

# 带有摩擦的单边接触大变形问题的研究 (II)——非线性有限元解及应用

尚 勇 陈至达

(中国矿业大学北京研究生部, 1988年11月2日收到)

## 摘 要

在文[1]所建立的增量变分方程的基础上, 本文建立了单边接触弹塑性大变形问题的非线性有限元增量方程; 进一步阐述了基于拖带坐标系的大变形有限元方法的特点; 建立了实用的大变形接触模型。作为应用实例, 计算了悬臂梁、厚圆板的弹性接触大变形和金属圆环弹塑性接触大变形问题, 得到了令人满意的计算结果。

## 一、拖带坐标法非线性有限元概述

对于连续体力学, 变形过程中各力学量基准位形的选择是非常重要的问题。对于大变形增量有限元方法, 目前大多数常用的描述方法有两种: 一是完全 Lagrange (T. L.) 法, 一是修正的 Lagrange (U. L.) 法。T. L 法以变形前位形为基准来描述变形过程中各增量步中的力学量, 一般 T. L 法采用卡氏直角坐标系, 相共轭的应力应变为第二 Piola-Kirchhoff 应力和 Green 应变 (应变率), 平衡迭代以变形前位形为基准。U. L 方法以当前增量步的初始端、或曰以第  $i-1$  个增量步上的位形为基准来描述当前第  $i$  个增量步上的各量。它实质上是每个增量步上的 Lagrange 法, 但其与 T. L 法主要区别在于参考位形在每个增量步都修正, 减小了位形转换的误差。

拖带坐标系的概念在文[5][6]中已有较系统的介绍及应用。它由空间固定坐标系与随体的拖带坐标系两个参考系所组成, 后者象网格一样镶嵌在变形体上, 随变形体变形而变化。由于一般变形体的非均匀变形, 我们可利用拖带的当地基矢来合理地描述变形体中的局部变形场。

随着变形增加, 多数单元将产生大位移、大转动、大应变, 在此情况下, 照搬或略加修改地套用小变形有限元中的一些方法是不尽合理的。如何提高大变形问题计算效率和精度是当前计算力学界所关注的重要问题之一, 不少研究者着重从计算方法上来改进, 这只是其途径之一。然而, 应用合理的变形描述方法和正确的有限变形理论是增大增量步、提高计算速度和精度的一有效途径, 基于拖带坐标系的大变形有限元方法正是在此前提下提出的。

该方法的核心是以 S-R 定理<sup>[5]</sup>导出的结果作为有限应变与局部转动的定义。S-R 定理已逐步应用于求解橡胶、金属、板壳、岩体等工同工程领域中的大变形力学问题, 在解题可行

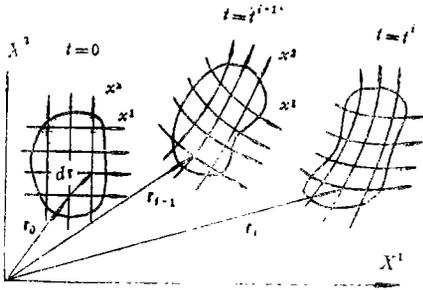


图 1

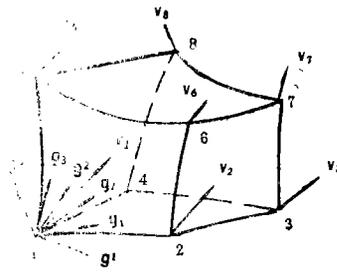


图 2

性，计算精度和速度等方面都有明显的改进，更进一步显示了该理论的合理性。除此，拖带坐标法有限元还有以下主要特点：

1. 利用拖带坐标值在变形过程中不变的特点，可对离散了的单元在任意位形中进行插值，通过适当的数学变换，可以推导出等参元理论中的局部坐标。也可以为，在拖带坐标法有限元中，使用了固定坐标、拖带坐标和单元局部坐标三种坐标系，其变换关系为：

$$X = Q^K x = Q^K Q^0 \xi$$

以上， $Q^K$ 表示运动变换， $Q^0$ 表示几何变换， $X$ 为定系坐标， $x$ 为拖带坐标， $\xi$ 为单元局部坐标。

2. 图2所示是变形后任一单元， $g_i$ 、 $g^i$ 为一对共轭基矢。在拖带坐标系中，节点位移和速度可分别表示成：

$$u = u^j g_j$$

$$v = v^j g_j$$

除了类同 T. L., U. L. 方法可以用节点位移（速度）在固定坐标系中的分量作为基本插值量外，还可将节点位移（速度）在实时拖带坐标系中的分量作为基本插值量，对于大变形、大转动问题，这样做可使计算求解过程简化，并可增大增量步。

