应用数学和力学，第11卷第1期（1990年1月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

四阶非线性周期系统周期解的存在唯一性

金　均

（上海师范大学，1989年3月13日收到）

摘　要

本文利用Liapunov函数方法，研究了一类具有缓变系数的四阶非线性非自治周期系统的周期解的存在唯一性及其渐近稳定性．我们得到了保证这些系统存在唯一稳定周期解的充分条件，并对系数的缓变范围作了较为精确的估计．

一、引　言

在力学，振动理论和工程技术中经常出现高阶非线性周期系统．对这类系统的周期解的研究有着非常重要的实际意义，本文利用Liapunov函数的方法，研究了一类具有缓变系数的四阶非线性非自治周期系统：

$$x^{(4)}+a(t)\dddot{x}+b(t)\ddot{x}+c(t)\dot{x}+d(t)x=g(t,x,\dot{x},\ddot{x},\dddot{x}) \tag{1.1}$$

$$x^{(4)}+a(t)\dddot{x}+b(t)\ddot{x}+c(t)\dot{x}+e(t,x)=g(t,x,\dot{x},\ddot{x},\dddot{x}) \tag{1.2}$$

$$x^{(4)}+a(t)\dddot{x}+b(t)\ddot{x}+e(t,x,\dot{x})+d(t)x=g(t,x,\dot{x},\ddot{x},\dddot{x}) \tag{1.3}$$

$$x^{(4)}+a(t)\dddot{x}+e(t,x,\dot{x},\ddot{x})+c(t)\dot{x}+d(t)x=g(t,x,\dot{x},\ddot{x},\dddot{x}) \tag{1.4}$$

$$x^{(4)}+e(t,x,\dot{x},\ddot{x},\dddot{x})+b(t)\ddot{x}+c(t)\dot{x}+d(t)x=g(t,x,\dot{x},\ddot{x},\dddot{x}) \tag{1.5}$$

周期解的存在唯一性及其渐近稳定性，得到了保证这些系统存在唯一稳定周期解的充分条件，并对缓变系数的范围作了较为精确的估计．这里$a(t)$，$b(t)$，$c(t)$，$d(t)$，$g(t,x,\dot{x},\ddot{x},\dddot{x})$，$e(t,x)$，$e(t,x,\dot{x})$，$e(t,x,\dot{x},\ddot{x})$等函数均为以$\omega>0$为周期的周期函数，且关于各自的变量是连续可微的．

为了研究的方便我们先引进几条引理．考虑系统

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{F}(t,\mathbf{x}) \tag{1.6}$$

这里　$\mathbf{F}(t,\mathbf{x})\in C^1(R\times R^n)\to R^n$，$\mathbf{F}(t+\omega,\mathbf{x})=\mathbf{F}(t,\mathbf{x})$　$(\omega>0)$．

引理1[1]　设函数$K_1(r)$，$K_2(r)$，$K_3(r)$是正的连续增函数，如果存在正的函数$v(t,\mathbf{x})$在乘积空间

Δ：$I(0\leqslant t<\infty)\times E_R(\|\mathbf{x}\|\geqslant R,\ R\geqslant 0)$上定义，且满足

1)　$v(t,\mathbf{x})\leqslant K_1(\|\mathbf{x}\|)$；

* 蔡树棠推荐．

2) $v(t,\mathbf{x})\geqslant K_2(\|\mathbf{x}\|)$，$\lim\limits_{r\to\infty}K_2(r)=\infty$；

3) $\dfrac{dv(t,\mathbf{x})}{dt}\Big|_{(1.6)}\leqslant -K_3(\|\mathbf{x}\|)$

则方程组(1.6)的解是一致最终有界的。

引理 2[2] 如果系统(1.6)的解是最终有界的，且界为M，则系统(1.6)存在以ω为周期的周期解，且$\|\mathbf{x}(t)\|\leqslant M$ $(\forall t\in[t_0,+\infty)$，$t_0\geqslant 0)$。

引理3[3] 如果系统(1.6)是非常稳定的，且有一个有界解，则系统(1.6)存在唯一的一个以ω为周期的周期解，且(1.6)的所有其它解当$t\to\infty$时都逼近于它。

