应用数学和力学，第11卷第1期（1990年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于L_2内函数的导数及其Fourier变式的注记*

周晓钟　刘兴权

（齐齐哈尔师范学院）　（东北财经大学）

摘　要

本文修补了[1]中若干定理的漏洞，并且得到了一些有益的新结果，例如定理4等．

如无特殊声明，文中的数均为复数，函数指实变复值函数．我们假定：出现在积分号下的每一个函数在任一有限区间上是可积的，而所论积分系指勒贝格积分．用 $L_p(-\infty,+\infty)$ 表示定义在$(-\infty,+\infty)$上满足下述条件的复值函数类：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^p dx<+\infty.$$

定义　设$f(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$，若存在$F(t)\in L_2(-\infty,+\infty)$，使得

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F(t)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}f(x)\exp[ixt]dx\right|^2 dt=0 \tag{1}$$

则称$F(t)$为$f(x)$的Fourier变式，记为$\boldsymbol{T}[f]=F(t)$．

若存在$G(t)\in L_2(-\infty,+\infty)$使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|G(t)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}f(x)\exp[-ixt]dx\right|^2 dt=0 \tag{2}$$

则称$G(t)$为$f(x)$的逆Fourier变式，记为$\boldsymbol{T}^*[f]=G(t)$．

引理1　设$f(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$，对每个$n$定义

$$F_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}f(x)\exp[ixt]dx \tag{3}$$

$$G_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}f(x)\exp[-ixt]dx \tag{4}$$

则$F_n\in L_2(-\infty,\infty)$，$G_n\in L_2(-\infty,\infty)$，并且

$$\mathrm{L.i.m}\ F_n(t)=\boldsymbol{T}[f],$$
$$\mathrm{L.i.m}\ G_n(t)=\boldsymbol{T}^*[f].$$

引理2　（普兰舍利）　如果$f\in L_2(-\infty,\infty)$并且$\boldsymbol{T}[f]=F(t)$，则$f(x)=\boldsymbol{T}^*[F]$．

引理3　令给定如下条件

（ⅰ）　$\psi_n(t)\in L_2(-\infty,\infty)$，$\mathrm{L.i.m}\ \psi_n(t)=\psi(t)$，

*张鸿庆推荐，1989年1月13日收到．

(ii) $\phi_n(t)\in L_2(-\infty,\infty)$是局部绝对连续函数，并且存在子列$\psi_{n_k}(t)$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\phi_{n_k}(t)=\phi(t),$$

(iii) $\phi_n'(t)=\psi_n(t)$, a.e.

则

(Ⅰ) $\phi(t)$是局部绝对连续的，

(Ⅱ) $\phi'(t)=\psi(t)$, a.e.

证明 设α和β是$(-\infty,+\infty)$中任意二点，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta\phi_n'(t)dt=\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta\psi_n(t)dt=\int_\alpha^\beta\psi(t)dt.$$

因为$\phi_n(t)$局部绝对连续，我们有

$$\lim_{n\to\infty}[\phi_n(\beta)-\phi_n(\alpha)]=\int_\alpha^\beta\psi(t)dt,$$

从而

$$\lim_{k\to\infty}[\phi_{n_k}(\beta)-\phi_{n_k}(\alpha)]=\int_\alpha^\beta\psi(t)dt.$$

由条件(ii)得

$$\phi(\beta)-\phi(\alpha)=\int_\alpha^\beta\psi(t)dt \tag{5}$$

于是$\phi(t)$局部绝对连续且有

$$\phi'(t)=\psi(t),\ \text{a.e.}$$

推论1 在引理3的条件下，如果$\psi(t)$为连续函数，则对一切t有

$$\phi'(t)=\psi(t).$$

引理4 (i)设$f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$，$x^\beta f(x)\in L_2(-\infty,\infty)(\beta>0)$，则对任何$\beta>\alpha>0$有

$$x^\alpha f(x)\in L_2(-\infty,\infty).$$

(ii) 设$f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$并且存在数$\alpha>1/2$使得$x^\alpha f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$，则$f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$.