3. 以当前增量步末端位形为基准，外力和应力在该位形上的增量叠加公式已在本文第 I 部分列出<sup>(1)</sup>，同理，位移亦可表示为：

$$u = u \bar{F}^{-1} i + \Delta u$$

其中

$$\bar{F} i = F_i^{(i)} F^{-1} i,$$

$F_i^{(i)}$ 是当前第(i)增量步中的变形梯度，该位形可以通过逼近求得。

4. 在变形过程中，外载随位形的变化得到修正，克服了 T. L., U. L. 法“死载荷”之不足。

5. 对于接触、摩擦问题，当接触边界与拖带坐标某一坐标面（线）相符时，切向位移和力可沿拖带坐标系基矢方向分解，这样避免了接触边界上的坐标转换和“曲线斜约束”的处理。

## 二、非线性有限元增量方程

## 1 非线性几何矩阵

在实时位形中, 单元内任一点速度、位移、拖带和固定坐标值都可用节点参数表示:

$$\left. \begin{aligned} v^i &= \sum_{l=1}^m N_l(\xi^j) \dot{v}_l^* \\ x^i &= \sum_{l=1}^m N_l(\xi^j) x_l^* \\ X^i &= \sum_{l=1}^m N_l(\xi^j) X_l^* \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

以上 $N(\xi^i)$ 是形函数。

据S-R定理, 有限应变速率物理分量为:

$$\hat{S}_i^j = \frac{1}{2} (\dot{\theta}^i \parallel_j + \dot{\theta}^j \parallel_i^T) \quad (2.2)$$

应变率的矩阵形式如下 (以下省略标号“ $\wedge$ ”):

$$\{\dot{S}\} = \{\dot{S}_1^1, \dot{S}_2^2, \dot{S}_3^3, 2\dot{S}_1^2, 2\dot{S}_2^3, 2\dot{S}_1^3\}^T \quad (2.3)$$

又:

$$v^i \parallel_j = v_{,j}^i + \Gamma_{mj}^i v^m \quad (2.4)$$

$\Gamma_{mj}^i$  为Christoffel 符号。

利用(2.1)~(2.4)不难推得:

$$\{\dot{S}\} = [B] \{\dot{v}\} = ([B]_L + [B]_N) \{\dot{v}\} \quad (2.5)$$

$\{\dot{v}\}$  为单元节点速度沿实时拖带坐标系的物理分量,  $[B]_L$  为线性几何矩阵, 对此我们已熟知,  $[B]_N$  为非线性几何阵, 其第  $i$  个子矩阵可写成:

$$[B_i]_N = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{31}^1 \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 & \Gamma_{32}^2 \\ \Gamma_{13}^3 & \Gamma_{23}^3 & \Gamma_{33}^3 \\ \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{32}^1 + \Gamma_{31}^2 \\ \Gamma_{13}^2 + \Gamma_{12}^3 & \Gamma_{23}^2 + \Gamma_{22}^3 & \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{32}^3 \\ \Gamma_{13}^1 + \Gamma_{11}^3 & \Gamma_{23}^1 + \Gamma_{21}^3 & \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{31}^3 \end{bmatrix} \cdot N_i \quad (2.6)$$

其中 $\Gamma_{ij}^k$  不用数值方法求得, 其一般表示式为:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left[ \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right] \quad (2.7)$$

当  $l=i$  (或  $l=j$ ) 时:

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2} g^{il} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} \quad (2.8)$$

$$g_{ij} = \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \frac{\partial X^l}{\partial x^j} \delta_{kl}$$

$$\frac{\partial X^i}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^m N_k(\xi^k), {}_j X_i^*$$

$$\frac{\partial^2 X^k}{\partial x^r \partial x^j} = \sum_{l=1}^m N_l(\xi^k), {}_r \left( \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right)_l$$

$$\frac{\partial g_{i,j}}{\partial x_r} = 2 \frac{\partial^2 X^k}{\partial x^r \partial x^i} \cdot \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \delta_{ki}$$

在实际计算中, 还应注意变换关系:

$$\{N_i(\delta^i), {}_j\} = \{1/\sqrt{g_{(j,j)}}\}^T [J]^{-1} \{N_i(\xi^i), \xi^i\} \quad (2.9)$$

其中  $[J] = [\partial x^i / \partial \xi^j]$

以上是速度在实时拖带坐标系中的逆变分量为基本插值量推出了几何矩阵, 也可以在拖带坐标系中使用速度在固定坐标系中的分量导出非线性几何矩阵。

由关系:

$$v = v^j g_j = \bar{v}^i I_i$$

不难得到:

$$v^i ||_j = \bar{v}^i F^{-1}{}_j$$

由几何方程(2.2)可得:

$$\{\dot{S}\} = [B] \{\bar{v}\} \quad (2.10)$$

非线性矩阵  $[B]$  的第  $i$  个子矩阵为:

$$[B_i] = \begin{bmatrix} N_{i,1} r_{11} & N_{i,1} r_{21} & N_{i,1} r_{31} \\ N_{i,2} r_{12} & N_{i,2} r_{22} & N_{i,2} r_{32} \\ N_{i,3} r_{13} & N_{i,3} r_{23} & N_{i,3} r_{33} \\ N_{i,2} r_{11} + N_{i,1} r_{12} & N_{i,2} r_{21} + N_{i,1} r_{22} & N_{i,2} r_{31} + N_{i,1} r_{32} \\ N_{i,3} r_{12} + N_{i,2} r_{13} & N_{i,3} r_{22} + N_{i,2} r_{23} & N_{i,3} r_{32} + N_{i,2} r_{33} \\ N_{i,3} r_{11} + N_{i,1} r_{13} & N_{i,3} r_{21} + N_{i,1} r_{23} & N_{i,3} r_{31} + N_{i,1} r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

其中  $r_{ij}$  是  $[F]^{-1}$  中的元素,

$$[F] = \left[ \frac{\partial X}{\partial x} \right]$$

### 三、弹塑性物性矩阵

本文主要采用两种形式的弹塑性大变形物性方程, 这里给出用于有限元计算的矩阵形式。

#### 1. 单参数弹塑性速率型物性方程

陈至达提出了单参数形式的非线性物性方程<sup>[6]</sup>

$$\dot{\tau}_i = 2G(1-\beta)\dot{\epsilon}_i$$

$$\dot{\sigma}_k^i = \frac{E}{1-2\nu} \dot{S}_k^i \quad (3.1)$$

$\nabla_j^i$  为应力偏量客观速率,  $r_j^i$  为有限应变偏量速率. 改写成更一般形式:

$$\nabla_j^i = C_{ij}^{ik} \dot{S}_k^i \quad (3.2)$$

$$\text{其中 } C_{ij}^{ik} = \frac{E}{1-\nu} \left[ (1-\beta) \delta_i \delta_j^k + \left( \frac{\nu}{1-2\nu} + \frac{\beta}{3} \right) \delta_i \delta_j^i \right] \quad (3.3)$$

$$\beta = 1 - \frac{1}{3G} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

写成矩阵形式:

$$\{\nabla\} = [C] \{\dot{S}\}$$

若  $\beta=0$ ,  $[C]$  即为弹性物性矩阵.