二、周期解的存在性

首先考虑系统(1.1)或它的等价方程组

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=x_3,\quad \frac{dx_3}{dt}=x_4\\ &\frac{dx_4}{dt}=-d(t)x_1-c(t)x_2-b(t)x_3-a(t)x_4+g(t,x_1,x_2,x_3,x_4)\end{aligned}\right\}\qquad(1.1)'$$

定理 1 如果(1.1)′满足下列条件：

1)
$$A(t)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-d(t)&-c(t)&-b(t)&-a(t)\end{pmatrix}$$

的广义特征方程

$$\lambda^4+a(t)\lambda^3+b(t)\lambda^2+c(t)\lambda+d(t)=0\qquad(2.1)$$

均具有负实部的特征根，即$\mathrm{Re}\lambda_i(t)\leqslant-\delta<0$ $(i=1,2,3,4)$。

2) $a(t)$，$b(t)$，$c(t)$，$d(t)$在$[0,+\infty)$上有界，并设公共上界为B（为了方便，不妨假定$B>1$）。

3) $|\dot a(t)|\leqslant\varepsilon$，$|\dot b(t)|\leqslant\varepsilon$，$|\dot c(t)|\leqslant\varepsilon$，$|\dot d(t)|\leqslant\varepsilon$，$\varepsilon\leqslant 62\delta^{10}/68B^3$。

4) $$\lim_{\rho\to\infty}\frac{|g(t,x_1,x_2,x_3,x_4)|}{\rho}=0\quad(\rho=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}).$$

则系统(1.1)存在以ω为周期的周期解。

证明 为了方便，在下面我们都把$a(t)$，$b(t)$，$c(t)$，$d(t)$分别记为a,b,c,d。因为特征方程(2.1)均有负实部的特征根，所以由Routh-Hurwitz条件知

$$a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0,\ ab-c>0,\ abc-c^2-a^2d>0.$$

另外由根与系统的关系得到

$$a=-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)\geqslant 4\delta,\ b=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_4+\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_4\geqslant 6\delta^2$$
$$c=-(\lambda_1\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\lambda_2\lambda_3\lambda_4)\geqslant 4\delta^3,\ d=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\geqslant\delta^4$$
$$ab-c\geqslant 20\delta^3,\ abc-c^2-a^2d\geqslant 64\delta^6$$

给定二次型$w(x_1,x_2,x_3,x_4)=-d(abc-c^2-a^2d)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$，根据巴尔巴辛公式构造Liapunov函数，得到

$$v=v_1+v_2+v_3+v_4 \tag{2.2}$$

其中 $v_1=\frac{1}{2c}(abc-c^2-a^2d)(cx_1+bx_2+ax_3+x_4)^2+\frac{d}{2c}[(ab-c)x_2+a^2x_3+ax_4]^2$

$$+\frac{d}{2a}[(ab-c)x_1+a^2x_2+ax_3]^2+\frac{d}{2a}(abc-a^2d-c^2)x_1^2;$$

$$v_2=\frac{1}{2}ad\left(x_4+ax_3+\frac{ab-c}{a}x_2\right)^2+\frac{1}{2}cd\left(x_3+ax_2+\frac{ad}{c}x_1\right)^2+\frac{d^2}{2c}(abc$$

$$-c^2-a^2d)x_1^2+\frac{d}{2a}(abc-c^2-a^2d)x_2^2;$$

$$v_3=\frac{1}{2}ad\left(dx_1+cx_2+\frac{c}{a}x_3\right)^2+\frac{1}{2}cd\left(x_4+ax_3+\frac{ad}{c}x_2\right)^2$$

$$+\frac{d^2}{2c}(abc-c^2-a^2d)x_2^2+\frac{d}{2a}(abc-c^2-a^2d)x_3^2$$

$$v_4=\frac{1}{2}dc\left(dx_1+cx_2+\frac{bc-ad}{c}x_2\right)^2+\frac{1}{2}ad\left(dx_2+cx_3+\frac{c}{a}x_4\right)^2$$

$$+\frac{d^2}{2c}(abc-c^2-a^2d)x_3^2+\frac{d}{2a}(abc-c^2-a^2d)x_4^2$$

显然，v是定正的无穷大函数，因为

$$v\geqslant v_2+v_4\geqslant(abc-c^2-a^2d)\left[\frac{d^2}{2c}(x_1^2+x_3^2)+\frac{d}{2a}(x_2^2+x_4^2)\right]$$

$$\geqslant 64\delta^6\frac{\delta^4}{2B}[\delta^4(x_1^2+x_3^2)+(x_2^2+x_4^2)]\geqslant\frac{32\delta^{10}A}{B}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$$

