

# 边界元方法在开槽自紧管应力 分析中的应用\*

宋顺成 张玉诚 冯德振

(内蒙古金属材料研究所, 1989年1月13日收到)

## 摘 要

本文用边界元方法研究了开槽自紧管内部的应力状态, 得到了有实际意义的计算结果。

## 一、引 言

开槽自紧管的应力分析对研究自紧管的强度及疲劳寿命有重要意义。由于该问题不能直接给出分析解, 因此必须求助于数值解。本文采用边界元直接方法对100%过应变开槽自紧管进行了研究, 给出了二维状态下的应力数值分析。

## 二、边界积分基本方程

对于二维弹性体 $\Omega$ , 内部任意一点 $s$ 的位移满足下列Somigliana等式。

$$u_i(s) = - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, Q) u_j(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, Q) P_j(Q) d\Gamma \quad (2.1)$$

其中 $u_i(s)$ 为 $\Omega$ 内任意一点 $s$ 的位移矢量,  $u_j(Q)$ ,  $P_j(Q)$ 分别是边界 $\Gamma$ 上的位移和面力,  $u_{ij}^*(s, Q)$ ,  $P_{ij}^*(s, Q)$ 分别是 $s$ 点处 $x_i$ 方向的单位载荷所引起的边界上 $Q$ 点 $x_j$ 方向的位移和面力。二阶张量 $u_{ij}^*$ ,  $P_{ij}^*$ 由以下Kelvin基本解给出。

$$u_{ij}^* = \frac{1}{8G\pi(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu)\delta_{ij} \ln\left(\frac{1}{r}\right) + r_{,j}r_{,i} \right\} \quad (2.2)$$

$$P_{ij}^* = - \frac{1}{4\pi r(1-\nu)} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] - (1-2\nu)(n_j r_{,i} - n_i r_{,j}) \right\} \quad (2.3)$$

对于平面应变, 在(2.2)及(2.3)中 $\nu$ 为材料的泊松比,  $G$ 为剪切模量,  $\delta_{ij}$ 为Kronecker张量,  $r$ 是 $s$ 到 $Q$ 的距离。即,

\* 赵兴华推荐。

$$r = (r_i r_i)^{1/2}, \quad r_i = x_i(Q) - x_i(s), \quad r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(Q)} = \frac{r_i}{r} \quad (2.4)$$

$n_i$  是  $Q$  点处  $\Gamma$  的外法线单位矢量分量。

假定  $S \in T$ , 取  $s \rightarrow S$  得到如下的边界积分方程。

$$C_{ij}(S)u_j(S) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(S, Q)u_j(Q)d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(S, Q)P_j(Q)d\Gamma \quad (2.5)$$

其中,

$$C_{ij}(S) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\epsilon}} P_{ij}^*(S, Q)d\Gamma \quad (2.6)$$

$\Gamma_{\epsilon}$  是  $\Omega_{\epsilon}$  的边界, 而  $\Omega_{\epsilon}$  是在  $\Omega$  内的以  $S$  为中心以  $\epsilon$  为半径的圆弧域。当  $\Gamma$  为平滑边界时,

$$C_{ij}(S) = \delta_{ij}/2 \quad (2.7)$$

由(2.5)式确定边界上的未知位移或未知面力以后, 则由下式给出  $\Omega$  内任意一点  $s$  的应力。

$$\sigma_{ij}(s) = \int_{\Gamma} D_{ijkl}(s, Q)P_k(Q)d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ijkl}(s, Q)u_k(Q)d\Gamma \quad (2.8)$$

其中三阶张量  $D_{ijkl}$ ,  $S_{ijkl}$  分别由下式给出。

$$D_{ijkl} = \frac{1}{4\pi r(1-\nu)} \{ (1-2\nu)(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \} \quad (2.9)$$

$$S_{ijkl} = \frac{G}{2\pi r^2(1-\nu)} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} [ (1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k} ] + 2\nu(n_i r_{,j}r_{,k} + n_j r_{,k}r_{,i}) + (1-2\nu)(2n_k r_{,i}r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \quad (2.10)$$