## 2. $J_2$ 有限变形流动理论<sup>[8]</sup>:

$$\nabla_j^i = \frac{E}{1-\nu} \left[ \delta_i \delta_j^k + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_i \delta_j^i - \frac{\alpha}{q} \tau_j^i \tau_k^i \right] \dot{S}_k^i \quad (3.4)$$

该方程前边部分即相应(3.3)  $\beta=0$  情形. 写成矩阵形式为:

$$\{\nabla\} = ([C]_e - [C]_p) \{\dot{S}\} \quad (3.5)$$

$[C]_e$  为弹性矩阵,  $[C]_p$  为塑性矩阵,

$$[C]_p = \frac{E}{1+\nu} \frac{\alpha}{q} \{\tau\} \{\tau\}^T \quad (3.6)$$

$$q = (1+\nu) \frac{h}{E} + \frac{2}{3} \bar{\sigma}^2$$

$$\frac{1}{h} = \left( \frac{3}{2\bar{\sigma}} \right)^2 \left[ \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right], \quad E_t = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}}$$

$\alpha$  是弹塑性标志符号,  $\alpha = \begin{cases} 0 & (\text{弹性}), \\ 1 & (\text{塑性}). \end{cases}$

缩合应力客观速率公式<sup>[7]</sup>

$$\nabla_j^i = \dot{\sigma}_j^i + \sigma_j^i \dot{S}_k^i - \sigma_k^i \dot{S}_j^i \quad (3.7)$$

我们将其写成更方便表达式

$$\dot{\sigma}_j^i = \nabla_j^i + A_{ij}^{ik} \dot{S}_k^i \quad (3.7a)$$

$$A_{ij}^{ik} = \frac{1}{2} (\sigma_k^i \delta_j^k + \delta_k^i \sigma_j^k - \sigma_j^i \delta_k^k - \delta_j^i \sigma_k^k)$$

这样, 用应力应变物质速率表示的弹塑性大变形物性方程的矩阵表达式为:

$$\{\dot{\sigma}\} = ([C]_e - [C]_p + [A]) \{\dot{S}\} = [C] \{\dot{S}\} \quad (3.8)$$

## 四、接触问题计算模型

若假定  $A$  是主动接触体 (刚体),  $B$  是被接触体,  $C$  为不动刚性基座. 在  $A$  上固定一刚性坐标系  $\{y_A\}$ , 使之随  $A$  而运动, 变形体  $B$  上镶嵌有拖带坐标系  $\{x^i\}$  (如图6,8), 为统一三个接触体, 选用一空间固定坐标  $\{X\}$ , 三套坐标系之间存在着——对应的变换关系. 设刚体

A接触边界曲面相对于坐标 $\{y\}$ 的方程是:

$$y^3 = \psi(y^1, y^2)$$

转换到固定坐标系 $\{X\}$ 中, 有

$$X^i = X^i(y^1, y^2, \psi(y^1, y^2), t)$$

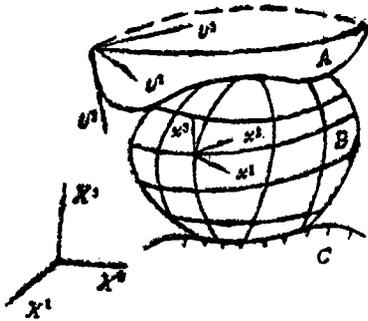


图3 接触模型示意

若给定刚体A的运动 $\{\Delta u^i\}$ , 即位移在固定坐标系中的增量分量, 则

$$X_A^i = X_A^{(t-1)i} + \Delta u_A^i \quad (4.1)$$

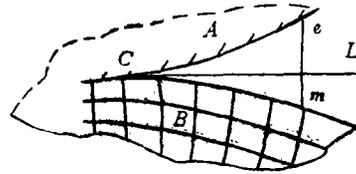


图 4

同理, 在变形体边界上即相应产生位移 $\Delta_B^{(t)}$ 待接触边界上的相应点的固定坐标值为:

$$X_B^i = X_B^{(t-1)i} + \Delta u_B^i \quad (4.2)$$

接触边界可分为两种, 一是已接触区, 二是待接触区。在待接触区中, 重点问题是求出接触判据。接触变形约束条件一般表示为:

$$n_j \Delta u_A^j - n_j \Delta u_B^j - g \leq 0 \quad (4.3)$$

其中  $g$  为两接触边界对应点  $m, e$  之间的间距可通过以下方法定义: 在变形体待接触边界上取点  $m$ , 设  $L$  是接触临界上  $C$  的内公切面, 过  $m$  点切面垂线在两接触体间的长度  $\overline{me}$  定义为  $m$  点对应的间距, 即  $g = \overline{me}$ , 它是空间坐标和时间的函数。另之:

$$N = \frac{\overrightarrow{me}}{|\overline{me}|} = (n^1, n^2, n^3)$$

为切面垂线的方向余弦。

在接触区中, 相对应接触点的接触判据为:

$$g = 0 \quad (4.4)$$

接触点相接触后, 其运动状态将发生改变, 由原来的独立自由度变为从属自由度, 即运动受到接触体A或刚性基座C的边界曲面的约束。对于大变形接触边界的处理, 很大程度上是在程序设计技巧上体现, 这里不多赘述。