其中$A=\min(\delta^4,1)$。又因为

$$|v|\leqslant 34B^4(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$$

因此它有无穷小上界。

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{(1.1)'}=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial v}{\partial x_2}x_3+\frac{\partial v}{\partial x_3}x_4$$

$$+\frac{\partial v}{\partial x_4}(-dx_1-cx_2-bx_3-ax_4+g(t,x_1,x_2,x_3,x_4))$$

$$\leqslant\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|-d(abc-c^2-a^2d)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$$

$$+\left|\frac{\partial v}{\partial x_4}g(t,x_1,x_2,x_3,x_4)\right|$$

经过计算，得

$$\left|\frac{\partial v_1}{\partial t}\right|\leqslant 2B^3\varepsilon(17x_1^2+14x_2^2+12x_3^2+10x_4^2),$$

$$\left|\frac{\partial v_2}{\partial t}\right|\leqslant 2B^3\varepsilon(4x_1^2+8x_2^2+5x_3^2+4x_4^2),$$

$$\left|\frac{\partial v_3}{\partial t}\right|\leqslant 2B^3\varepsilon(3x_1^2+7x_2^2+7x_3^2+3x_4^2),$$

$$\left|\frac{\partial v_4}{\partial t}\right| \leqslant 2B^3\varepsilon(4x_1^2+5x_2^2+8x_3^2+4x_4^2).$$

$$\therefore \quad \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right| \leqslant \left|\frac{\partial v_1}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial v^2}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial v_3}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial v_4}{\partial t}\right| \leqslant 2(28x_1^2+34x_2^2+32x_3^2+21x_4^2)B^3\varepsilon$$

$$< 68B^3\varepsilon(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_3^2)$$

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x_4}\right| \leqslant \left(9B^3+\frac{B^4}{\delta}+\frac{4B^4}{\delta^3}\right)\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}$$

另外，由条件4)，对任意常数$\eta(0<\eta\leqslant\delta^{10}[9B^3+B^4/\delta+4B^4/\delta^3]^{-1}$，必存在一个充分大的$R>0$，使得当$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\geqslant R$时，有

$$\frac{|g(t,x_1,x_2,x_3,x_4)|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}} < \eta$$

因此

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x_4}g(t,x_1,x_2,x_3,x_4)\right| \leqslant \left(9B^3+\frac{B^4}{\delta}+\frac{4B^4}{\delta^3}\right)\eta(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$$

所以在乘积空间

$$\Omega^c: \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,|\,x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\geqslant R^2\}\times I \quad (0\leqslant t<\infty)$$

中有

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1.1)'} < -\delta^{10}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$$

因此 $\left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{(1.1)'}$ 在Ω^c中是定负的。由引理 1 知系统(1.1)′的解是最终有界的，它的有界域为

$$\Omega: \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,|\,x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2<R^2,\ R=R(\tau)>0\}$$

再根据引理2，系统(1.1)′存在以ω为周期的周期解。

对系统(1.2)或它的等价方程组：

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2=x_3,\ \dot{x}_3=x_4\\&\dot{x}_4=-dx_1-cx_2-bx_3-ax_4+dx_1-e(t,x_1)+g(t,x_1,x_2,x_3,x_4)\end{aligned}\right\} \qquad (1.2)'$$

有

定理 2 如果(1.2)′满足定理 1 的条件和

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{|dx_1-e(t,x_1)|}{\rho}=0 \qquad (\rho=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2})$$

则系统(1.2)′存在以ω为周期的周期解。

对系统(1.3)或它的等价方程组：

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2=x_3,\ \dot{x}_3=x_4\\&\dot{x}_4=-dx_1-cx_2-bx_3-ax_4+cx_2-e(t,x_1,x_2)+g(t,x_1,x_2,x_3,x_4)\end{aligned}\right\} \qquad (1.3)'$$

有

定理 3 如果(1.3)′满足定理 1 的条件和

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{|ex_2-e(t,x_1,x_2)|}{\rho}=0 \qquad (\rho=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2})$$