### 三、边界元基本方法

边界积分方程(2.5)一般不能求得分析解, 为了求得(2.5)式的数值解, 现将  $\Gamma$  离散为  $m$  个单元。与有限元方法中的等参元相类似, 对每个单元内的坐标、位移、面力分别进行插值,

$$\mathbf{x} = N\mathbf{x}^{(l)}; \quad \mathbf{u} = N\mathbf{u}^{(l)}, \quad \mathbf{P} = N\mathbf{P}^{(l)} \quad (3.1)$$

其中  $\mathbf{x}^{(l)}$ ,  $\mathbf{u}^{(l)}$ ,  $\mathbf{P}^{(l)}$  为第  $l$  单元内所有结点构成的坐标矢量、位移矢量及面力矢量。 $N$  为自然坐标  $\eta$  表示的形状函数矩阵。

对于线性单元,  $N_1 = -(1-\eta)/2$ ,  $N_2 = (1+\eta)/2$ ,

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

对于二次单元,  $N_1 = -\eta(1-\eta)/2$ ,  $N_2 = (1-\eta)(1+\eta)$ ,  $N_3 = \eta(1+\eta)/2$ ,

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

将(3.1)式代入方程(2.5), 对于每个单元结点  $S$  就有,

$$C(S)u(S) + \sum_{i=1}^m \left[ \int_{\Gamma_i} P^* N d\Gamma \right] u^{(i)} = \sum_{i=1}^m \left[ \int_{\Gamma_i} u^* N d\Gamma \right] P^{(i)} \quad (3.4)$$

其中  $P^*$ ,  $u^*$  分别为  $2 \times 2$  矩阵。  $d\Gamma$  需要从整体的笛卡尔坐标转换为统一的自然坐标。

$$d\Gamma = |J| d\eta \quad (3.5)$$

其中,

$$|J| = \left[ \left( \frac{dx_1}{d\eta} \right)^2 + \left( \frac{dx_2}{d\eta} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.6)$$

于是,

$$\int_{\Gamma_i} P^* N d\Gamma = \int_{-1}^1 P^* N |J| d\eta = \sum_{k=1}^K |J|_k W_k (P^* N)_k \quad (3.7)$$

$$\int_{\Gamma_i} u^* N d\Gamma = \int_{-1}^1 u^* N |J| d\eta = \sum_{k=1}^K |J|_k W_k (u^* N)_k \quad (3.8)$$

其中  $K$  为积分选择的高斯点个数,  $W_k$  为高斯积分权因子。

将(3.7)、(3.8)代入到(3.4),

$$\begin{aligned} C(S)u(S) + \sum_{i=1}^m \left[ \sum_{k=1}^K |J|_k W_k (P^* N)_k \right] u^{(i)} \\ = \sum_{i=1}^m \left[ \sum_{k=1}^K |J|_k W_k (u^* N)_k \right] P^{(i)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

(3.9)式即为离散的边界积分方程。对于  $m$  个结点, 就有  $2m$  个方程。即,

$$(C + \hat{H})u = GP \quad (3.10)$$

其中矢量  $u$ ,  $P$  包含所有结点的位移和面力。拟对角阵  $C$  迭加到  $\hat{H}$  内得到  $H$ , 于是有

$$Hu = GP \quad (3.11)$$

求解(3.11)需要考虑问题的对称性。由(3.11)可以求得所有结点的未知位移或未知面力, 然后由(2.8)求得任意内点的应力。

#### 四、边界元数值解与精确解的比较

为了考察边界元数值解的精度, 利用我们自己编制的二维弹性边界元通用程序 EBEC—2D (Elastic Boundary Element Code—2Dimensions) 对受均匀内压的厚壁圆筒进行了计算。计算结果列于表1。