## 五、非线性有限元增量方程

在文[1]中, 我们已得到带有摩擦单边接触大变形问题的变分不等式:

$$a(v, v' - v) - \psi_b(v') - \psi_b(v) + \left[ \frac{1}{\varepsilon} (K_0 v' - \dot{g}), v'_n - v_n \right] \leq (f, v' - v) + (b(v_n), v' - v) \quad (\forall v' \in U) \quad (5.1)$$

式中  $\psi_k(v')$  代表摩擦功率, 一般它是非凸非可微泛函。对于摩擦滑动规律及其物性方程的形式尚待进一步系统地研究。为了求解之便, 将变分不等式化成一般意义上的变分方程, 我们采用以下近似。设摩擦服从 Coulomb 定律, 则:

$$\psi_k(v') = \int_{\Gamma_{c_2}} \{-\mu\sigma_n\} |v'_\tau| d\Gamma_{c_2}$$

若把  $\sigma_n$  用前一个增量步上的值  $\sigma_n^{(i-1)}$  代替, 则  $\psi_k(v)$  变得有限可微。另之接触边界变化项对变分的影响, 可以在程序设计技巧上加以考虑, 而不出现在变分公式中。这样, 式(5.1)可改写成:

$$a(v, \delta v) + \left(\frac{1}{\varepsilon} (k_i \Delta u^i - g), \delta v_n\right) = (f, \delta v) + \int_{\Gamma_{c_2}} \mu \sigma_n^{(i-1)} \delta |v_\tau| d\Gamma_{c_2} \quad (5.2)$$

其具体形式为(参照[1]):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \bar{C}_{kj}^{ii} \dot{S}_j \delta S_j d\Omega \Delta t + \int_{\Gamma_{c_1}} \frac{1}{\varepsilon} (k_i \Delta u^i - g) \delta v_n d\Gamma_{c_1} \\ &= \int_{\Gamma_f} \overset{(i)}{T}_j \delta v^j d\Gamma_f + \int_{\Omega} \rho f_j \delta v^j d\Omega - \int_{\Omega} \overset{(i-1)}{\sigma} \{ \bar{F}_i^k \cdot \bar{F}^{-1} \}_j \delta S_j d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_{c_2}} \mu \sigma_n \delta |v_\tau| d\Gamma_{c_2} \end{aligned} \quad (5.3)$$

其中  $\Gamma_c = \Gamma_{c_1} + \Gamma_{c_2}$ ,  $\Gamma_{c_1}$  为待接触区,  $\Gamma_{c_2}$  为已接触区,  $\bar{F}_i^k = F_i^k F^{-1}$ ,  $\bar{F}_i^k = \frac{\partial X^k}{\partial x^i}$ 。

在当前增量中, 拖带坐标系中的力分量同初始位形力分量的关系为:

$$\overset{(i)}{T}_j = \overset{(i)}{T}_k F_i^k, \quad \rho f_j = \rho f_k F_i^k \quad (a)$$