则系统(1.3)′存在以ω为周期的周期解。

对系统(1.4)或它的等价方程组：

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2=x_3,\ \dot{x}_3=x_4\\&\dot{x}_4=-dx_1-cx_2-bx_3-ax_4+bx_3-e(t,x_1,x_2^*,x_3)+g(t,x_1,x_2,x_3,x_4)\end{aligned}\right\}\quad(1.4)'$$

有

定理 4 如果(1.4)′满足定理 1 的条件和

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{|bx_3-e(t,x_1,x_2,x_3)|}{\rho}=0\qquad(\rho=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2})$$

则系统(1.4)′存在以ω为周期的周期解。

对系统(1.5)或它的等价方程组：

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2=x_3,\ \dot{x}_3=x_4\\&\dot{x}_4=-dx_1-cx_2-bx_3-ax_4+ax_4-e(t,x_1,x_2,x_3,x_4)+g(t,x_1,x_2,x_3,x_4)\end{aligned}\right\}\quad(1.5)'$$

有

定理 5 如果(1.5)′满足定理 1 的条件和

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{|ax_4-e(t,x_1,x_2,x_3,x_4)|}{\rho}=0\qquad(\rho=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2})$$

则系统(1.5)′存在以ω为周期的周期解。

定理2～5的证明完全类似于定理1，此处从略。

三、周期解的唯一性与稳定性

下面我们证明系统(1.1)～(1.5)周期解的唯一性与稳定性，为此，只要证明这些系统是非常稳定的。为了表述的简便，以下我们总是假定函数 $g(t,x_1,x_2,x_2,x_3)$关于变元x_1,x_2,x_3,x_4有一阶连续偏导数。

定理 6 如果系统(1.1)满足定理 1 的条件，则系统(1.1)存在唯一的以ω 为周期的周期解，且是渐近稳定的。

证明 设$(x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*)$与$(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,\bar{x}_4)$是系统(1.1)的任意二个解组，即它们分别满足

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_1^*}{dt}=x_2^*,\quad \frac{dx_2^*}{dt}=x_3^*,\quad \frac{dx_3^*}{dt}=x_4^*\\&\frac{dx_4^*}{dt}=-dx_1^*-cx_2^*-bx_3^*-ax_4^*+g(t,x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*)\end{aligned}\right\}\quad(3.1)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\bar{x}_1}{dt}=\bar{x}_2,\quad \frac{d\bar{x}_2}{dt}=\bar{x}_3,\quad \frac{d\bar{x}_3}{dt}=\bar{x}_4\\&\frac{d\bar{x}_4}{dt}=-d\bar{x}_1-c\bar{x}_2-b\bar{x}_3-a\bar{x}_4+g(t,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,\bar{x}_4)\end{aligned}\right\}\quad(3.2)$$

从(3.1)～(3.2)，得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d(x_2^*-\bar{x}_2)}{dt}=x_3^*-\bar{x}_3,\quad \frac{d(x_1^*-d\bar{x}_1)}{dt}=x_2^*-\bar{x}_2,\quad \frac{d(x_3^*-\bar{x}_3)}{dt}=x_4^*-\bar{x}_4\\&\frac{d(x_4^*-\bar{x}_4)}{dt}=-d(x_1^*-\bar{x}_1)-c(x_2^*-\bar{x}_2)-b(x_3^*-\bar{x}_3)-a(x_4^*-\bar{x}_4)\\&\qquad+g(t,x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*)-g(t,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,\bar{x}_4)\end{aligned}\right\}\quad(3.3)$$

化简非线性项：

$$\begin{aligned}g(t,x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*)-g(t,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,\bar{x}_4)=&[g(t,x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*)-g(t,\bar{x}_1,x_2^*,x_3^*,x_4^*)]\\&+[g(t,\bar{x}_1,x_2^*,x_3^*,x_4^*)-g(t,\bar{x}_1,\bar{x}_2,x_3^*,x_4^*)]+[g(t,\bar{x}_1,\bar{x}_2,x_3^*,x_4^*)-g(t,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,x_4^*)]\end{aligned}$$

$$+[g(t,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,x_4^*)-g(t,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,\bar{x}_4)]=g'_{x_1}(t,\bar{x}_1+\theta_1(x_1^*-\bar{x}_1),x_2^*,x_3^*,x_4^*)(x_1^*-\bar{x}_1)$$
$$+g'_{x_2}(t,\bar{x}_1,\bar{x}_2+\theta_2(x_2^*-\bar{x}_2),x_3^*,x_4^*)(x_2^*-\bar{x}_2)+g'_{x_3}(t,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3+\theta_3(x_3^*-\bar{x}_3),x_4^*)(x_3^*-\bar{x}_3)$$
$$+g'_{x_4}(t,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,\bar{x}_4+\theta_4(x_4^*-\bar{x}_4))(x_4^*-\bar{x}_4)\quad(0<\theta_i<1)$$

