应用数学和力学，第10卷第12期(1989年12月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

夹层圆板大挠度问题的进一步研究*

刘人怀　朱高秋

(上海工业大学)　(中国科学技术大学近代力学系)
(1988年9月21日收到)

摘　要

本文首次给出了在均布载荷作用下、具有滑动固定边界条件并计及表板抗弯刚度的夹层圆板的非线性问题的解．在求解非线性弯曲方程时，我们提出了修正幂级数方法．然后，把本文结果与刘人怀和施云方[15]的结果作了比较．本文解在工程应用中可用作更精确的基础．

符　号

a 夹层圆板的半径

h 夹心厚度

t 表板厚度

h_0 厚度 $h_0=h+t$

r 径向坐标

E_f 表板的杨氏模量

ν_f 表板的泊松比

G^c 夹心的剪切模量

C 夹心的抗弯刚度 $C=G^c h_0^2/h$

D 夹层板的抗弯刚度 $D=E_f t h_0^2/2(1-\nu_f^2)$

D_f 表板的抗弯刚度 $D_f=E_f t^3/12(1-\nu_f^2)$

k 剪切参数 $k=D/G^c h_0 a^2$

q 横向均布载荷

w 夹层板的 z 方向位移

σ_r^0 表板的 r 方向应力

σ_θ^0 表板的 θ 方向应力

一、引　言

自40年代以来，已发表了一些关于夹层矩形板的论文，其中包括 Reissner[1]、Hoff[2]、Libore 和 Batdorf[3] 提出的著名理论以及 Kan 和 Huang[4]、Bhimaraddi 和 Chandrashekhara[5] 等人所获得的解．同时，夹层圆板的研究也引起一些人的兴趣[6~9]，但大多数均局限于线性分析，仅有很少几篇论文涉及到夹层圆板的大挠度问题．在1980年和1981年，刘人怀[10,11]首次建立了在均布载荷和边缘力矩作用下夹层圆板非线性弯曲的基本方程，并用叶开沅和刘人怀[12~14]1965年提出的修正迭代法进行了求解．接着，刘人怀和施云方[15]应用幂级数方法得到了承受均布载荷的夹层圆板的精确解．刘人怀[16]还用摄动法讨论了更困难的承受同心圆载荷的夹层圆板．然而，上述工作均将夹层板的表板视为薄膜，即忽略了表板的

* 中国科学院科学基金资助的课题．

抗弯刚度。对于不同类型的大挠度的夹层板而言，这一近似的适用性便成为一个疑问。为此，刘人怀[11]推导了计及表板抗弯刚度的夹层圆板非线性弯曲的一般方程。由于数学上的复杂性，尚未得到这些方程的解。本文试图寻求计及表板抗弯刚度的夹层板的解。为此，我们提出了修正幂级数方法，得到了在均布载荷作用下、具有滑动固定边界条件的夹层圆板的解。并与刘人怀和施云方[15]的结果进行了比较。本文结果可作为工程应用中一个精确的解。

二、修正幂级数方法和数值结果

考虑一承受均布载荷的等厚夹层圆板。在计及表板抗弯刚度的情况下，刘人怀[11]建立了此板的非线性弯曲方程。为了将这些方程无量刚化，我们引入：

$$\left.\begin{aligned}&P=\frac{\sqrt{2(1-\nu_f^2)}a^4}{2h_0D}q,\quad W=\sqrt{2(1-\nu_f^2)}\frac{w}{h_0},\quad S_r=\frac{2ta^2}{D}\sigma_r^0\\&S_\theta=\frac{2ta^2}{D}\sigma_\theta^0,\quad \rho=\frac{r}{a},\quad \phi=\frac{dW}{d\rho},\quad \lambda=\frac{D}{Ca^2}\\&\varepsilon=\frac{2D_f}{Ca^2},\quad L=\frac{d}{d\rho}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

于是，基本方程化为[11]

$$\varepsilon L^2\phi-(1+\varepsilon/\lambda)L\phi-\lambda L(S_r\phi)+S_r\phi+P\rho=0,\quad L(\rho S_r)+\phi^2/\rho=0\tag{2.2}$$

而滑劫固定边界条件成为

$$\left.\begin{aligned}&\text{当 }\rho=1\text{ 时，}W=0,\ \varepsilon L\phi-(\lambda S_r+1)\phi-\lambda P=0,\ S_r=0,\ \phi=0\\&\text{当 }\rho=0\text{ 时，}\varepsilon L\phi-(\lambda S_r+1)\phi=0,\ S_r<\infty\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

这里，S_θ 由下式决定：

$$S_\theta=\frac{d}{d\rho}(\rho S_r)\tag{2.4}$$

我们注意到

$$\frac{\varepsilon}{\lambda}=\frac{2D_f}{D}=\frac{1}{3}\left(\frac{t}{h_0}\right)^2\tag{2.5}$$

对于工程中常用的夹层板，我们知道

$$\lambda<1,\quad t/h_0\ll 1$$

所以

$$\varepsilon\ll 1$$

显然，因为最高阶导数前有一个小参数，故这是一个边界层型问题。众所周知，因为这些方程阶数高且为非线性，故用奇异摄动理论[17]将是十分困难的。此外，若对这类方程采用传统的幂级数方法[15]，则因基本方程最高阶导数系数为一小参数而无法求解。