证明 (i) 对$b>0>a$我们有

$$\int_a^b|x|^{2\alpha}|f(x)|^2dx=\int_{\substack{|x|\le1\\a\le x\le b}}|x|^{2\alpha}|f(x)|^2dx+\int_{\substack{|x|>1\\a\le x\le b}}|x|^{2\alpha}|f(x)|^2dx$$

$$\le\int_a^b|f(x)|^2dx+\int_a^b|x|^{2\beta}|f(x)|^2dx.$$

再令$b\to+\infty$，$a\to-\infty$即得证。

(ii) 证明从下列不等式推出$(b>a)$:

$$\int_a^b|f(x)|dx=\int_a^b(1+|x|^\alpha)|f(x)|\frac{1}{1+|x|^\alpha}dx$$

$$\le\int_a^b(1+|x|^\alpha)^2|f(x)|^2dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{(1+|x|^\alpha)^2}.$$

特别地，如果$f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$，并且$xf(x)\in L_2(-\infty,\infty)$，则$f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$。当$f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$且$f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$时，我们用$f(x)\in L_{1,2}$表示之。

当$f(x)\in L_1(-\infty,+\infty)$时，我们定义$T[f]$和$T^*[f]$：

$$\left.\begin{aligned}T[f]&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\exp[ixt]dx\\ T^*[f]&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\exp[-ixt]dx\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

引理5 令$f(x)\in L_{1,2}$，如果$T[f]=F_1(t)$，$\boldsymbol{T}[f]=F_2(t)$，则$F_1(t)=F(t)$，a.e.

引理6 设有界函数$f(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$且存在函数$\phi(t)\geqslant0$使得$\boldsymbol{T}[f]=\phi(t)$，则$\phi(t)\in L_1(-\infty,+\infty)$。

证明 设M是$|f(x)|$在$(-\infty,+\infty)$中的上界。取$0<R_1<R_2<\cdots<R_n<\cdots$使当$n\to+\infty$时$R_n\to+\infty$。

定义

$$K_{R_n}(x)=\exp\left[-\frac{|x|}{R_n}\right]$$

显然$K_{R_n}(x)\in L_{1,2}$。于是，据引理5

$$\boldsymbol{T}[K_{R_n}]=T[K_{R_n}]=\frac{R_n}{1+(R_nt)^2},$$

根据Parsval等式，有

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\exp\left[-\frac{|x|}{R_n}\right]dx\right|&=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{R_n}{1+(R_nt)^2}dt\right|\\ &\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\frac{R_n}{1+(R_nt)^2}dt\leqslant M\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R_n}{1+(R_nt)^2}dt\\ &=\pi M,\end{aligned}$$

从而根据Levi定理，有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(x)|dx&=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)dx\\ &=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\exp\left[-\frac{|x|}{R_n}\right]dx\leqslant\pi M<+\infty.\end{aligned}$$

定理1 设 $f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$，$x^\beta f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$($\beta\geqslant1$，$\beta$ 为常数)，则存在函数$\phi(t)\in L_2(-\infty,\infty)$使得

(i) $\phi(t)=\boldsymbol{T}[f]$，

(ii) $\phi(t)$是局部绝对连续的，

(iii) $\boldsymbol{T}[ixf(x)]=\phi'(t)$。

实际上，

$$\phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\exp[ixt]dx=T[f].$$

证明 (i) 按引理4，$f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$，从而按引理5有$\boldsymbol{T}[f]=T[f]=\phi(t)$

(ii)，(iii)：如果令

$$\phi_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}f(x)\exp[ixt]dx,\quad\psi_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}ixf(x)\exp[ixt]dx,$$

则$\psi_n(t)\in L_2(-\infty,\infty)$并且

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{L.i.m}}\ \psi_n(t)=T[ixf(x)].$$

我们来证明 $\phi_n'(t)=\psi_n(t)$：令$\{h_m\}$是实数列并满足

$$h_m\to 0,\ \text{当} m\to\infty.$$

我们有（取$h_m\neq 0$）

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h_m}(\phi_n(t+h_m)-\phi_n(t))\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}\frac{\exp[ix(t+h_m)]-\exp[ixt]}{h_m}f(x)dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}\frac{\exp[ixh_m]-1}{h_m}\exp[ixt]f(x)dx.\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\exp[ixh_m]-1}{h_m}\exp[ixt]f(x)\right|\\&\leqslant\left|\left(\exp\left[\frac{ixh_m}{2}\right]-\exp\left[\frac{-ixh_m}{2}\right]\right)\Big/h_m\right|\\&\leqslant\left|\frac{2}{h_m}\sin\frac{xh_m}{2}\right||f(x)|\leqslant|xf(x)|,\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}\phi_n'(t)&=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{h_m}(\phi_n(t+h_m)-\phi_n(t))\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{n}\lim_{m\to\infty}\frac{\exp[ixh_m]-1}{h_m}\exp[ixt]f(x)dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}ixf(x)\exp[ixt]dx=\psi_n(t).\end{aligned}$$