记 $u_i=x_i^*-\bar{x}_i$，$(i=1,2,3,4)$

$$h_i(t)=\bar{x}_i+\theta_i(x_i^*-\bar{x}_i)\qquad(i=1,2,3,4,\ 0<\theta_i<1)$$

则(3.3)可表示成

$$\left.\begin{aligned}&\frac{du_1}{dt}=u_2,\quad\frac{du_2}{dt}=u_3,\quad\frac{du_3}{dt}=u_4\\&\frac{du_4}{dt}=-du_1-cu_2-bu_3-au_4+g'_{x_1}(t,h_1(t),x_2^*,x_3^*,x_4^*)u_1\\&\qquad+g'_{x_2}(t,\bar{x}_1,h_1(t),x_3^*,x_4^*)u_2+g'_{x_3}(t,\bar{x}_1,\bar{x}_2,h_3(t),x_4^*)u_3\\&\qquad+g'_{x_4}(t,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,h_4(t))u_4\end{aligned}\right\}\tag{3.4}$$

要证明系统(1.1)′是非常稳定的是等价于证明系统(3.4)的零解是全局渐近稳定的。为此估计(3.4)的右端的非线性项。由定理1条件4)，我们可推得：

$$\lim_{x_1^2\to\infty}g'_{x_1}(t,\theta_1x_1,x_2^*,x_3^*,x_4^*)=0,$$
$$\lim_{x_2^2\to\infty}g'_{x_2}(t,x_1^*,\theta_2x_2,x_3^*,x_4^*)=0$$
$$\lim_{x_3^2\to\infty}g'_{x_3}(t,x_1^*,x_2^*,\theta_3x_3,x_4^*)=0,$$
$$\lim_{x_4^2\to\infty}g'_{x_4}(t,x_1^*,x_2^*,x_3^*,\theta_4x_4)=0.$$

所以对任意给定的常数$\eta(0<\eta\leqslant\delta^{10}\cdot[4(9B^3+B^4/\delta+4B^4/\delta)]^{-1}$，总存在充分大的正数$\bar{R}>0$，使得当$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2>\bar{R}^2$，有

$$|g'_{x_i}(t,x_1,x_2,x_3,x_4)|<\eta\qquad(i=1,2,3,4)$$

现在我们仍取(2.2)作为系统(3.4)的Liapunov函数，只要把x_i改为u_i即可。

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(3.4)}=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial u_1}u_2+\frac{\partial v}{\partial u_2}u_3+\frac{\partial v}{\partial u_3}u_4+\frac{\partial v}{\partial u_4}(-du_1-cu_2$$
$$-bu_3-au_4+g'_{x_1}(t,x_1,x_2,x_3,x_4)u_1+g'_{x_2}(t,x_1,x_2,x_3,x_4)u_2$$
$$+g'_{x_3}(t,x_1,x_2,x_3,x_4)u_3+g'_{x_4}(t,x_1,x_2,x_3,x_4)u_4)\leqslant\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|$$
$$-d(abc-c^2-a^2d)(u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2)+\left|\frac{\partial v}{\partial u_4}\right|\Big|g'_{x_1}(t,x_1,x_2,x_3,x_4)u_1$$
$$+g'_{x_2}(t,x_1,x_2,x_3,x_4)u_2+g'_{x_3}(t,x_1,x_2,x_3,x_4)u_3+g'_{x_4}(t,x_1,x_2,x_3,x_4)u_4$$
$$\leqslant\left[68B^3\varepsilon-64\delta^{10}+\left(9B^3+\frac{B^4}{\delta}+\frac{4B^4}{\delta^3}\right)4\eta\right](u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2)$$
$$<-\delta^{10}(u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2)$$