从计算结果看, 边界元方法具有较好的计算精度, 能满足工程计算的要求。

#### 五、边界元方法对开槽自紧管的应力分析

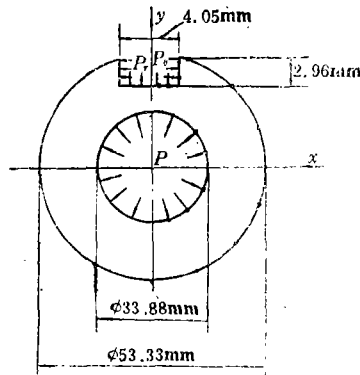
开槽自紧管的最终应力状态决定于自紧管开槽以后残余应力的“松弛”, 加载应力, 以及原始残余应力分布。残余应力的“松弛”及加载应力由边界元方法计算, 而原始残余应力

表1

厚壁圆筒边界元解与精确解的比较

单位 kg, mm

几何尺寸及内压	半径r	边界元解			精确解			相对误差(%)		
		$-\sigma_r$	$\sigma_\theta$	$\tau_{r\theta}$	$-\sigma_r$	$\sigma_\theta$	$\tau_{r\theta}$	$\sigma_r$	$\sigma_\theta$	$\tau_{r\theta}$
内径a=52.5	57.0	32.909	55.043	0.000	32.165	55.488	0.000	2.31	0.8	—
	65.0	21.835	44.761	0.000	22.041	45.364	0.000	0.9	1.3	—
外径b=110.5	75.0	13.461	36.438	0.000	13.653	36.976	0.000	1.39	1.45	—
	85.0	7.930	30.909	0.000	8.047	31.370	0.000	1.45	1.46	—
内压P=40	100.0	2.631	25.597	0.000	2.576	25.901	0.000	2.14	1.2	—



$\nu=0.3$ ,  $G=8 \times 10^3 \text{ kg/mm}^2$   
 $\sigma_s=120 \text{ kg/mm}^2$ ,  $P=40.5 \text{ kg/mm}^2$

图 1

分布可根据自紧过程的过应变率由解析式给出。

图 1 给出了过应变为 100% 的自紧管开槽后的几何形状, 加载面力以及为计算残余应力“松弛”给定的槽部的附加面力。

对于 100% 过应变的自紧管, 原始残余应力为

$$\sigma_r^{R1} = \sigma_s \left[ \ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{a^2}{b^2 - a^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \right] \quad (5.1)$$

$$\sigma_\theta^{R1} = \sigma_s \left[ 1 + \ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{a^2}{b^2 - a^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{b}{r^2}\right) \right] \quad (5.2)$$

其中  $\sigma_s$  为自紧管材料的拉伸强度,  $a$  为自紧管的内半径,

$b$  为自紧管的外半径,  $r$  为自紧管的任意半径。

为计算残余应力“松弛”给定槽部的附加面力为

$$P_r = -\sigma_r^{R1} \quad (5.3)$$

$$P_\theta = -\sigma_\theta^{R1} \quad (5.4)$$

利用边界元程序 EBEC-2D 对图 1 进行应力分析, 首先得到开槽自紧管加载和残余应力“松弛”的结果。然后把该结果与 (5.1)、(5.2) 式迭加即得到开槽自紧管的最终应力状态。

$$\sigma_r = \sigma_r^B + \sigma_r^{R1} \quad (5.5)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta^B + \sigma_\theta^{R1} \quad (5.6)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^B \quad (5.7)$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} [\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 - 6\tau_{r\theta}^2]} \quad (5.8)$$

其中  $\sigma_r^B$ ,  $\sigma_\theta^B$ ,  $\tau_{r\theta}^B$  为边界元计算的应力分量,  $\sigma_r^{R1}$ ,  $\sigma_\theta^{R1}$  分别由 (5.2)、(5.1) 给出。  $\sigma_{eq}$  为开槽自紧管加载后的最终相当应力。

计算结果示于图 2, 图 3, 图 4。

图 2, 图 3, 图 4 分别表示  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_{eq}$  沿  $Oy$ ,  $Ox$  轴方向的分布。从中可以看出, 自紧管开槽以后, 在开槽处内表面附近的应力状态, 但是开槽处外表面附近的应力状态 ( $\sigma_\theta, \sigma_{eq}$ ) 远大于未开槽处外表面附近的应力状态。实际上在开槽处外表面附近已经超过了自紧管的材料强度, 使该处材料发生了塑性变形。这与疲劳试验开槽处外表面首先开裂的试验结果一致,