因为$\phi_n(t)$满足Lipschitz条件：

$$\begin{aligned}&|\phi_n(t+h)-\phi_n(t)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}|(\exp[ix(t+h)]-\exp[ixt])f(x)|dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}|(\exp[ixh]-1)\exp[ixt]f(x)|dx\\&\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}|xh||f(x)|dx=|h|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}|xf(x)|dx,\end{aligned}$$

所以每个$\phi_n(t)$是局部绝对连续的。于是，按引理 3，

$$\phi'(t)=\psi(t),\ \text{a.e.}$$

（并且$\phi'(t)=T[ixf(x)]$。）

定理1推广了[1]中相应的定理、指明局部绝对连续变式的存在，且为(4)式所决定。

定理2　令 $f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$ 并且 $x^\beta f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$（$\beta\geqslant 1$ 为常数），则存在函数 $\phi(t)\in L_2(-\infty,\infty)$满足

（i）　$\phi(t)=T^*[f]$，

（ii）　$\phi(t)$局部绝对连续，

（iii）　$T^*[-ixf(x)]=\phi'(t)$。

事实上

$$\phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\exp[-ixt]dx$$

定理3 令$f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$。如果$\boldsymbol{T}[f]=\phi(t)$并且$\phi(t)\in L_1(-\infty,\infty)$，则

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\exp[-ixt]dt,\ \text{a.e.} \tag{7}$$

这定理用Plancherel定理及引理5易证。

推论2 等式(7)在$f(x)$的每个连续点处成立。

推论3 设$f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$，如果$\boldsymbol{T}[f]=\phi(t)$并且存在实数$\alpha>1/2$，使

$$t^{\alpha}\phi(t)\in L_2(-\infty,\infty),$$

则(7)式几乎处处成立：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\exp[-ixt]dt\ \ \text{a.e.}$$

推论4 令有界函数$f(x)\in L_2$.如果存在$\phi(t)\geqslant 0$使$\boldsymbol{T}[f]=\phi(t)$，则(7)式几乎处处成立：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\exp[-ixt]dt\ \ \text{a.e.}$$

定理4 在定理3假定之下，如果x_0是$f(x)$的Lebesgue点，则(7)式在x_0成立：

$$f(x_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\exp[-ix_0t]dt \tag{8}$$

证明 设ξ是$(-\infty,+\infty)$中任一点．令

$$g(x)=\begin{cases}1 & (\text{当}x\in[0,\xi])\\ 0 & (\text{当}x\notin[0,\xi])\end{cases}$$

显然$g(x)\in Z_2(-\infty,\infty)$．我们有

$$\psi_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}g(x)\exp[-ixt]dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\xi}\exp[ixt]dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\exp[it\xi]-1}{it}\qquad(\text{当}n>|\xi|).$$

于是

$$\boldsymbol{T}[g]=\psi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\exp[it\xi]-1}{it}.$$

由Parseval等式我们得

$$\int_0^{\xi}f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\frac{\exp[-it\xi]-1}{-it}dt.$$

所以，如果x_0是$f(x)$的Lebesgue点，则

$$f(x_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\xi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\frac{\exp[-it\xi]-1}{-it}dt\right)\Bigg|_{\xi=x_0}.$$

现在我们在右端存在导数的点计算它的导数．

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\frac{\exp[-ixt]-1}{-it}dt$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\frac{\exp[-i(x+h)t]-1}{-it}dt-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\frac{\exp[-ixt]-1}{-it}dt\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h_n}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\frac{\exp[-i(x+h_n)t]-\exp[-ixt]}{-it}dt$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\frac{\exp[-ih_nt]-1}{-ith_n}\exp[-ixt]dt,$$

其中$\{h_n\neq 0\}$是当$n\to\infty$时$h_n\to 0$的任意实数列。我们有

$$\left|\phi(t)\exp[-ixt]\frac{\exp[-ih_nt]-1}{-ih_nt}\right|\leqslant|\phi(t)|.$$

根据控制收敛定理，得

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\frac{\exp[-ixt]-1}{-it}dt$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\frac{\exp[-ih_nt]-1}{-it}\exp[-ixt]dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\exp[-ih_nt]-1}{h_n}\right)\cdot\frac{1}{-it}\exp[-ixt]dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\exp[-ixt]dt \tag{9}$$

推论5 在推论3的条件下，等式(7)在$f(x)$的每个Lebesgue点成立。

推论6 在推论4的条件下，等式(7)在$f(x)$的每个Lebesgue点成立。

定理5 令$f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$, $g(x)\in L_2(-\infty,\infty)$, $T[f]=\phi(t)$, $T[g]=\psi(t)=-it\phi(t)$。如果$f(x)$是连续函数，则