于是在乘积空间

$$\Omega^c:\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,|\,x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\geqslant\bar{R}^2\}\times I\quad(0\leqslant t<\infty)$$

中不仅$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(3.4)}$定负，而且$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1.1)'}$也定负，因此系统(3.4)的零解是全局渐近稳定的，所

以系统(1.1)′是非常稳定的。由引理3知系统(1.1)′存在唯一的以ω为周期的周期解，而且是渐近稳定的。定理6证毕。

定理 7 如果(1.2)′满足定理2的条件，且$e'_{x_1}(t,x_1)$是连续的，

$$|d-e'_{x_1}(t,x_1)|<\eta\left(0<\eta\leqslant\frac{\delta^{10}}{5\left(9B^3+\dfrac{B^4}{\delta}+\dfrac{4B^4}{\delta^3}\right)}\right)$$

则系统(1.2)′存在唯一的以ω为周期的周期解，且是渐近稳定的。

证明 设$(x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*)$和$(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,\bar{x}_4)$为系统(1.2)′的任意二个解组，它们分别满足

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_1^*}{dt}=x_2^*,\quad\frac{dx_2^*}{dt}=x_3^*,\quad\frac{dx_3^*}{dt}=x_4^*\\&\frac{dx_4^*}{dt}=-dx_1^*-cx_2^*-bx_3^*-a_4^*+dx_1^*-e(t,x_1^*)+g(t,x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*)\end{aligned}\right\}\tag{3.5}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\bar{x}_1}{dt}=\bar{x}_2,\quad\frac{d\bar{x}_2}{dt}=\bar{x}_3,\quad\frac{d\bar{x}_3}{dt}=\bar{x}_4\\&\frac{d\bar{x}_4}{dt}=-d\bar{x}_1-c\bar{x}_2-b\bar{x}_3-a\bar{x}_4+d\bar{x}_1-e(t,x_1)+g(t,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,\bar{x}_4)\end{aligned}\right\}\tag{3.6}$$

由(3.5)−(3.6)，得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d(x_1^*-\bar{x}_1)}{dt}=x_2^*-\bar{x}_2,\quad\frac{d(x_2^*-\bar{x}_2)}{dt}=x_3^*-\bar{x}_3,\quad\frac{d(x_3^*-\bar{x}_3)}{dt}=x_4^*-x_4\\&\frac{d(x_4^*-\bar{x}_4)}{dt}=-d(x_1^*-\bar{x}_1)-c(x_2^*-\bar{x}_2)-b(x_3^*-\bar{x}_3)\\&\qquad-a(x_4^*-\bar{x}_4)+d(x_1^*-\bar{x}_1)-e(tx_1^*)-e(t,\bar{x}_1))\\&\qquad+g(t,x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*)-g(t,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,\bar{x}_4)\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

因为
$$\begin{aligned}e(t,x_1^*)-e(t,\bar{x}_1)&=e'_{x_1}(t,\bar{x}_1+\theta(x_1^*-\bar{x}_1))(x_1^*-\bar{x}_1)\\&=e'_{x_1}(t,h(t))(\bar{x}_1^*-\bar{x}_1)\qquad(0<\theta<1).\end{aligned}$$

记$u_i=x_i^*-\bar{x}_i$ $(i=1,2,3,4)$，(3.7)变为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{du_1}{dt}=u_2,\quad\frac{du_2}{dt}=u_3,\quad\frac{du_3}{dt}=u_4\\&\frac{du_4}{dt}=-du_1-cu_2-bu_3-au_4+(d-e'_{x_1}(t,h(t)))u_1\\&\qquad+g'_{x_1}(t,h_1(t),x_2^*,x_3^*,x_4^*)u_1+g'_{x_2}(t,\bar{x}_1,h_2(t),x_3^*,x_4^*)u_2\\&\qquad+g'_{x_3}(t,\bar{x}_1,\bar{x}_2,h_3(t),x_4^*)u_3+g'_{x_4}(t,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,h_4(t))u_4\end{aligned}\right\}\tag{3.8}$$