“i”表示相对当前位形, “.”表示相对初始位形。由于变形梯度  $F_i^k$  的引入, 这里考虑了位形变化对载荷的影响。将上两式代入(5.3)式, 整理并消去  $\delta\{v\}$ , 可写成矩阵形式如下:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Delta t \{v\}^T [B]^T [C] [B] d\Omega + \int_{\Gamma_{c_1}} \frac{1}{\varepsilon} \{\Delta u\}^T [\tilde{N}]^T \{q\} \{q\}^T [\tilde{N}] d\Gamma_{c_1} \\ &= \int_{\Gamma_f} \{ \overset{(i)}{T} \}^T [F]^T [N] d\Gamma_f + \int_{\Omega} \{ \rho f \}^T [F]^T [N] d\Omega \\ &- \int_{\Omega} \{ \overset{(i-1)}{\sigma} \}^T [\bar{F}]^T [B] d\Omega + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{c_1}} g \{q\} [\tilde{N}] d\Gamma_{c_1} \\ &+ \int_{\Gamma_{c_2}} \mu \{ \sigma_n \}^T \{r\} [\tilde{N}] d\Gamma_{c_2} \end{aligned}$$

上式中  $[\tilde{N}]$  是接触边界上的形函数矩阵,  $\{q\}$  和  $\{r\}$  分别为接触边界上的法向和切向坐标转换向量。方程两边转置, 则可得到带有接触摩擦边界的弹塑性大变形增量有限元基本方程组:

$$([\overset{(i)}{K}] + [\overset{(i)}{K}]_e) \{\Delta u\} = \{R\} - \{Q\} - \{R\}_e - \{R\}_f \quad (5.4)$$

其中  $[K]$  为几何、材料非线性耦合的刚度矩阵,  $[K]_e$  为惩罚刚度矩阵;  $\{R\}$ 、 $\{Q\}$ 、 $\{R\}_e$  和  $\{R\}_f$  分别为外载荷、(i-1)增量步上的应力、惩罚项和摩擦力所贡献的等效节点力向量。

## 六、计 算 实 例

根据前几章列出的增量有限元公式及边界条件的处理方法，作者编制了非线性有限元程序，并对一些弹塑性大变形接触问题进行了计算，以验证理论和方法的可行性。

### 1. 悬臂梁弹性大变形接触问题

梁的几何尺寸如图6，弹性模量：

$$E=1000\text{kg/cm}^2, \nu=0.3$$

本例按平面应力单元计算，用给定分布力的增量变刚度法求解，从初始变形到自由端刚接触用了4个增量步，本例共用了20个增量步。初始尺寸、网格划分及变形过程中几何位形见图6。

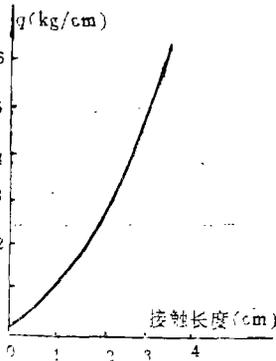


图5 梁接触长度随外载变化曲线

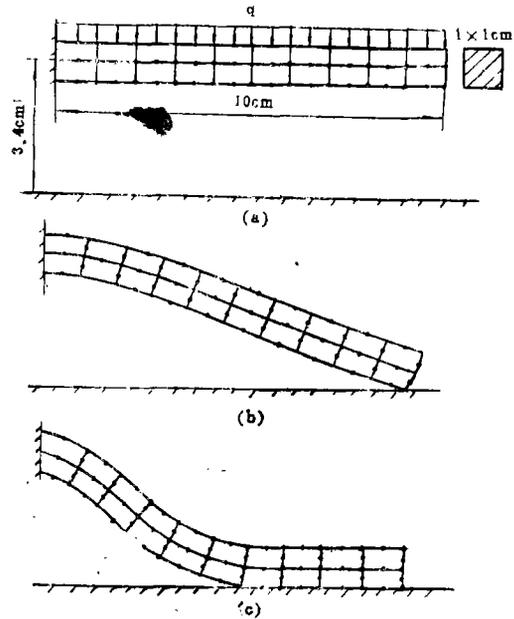


图6 不同时刻梁接触大变形计算位形图  
(摩擦系数 $\mu=0.1$ )

### 2. 弹性厚圆板大变形接触问题

圆板几何尺寸见图7(a)，弹性模量 $E=1000\text{kg/cm}^2$ ， $\nu=0.3$ 。本例采用轴对称连续体单元。板上作用均布压力，假定板采用水平方向可滑动支座支承，本例用给定外力增量变刚度法求解，共计算了20个增量步。