(i) $f(x)$是局部绝对连续函数并且

$$f'(x)=g(x),\ \text{a. e.}$$

(ii)

$$f(x)=-\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)dy, \tag{10}$$

(iii) 如果$g(x)$也是连续函数，则对一切x,

$$f'(t)=g(x) \tag{11}$$

证明 (i)据Plancherel定理，有

$$\phi(t)\in L_2(-\infty,\infty),\quad -it\phi(t)\in L_2(-\infty,\infty),$$

由推论5，对一切x,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\exp[-ixt]dt \tag{12}$$

由定理2，一方面$f(x)$是局部绝对连续的并且

$$f'(x)=T^*[-it\phi(t)],$$

另一方面据本定理所给条件，

$$g(x)=T^*[-it\phi(t)],$$

从而

$$f'(x)=g(x),\ \text{a. e.} \tag{13}$$

(ii), (iii). 从(13)式，有

$$f(y)-f(z)=\int_z^y f'(x)dx=\int_z^y g(x)dx \tag{14}$$

据引理4，$\phi(t)\in L_1(-\infty,\infty)$，所以$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续。又因为$f(x)\in L_2$，故

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

从(14)得到：对z的一切值

$$f(z)=-\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx.$$

从而在$f(x)$的Lebesgue点成立$f'(y)=g(y)$.

注 由本定理的其余条件不能推出$f(x)$的连续性。例如，$f(x)$是Dirichlet函数，$g(x)\equiv 0$.

定理6 令 $f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$，$g(x)\in L_2(-\infty,\infty)$，$T[f]=\phi(t)$，$T[g]=\psi(t)=(-it)^n\phi(t)$，其中正整数$n\geqslant 2$，则

(i) 如果$f(x)$是连续函数，那么$f(x)$有直到$n-1$阶的局部绝对连续函数，且全属于L_2，而$f^{(n)}(x)$几乎处处存在，并有

$$f^{(n)}(x)=g(x),\ \text{a.e.}$$

(ii) 如果$f(x)$和$g(x)$均为连续函数，则$f(x)$有直到$n-1$阶的局部绝对连续导数，且处处成立

$$f^{(n)}(x)=g(x).$$

证明 由Plancherel定理，

$$\phi(t)\in L_2(-\infty,\infty),\ (-it)^n\phi(t)\in L_2(-\infty,\infty),$$

按引理4，

$$(-it)^k\phi(t)\in L_2(-\infty,\infty)\ (k=0,1,2,\cdots,n);$$
$$(-it)^k\phi(t)\in L_1(-\infty,\infty)\ (k=1,2,\cdots,n-1).$$

令

$$h(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(-it)\phi(t)\exp[-itx]dx$$

按定理2，$h(x)$是局部绝对连续的，且

$$T^*[-it\phi(t)]=h(x),$$

所以

$$T[h]=(-it)\phi(t) \tag{15}$$

按定理5，对一切x值

$$f'(x)=h(x) \tag{16}$$

注意到(15)，(16)及$h(x)$的连续性，重复以上论证，可知定理真确。

推论7 令连续函数$f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$，$T[f]=\phi(t)$. 则下列三个条件两两互为充要条件：

(i) $t\phi(t)\in L_2(-\infty,\infty)$,

(ii) 当$h\to 0$时，$g_h(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$就$L_2$范数收敛，

(iii) $f(x)$绝对连续，$f'(x)$几乎处处存在并且$f'(x)\in L_2(-\infty,\infty)$.

推论8 设$f(x)\in L_2$，$T[f]=\phi(t)$. 则下列二条件等价：

(i) $t^n\phi(t)\in L_2(-\infty,\infty)$.

(ii) $f(x),f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$绝对连续且属于$L_2$，$f^{(n)}(x)$几乎处处存在且属于$L_2$.

参 考 文 献

[1] Bochner, S. A and K. Chandrasekcharan, *Fourier Transforms*, Princeton (1949).

[2] Бохнер С., *Лекции об Интеıралах Фурое*, Москва (1962).

[3] 周晓钟，L_1内函数的导数及其Fourier变式，西北大学学报，3 (1980).

[4] 河田龍夫，《Fourier分布》，周民强译，高等教育出版社 (1984).

A Note on Derivatives of Function and Their Fourier Transforms in L_2

Zhou Xiao-zhong

(*Normal College of Qiqihaer, Qiqihaer*)

Liu Xing-quan

(*Northeastern Finance and Economics University, Dalian*)

Abstract

The purpose of this article is to indicate the shortcomings of a few theorems of [1]. Moreover, some interesting results are deduced.