与定理6的证明一样，对给定的常数$\eta(0<\eta<\delta^{10}\cdot[5(9B^3+B^4/\delta+4B^4/\delta^3)]^{-1}$，总存在充分大的$\bar{R}>0$，使$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2>\bar{R}^2$时有$|g'_{x_1}|<\eta$，$|g'_{x_2}|<\eta$，$|g'_{x_3}|<\eta$，$|g'_{x_4}|<\eta$。这里$g'_{x_i}$是指$g(t,x_1,x_2,x_3,x_4)$分别对变量$x_1,x_2,x_3,x_4$的导数

取(2.2)作为(3.8)的Liapunov函数，它的全导数为

$$\begin{aligned}\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(3.8)}&=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial u_1}u_2+\frac{\partial v}{\partial u_2}u_3+\frac{\partial v}{\partial u_3}u_4+\frac{\partial v}{\partial u_4}(-du_1-cu_2-bu_3\\&\qquad-au_4+(d-e'_{x_1}(t,h(t)))u_1+g'_{x_1}u_1+g'_{x_2}u_2+g'_{x_3}u_3+g'_{x_4}u_4\\&\leqslant\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|-d(abc-c^2-a^2d)(u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2)\end{aligned}$$

$$+\left|\frac{\partial v}{\partial u_4}\right||(d-e'_{x_1}(t,h(t)))u_1+g'_{x_1}u_1+g'_{x_2}u_2+g'_{x_3}u_3+g'_{x_4}|$$
$$<-\delta^{10}(u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2)$$

所以在乘积空间 Ω^o 上 $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(3.8)}$，$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1.2)'}$ 均为定负，因此系统(3.8)的零解是全局渐近稳定的，也就是说系统(1.2)′是非常稳定的。由引理3知(1.2)′存在唯一的以ω为周期的渐近稳定的周期解。

我们可以类似地证明下列定理。

定理 8 如果(1.3)′满足定理3的条件及$e'_{x_1}(t,x_1,x_2)$，$e'_{x_2}(t,x_1,x_2)$对所有变元连续，且

$$|c-e'_{x_2}(t,x_1,x_2)|<\eta,\quad |e'_{x_1}(t,x_1,x_2)|<\eta\left(0<\eta\leqslant\frac{\delta^{10}}{6\left(9B^3+\frac{B^4}{\delta}+\frac{4B^4}{\delta^3}\right)}\right),$$

则系统(1.3)′存在唯一的以ω为周期的渐近稳定的周期解。

定理 9 如果(1.4)′满足定理4所有条件及函数$e(t,x_1,x_2,x_3)$关于x_1,x_2,x_3有连续偏导数，且

$$|b-e'_{x_3}|<\eta,\ |e'_{x_1}|<\eta,\ |e'_{x_2}|<\eta\left(0<\eta\leqslant\frac{\delta^{10}}{7\left(9B^3+\frac{B^4}{\delta}+\frac{4B^4}{\delta^3}\right)}\right),$$

则系统(1.4)′存在唯一的以ω为周期的渐近稳定的周期解。

定理10 如果(1.5)′满足定理5的所有条件及函数$e(t,x_1,x_2,x_3,x_4)$关于变元x_1，x_2,x_3，x_4有连续偏导数，且这些偏导数的绝对值小于或等于η，

$$|a-e'_{x_4}|<\eta\left(0<\eta\leqslant\frac{\delta^{10}}{8\left(9B^2+\frac{B^4}{\delta}+\frac{4B^4}{\delta^3}\right)}\right),$$

则系统(1.5)′存在唯一的以ω为周期的渐近稳定的周期解。

参 考 文 献

[1] 秦元勋、王联、王慕秋，《运动稳定性理论与应用》，科学出版社(1981).

[2] Wang Lian and Wang Mu-qiu, On periodic solution of higher order nolinear periodical system, *Ann. of Diff. Eqs.* (1987).

[3] Lasalle, J. and S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*, New York, Academic Press (1961), 66.

Existence and Uniqueness of Periodic Solutions for Fourth-Order Nonlinear Periodic Systems

Jin Jun

(*Shanghai Normal University, Shanghai*)

Abstract

In this paper, we study the existence, uniqueness and stability of the periodic solutions for fourth-order nonlinear nonhomogeneous periodic systems with slowly changing coefficients by using the method of Liapunov Function.

We obtain some sufficient conditions which guarantee the existence, uniqueness and asymptotic stability of the periodic solutions of these systems and estimate the extent to which the coefficients are allowed to change.