### 3. 金属圆环径向受压弹塑性大变形接触问题

该例是弹塑性大变形单边接触问题的一个典型例，也是一个典型的材料、几何和边界条件非线性耦合问题。1980年 Yella 和 Reid<sup>[2]</sup>曾对不同尺寸的金属圆环径向压缩失稳破坏问题进行了实验研究。Telay 和 Becker<sup>[3]</sup>采用速率相关塑性本构方程用有限元方法对该问题进行过计算，本文采用文[3]的初始数据对该问题进行了计算，并与[3]的结果与[2]中的实验现象进行了比较，计算结果与文[3]及实验结果符合良好。本文采用的单元数仅为[3]的一半，本文增量步数为108个，少于文[3]的增量步数，每步迭代最多3次，在80万次/秒中型计算机(UNIVAC)上，CPU时间不到40分钟。从计算结果见，圆环外边界与刚性板之间

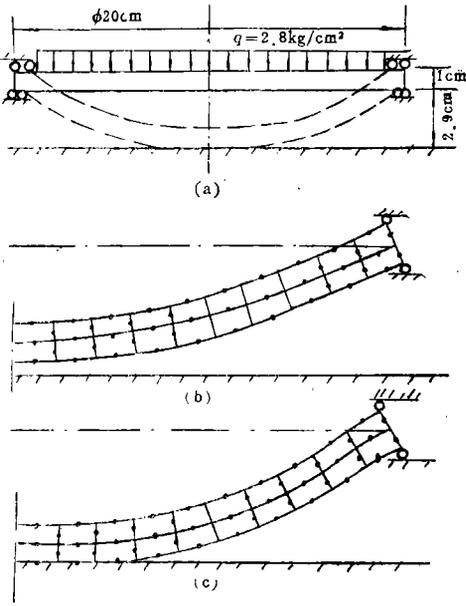


图7 圆板弹性大变形接触计算位形图

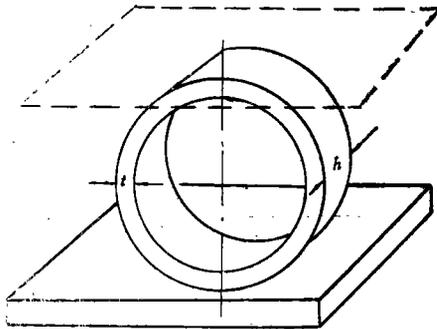


图8 圆环径向受压示意图

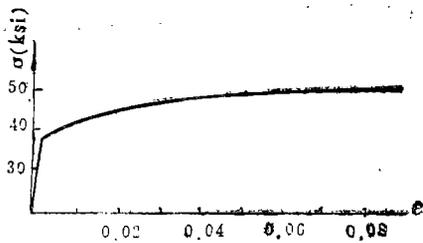


图9  $\sigma$ - $\epsilon$ 实验曲线<sup>[3]</sup>

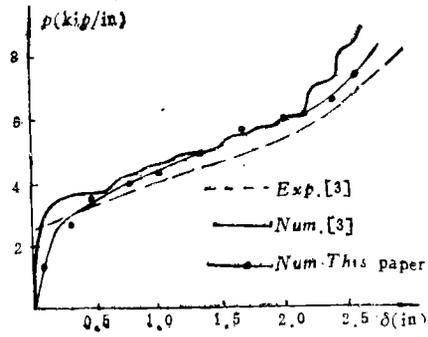


图10 载荷-径向位移曲线

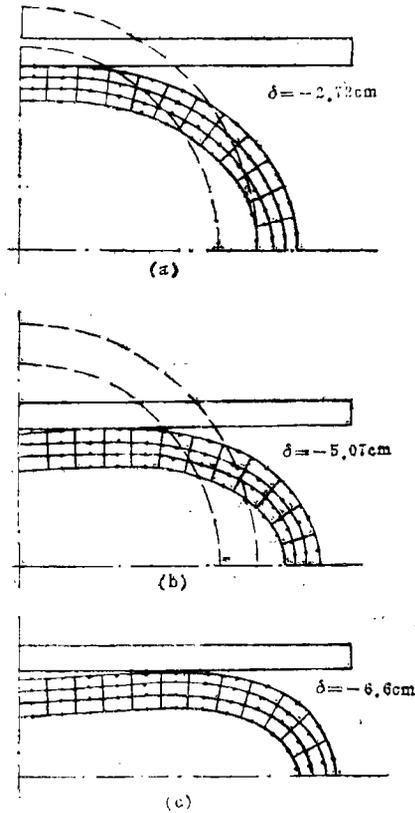


图11 不同时刻圆环受压变形计算位形

的相互作用为:

接触(变边界)→摩擦→分离→破坏,这是较复杂的边界效应问题。作者曾计算过橡胶圆环径向受压大变形问题<sup>[9]</sup>,从结果可见,橡胶圆环没有象金属圆环那样明显的边界分离失稳现象。

圆环几何尺寸:

外直径 $OD=11.43\text{cm}$ , 壁厚 $t=0.866\text{cm}$ , 轴向厚度 $h=1\text{cm}$ .

材料常数:

$E=1890000\text{kg/cm}^2(=27000\text{ksi})$ ,  $\nu=0.3$ ,  $\sigma$ - $\epsilon$ 曲线见图9. 最大径向位移:  $\delta=6.6\text{cm}$ .

## 七、结 束 语

与现有大变形有限元分析中的 Lagrange、修正的 Lagrange 法相比, 拖带坐标描述法用于大变形有限元理论是更为合理有效的方法. S-R定理克服了经典有限变形理论中的 Green 应变和极分解定理的缺陷, 合理地定义了相互协调的有限应变和转动. 本文基于以上理论和方法, 在大变形增量变分问题、非线性有限元理论等方面做了进一步研究和完善, 计算效率优于现有程序, 尤其对于弹性大变形(几何非线性占主要地位时)效果更为显著.

对大变形接触边界问题从理论和计算模型上进行了研究, 较简便有效地求解了一些变边界接触大变形问题, 拓展了计算程序在工程中的应用范围. 然而, 塑性大变形物性方程、摩擦滑动定律及物性关系、单边接触大变形不等式的解法等方面仍存在不少问题, 尚需今后深入研究, 以改进完善.

## 参 考 文 献

- [1] 尚勇、陈至达, 带有摩擦的单边接触大变形问题的研究(I)——增量变分方程, 应用数学和力学, 10, 12 (1989), 1049—1058.
- [2] Reddy, T. Y., S. R. Reid, Phenomena associated with the crushing of metal tubes between rigid plates, *Int. J. Solids and Struct.*, 16 (1980), 545—562.
- [3] Taylor, L.M. and E.B. Becker, Some computational aspects of large deformation, rate-dependent plasticity problems, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, 41 (1983), 251—278.
- [4] Oden, J.T. and G.F. Carey, *Finite Element*, Vol. V, Prentice-Hall, Inc.(1984).
- [5] 陈至达, 《有理力学》, 中国矿业大学出版社 (1988).
- [6] 尚勇、带有接触摩擦边界弹塑性大变形问题的理论和有限元分析, 中国矿业大学博士学位论文 (1987).
- [7] 尚勇、陈至达, 论拖带坐标系中应力的客观速率, 应用数学和力学, 10, 2 (1989), 95—104.
- [8] Neale, K. W., Phenomenological constitutive laws in finite plasticity, *SM Archives*, 6 (1981), 79—125.
- [9] Shang Yong (尚勇) and Chen Zhi-da (陈至达), Analysis of large elastic-plastic deformation by finite element method using co-moving coordinate, *Proc. ICNM, Shanghai* (Ed by Chien Wei-zang (钱伟长)), Science Press (1985), 1294—1301.

# On Unilateral Contact Large Deformation Problem with Friction——( II ) Nonlinear Finite Element Technique and Its Application

Shang Yong    Chen Zhi-da

(*Beijing Graduate School, China University of Mining, Beijing*)

## Abstract

Based on the variational equation derived in ref.[1], nonlinear incremental F.E. equation is formulated for unilateral contact elastic and plastic large deformation problems. A new technique—co-moving coordinate finite element method is introduced, and a practical mathematical model for large deformation contact problem is described. To show the effectiveness of the method, problems of contact large deformation of cantilever beam, circular plate, as well as metal ring are computed. Compared with experiments, the results show good agreements.