图 5 表示出自紧管沿  $y$  轴开两个对称槽以后与单开槽自紧管加载时相当应力的比较。从中可以看出自紧管沿  $y$  轴开两个对称槽后比单开槽自紧管降低了开槽处的相当应力，对开槽自紧管的强度有一定改善。因此该计算结果对自紧管的开槽设计有一定参考意义。

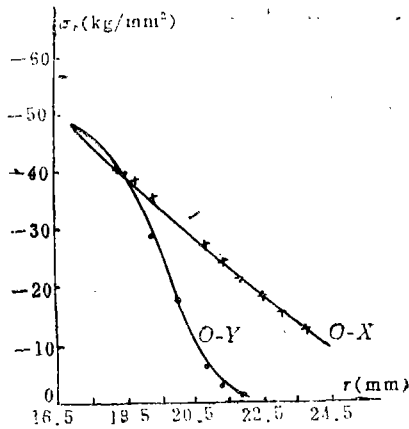


图 2

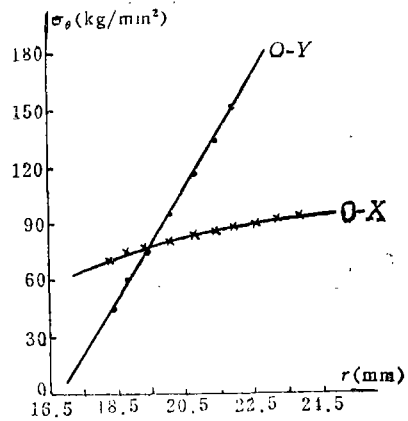


图 3

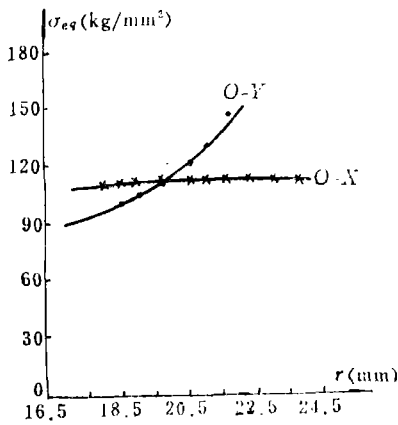


图 4

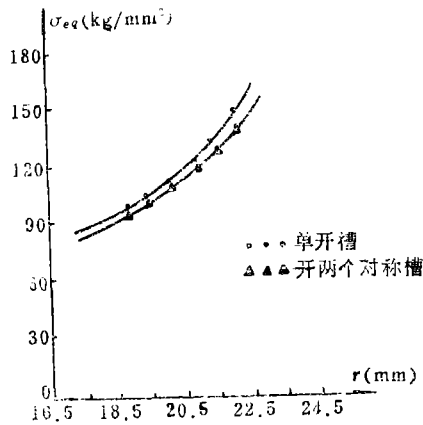


图 5

参 考 文 献

- [1] Brebbia, C. A., Boundary element methods, *Proceedings of the 3rd International Seminar*, CML Publications, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1981).
- [2] Davison, T. E., et al., The autofrettage principle as applied to high strength light weight gun tubes, Technical Report, Watervhet Arsenal WVT-RI-5907 Rev. 1, Oct. (1959).
- [3] 严更, 用边界元法解弹性力学问题, 上海力学, 4 (1983).

## The Application of Boundary Element Method in Stress Analysis of Autofretted Tube with Notch

Song Shun-cheng Zhang Yu-cheng Feng De-zhen

*(Inner Mongolia Institute of Metallic Materials, Baotou)*

### Abstract

In this paper, the boundary element method is applied to investigate the internal state of stress of autofretted tube with notch and the calculated results are important in the practical design.