voigt 模型则不适宜于描述这类粘弹性材料。

理论分析还表明,阻尼、频率都和材料粘性有关。其得出的变化规律对工程设计和理论都是有意义的。

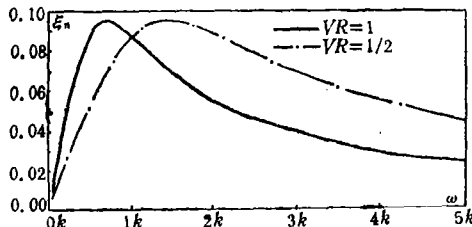


图 1 模态阻尼比和弹性频率的关系曲线

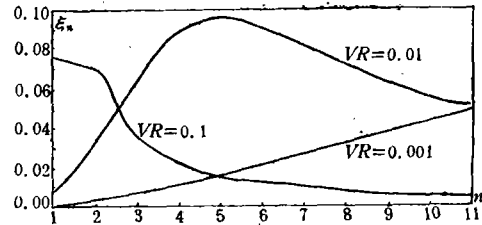


图 2 阻尼随振动模态的变化曲线

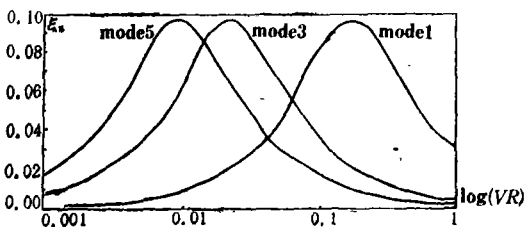


图 3 阻尼与粘性比的对数的关系曲线

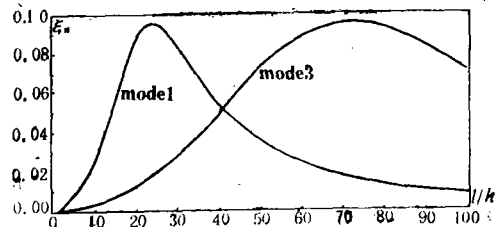


图 4 阻尼随梁的跨高比的变化曲线

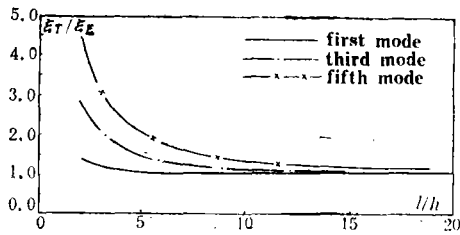


图5 横向剪切与转动惯量对阻尼的影响

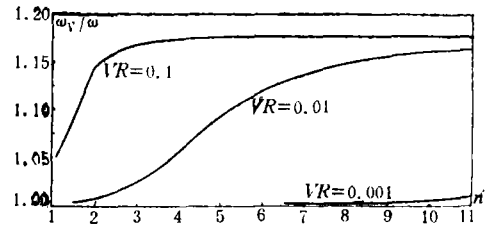


图6 粘弹性频率与弹性频率的关系曲线之一

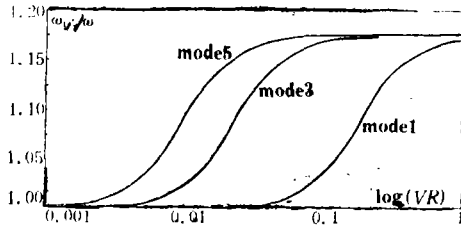


图7 粘弹性频率与弹性频率的关系曲线之二

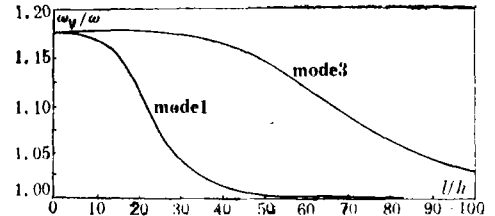


图8 粘弹性频率与弹性频率关系曲线之三

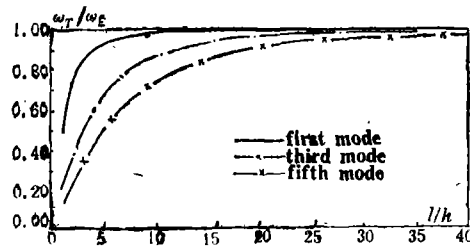


图9 横向剪切与转动惯量对粘弹性频率的影响

参 考 文 献

- [1] Pan, H. H., Vibration of a viscoelastic Timoshenko beam, *J. Engng. Mech. Div.*, **92**, 2 (1966), 213—234.
- [2] Huang, T. C. and C. C. Huang, Free vibrations of viscoelastic Timoshenko beams, *J. Appl. Mech.*, **38**, 2 (1971), 515—521.
- [3] Paipetis, S. A., P. S. Theocaris and C. A. Stassinakis, Complex moduli derived from the vibrations of a Timoshenko beam, *Acoustica*, **44**, 1 (1980), 27—34.
- [4] 计伊周、王忠民、刘协会、刘宪达, 粘弹性 Timoshenko 梁的自由振动, *力学与实践*, **5** (1987), 16—19.
- [5] Lee, C. H., Forced lateral vibration of a uniform cantilever beam with internal and external damping, *J. Appl. Mech.*, **27**, 3 (1960), 551—556.
- [6] Tobe, Toshimi and Keijin Sato, Lateral vibrations of cantilever beams considering the effects of rotating inertia, shear flexibility and viscosity, *Bulletin of the JSME*, **16**, 94 (1973), 696—704.
- [7] 孙家驹、金开骅, 粘弹性梁的动力响应, *应用数学和力学*, **2**, 2 (1981), 235—241.
- [8] Newman, M. K., Viscous damping in flexural vibration of bars, *J. Appl. Mech.*, **26**, 3 (1959), 367—376.
- [9] Baker, W. E., W. E. Woolan and D. Young, Air and internal damping of thin cantilever beams, *Int. J. Mech. Sci.*, **9**, 4 (1967), 743—766.

- [10] 郭瑞锋、奚肖凤、华玉, 粘弹性梁的动力分析, 地震工程与工程振动, 3, 2 (1983), 16—30.
- [11] 常保平、肖灿章、计伊周, 粘弹性基础上的粘弹性梁的动力特性, 陕西机械学院学报, 4, 4 (1988), 97—106.
- [12] 常保平, 用振动梁方法测量粘弹性材料的复模量和粘弹性参数, 常保平硕士学位论文第四节, 陕西机械学院 (1988).
- [13] 余家钰、张聪, 粘弹性模型材料的频率响应, 土木工程学报, 20, 1 (1987), 28—36.

General Dynamic Equation and Dynamical Characteristics of Viscoelastic Timoshenko Beams

Xiao Can-zhang Ji Yi-zhou Chang Bao-ping

(*Research Division of Engineering Mechanics, Shanxi
Institute of Mechanical Engineering, Xi'an*)

Abstract

In this paper, a governing differential equation of viscoelastic Timoshenko beam including both extension and shear viscosity is developed in the time domain by direct method. To measure the complex moduli and three parameters of standard linear solid, the forced vibration technique of beam is successfully used for PCL and PMMA specimens. The dynamical characteristics of viscoelastic Timoshenko beams, especially the damping properties, are derived from a considerable number of numerical computations. The analyses show that the viscosity of materials has great influence on dynamical characteristics of structures, especially on damping, and the standard linear solid model is the better one for describing the dynamic behavior of high viscous materials.