为此，我们提出一种修正幂级数方法。假设：

$$\phi=\sum_{i=0}^{\infty}b_{2i+1}\rho^{2i+1},\quad S_r=\sum_{i=0}^{\infty}a_{2i}\rho^{2i}\tag{2.6}$$

于是，由式(2.1)和(2.4)，可得下列表达式：

$$W=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{b_{2i+2}}{2(i+1)}(\rho^{2i+2}-1),\quad S_\theta=\sum_{i=0}^{\infty}(2i+1)a_{2i}\rho^{2i} \tag{2.7}$$

显然，式(2.6)和(2.7)已满足以下边界条件：

当 $\rho=0$ 时，$\varepsilon L\phi-(\lambda S_r+1)\phi=0$，$S_r<\infty$

当 $\rho=1$ 时，$W=0$

将式(2.6)代入基本方程(2.2)，在展开并归并 ρ 的同次幂系数后，可得：

$$\left.\begin{aligned}&192\varepsilon b_5-8(1+\varepsilon/\lambda)b_3-8\lambda\alpha_3+\alpha_1+P=0\\&16\varepsilon i^2(i^2-1)b_{2i+1}-4(1+\varepsilon/\lambda)i(i-1)b_{2i+1}-4\lambda i(i-1)\alpha_{2i-1}+\alpha_{2i-3}=0\\&\qquad\qquad\qquad(i=3,4,5,\cdots)\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

再将式(2.6)代入边界条件(2.3)，又得

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\infty}4\varepsilon i(i+1)b_{2i+1}-\sum_{i=0}^{\infty}b_{2i+1}-\lambda P=0\\&\sum_{i=0}^{\infty}a_{2i}=0,\quad\sum_{i=0}^{\infty}b_{2i+1}=0\end{aligned}\right\} \tag{2.9a,b,c}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_{2i+1}=\sum_{k=0}^{i}a_{2(i-k)}b_{2k+1},\quad\beta_{2i+1}=\sum_{k=0}^{i}b_{2(i-k)}b_{2k+1}\\&a_{2i}=-\beta_{2i-1}/4i(i+1)\qquad(i=1,2,3,\cdots)\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

然而，代表夹层板表板的边界条件，即

当 $\rho=1$ 时，　$\phi=0$

的方程(2.9c)在以前的近似理论[15]中并未出现过，故可以予以放弃。但剩余的方程和边界条件仍比文献[15]的理论更为精确。

这样一来，按照方程(2.8)、(2.9)和(2.10)，并吸收奇异摄动法[17]的思想，我们提出如下的修正迭代公式

$$\left.\begin{aligned}&a_0^{(n+1)}=-\sum_{i=1}^{\infty}a_{2i}^{(n)},\quad b_1^{(n+1)}=\sum_{i=1}^{\infty}[4\varepsilon i(i+1)-1]b_{2i+1}^{(n)}-\lambda P\\&b_3^{(n+1)}=\{192\varepsilon b_5^{(n)}+\lambda[b_1^{(n+1)}]^3+a_0^{(n+1)}b_1^{(n+1)}+P\}/8(1+\varepsilon/\lambda+a_0\lambda)\\&\alpha_{2i+1}^{(n+1)}=\sum_{k=0}^{i}a_{2(i-k)}^{(n+1)}b_{2k+1}^{(n+1)},\quad\beta_{2i+1}^{(n+1)}=\sum_{k=0}^{i}b_{2(i-k)}^{(n+1)}b_{2k+1}^{(n+1)},\quad a_{2i}^{(n+1)}=-\frac{\beta_{2i-1}^{(n+1)}}{4i(i+1)}\\&b_{2i-1}^{(n+1)}=\left[16\varepsilon i^2(i^2-1)b_{2i+1}^{(n)}+\alpha_{2i-3}^{(n+1)}-4\lambda i(i-1)\sum_{k=0}^{i-2}a_{2(i-k-1)}^{(n+1)}b_{2k+1}^{(n+1)}\right]\Big/4i(i-1)\\&\qquad\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{\lambda}+a_0\lambda\right)\qquad(i=3,4,5,\cdots;\ n=0,1,2,\cdots)\end{aligned}\right\}$$

(2.11)

由式(2.6)和(2.7)，我们得到夹层圆板的中心挠度、中心应力和边缘应力的计算公式：

$$\left.\begin{aligned}&W(0)=-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{b_{2i+1}}{2(i+1)},\ S_r(0)=S_r|_{\rho=0}=a_0\\&S_\theta(0)=S_\theta|_{\rho=0}=a_0,\ S_\theta(1)=S_\theta|_{\rho=0}=\sum_{i=0}^{\infty}(2i+1)a_{2i}\end{aligned}\right\}\tag{2.12}$$

然后，我们以刘人怀等[15]的结果作为迭代初值，按上面的迭代公式进行求解，其结果给在表1至表8中。同时，还与文献[15]的结果进行了比较，其中 $k=D/G^c h_0 a^2$ 是文献[15]中的剪切参数。

表 1　　$k=0.01$　$t/h=0.05$

P		5.0	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0	35.0
$W(0)$	本　文	0.17972	0.35824	0.53443	0.70735	0.87621	1.0404	1.1997
	文 [15]	0.18104	0.36085	0.53828	0.71235	0.88228	1.0475	1.2077
	相对误差	0.74%	0.73%	0.72%	0.71%	0.69%	0.68%	0.66%
$S_r(0)$	本　文	0.029531	0.11716	0.26011	0.45416	0.69405	0.97405	1.2883
	文 [15]	0.029850	0.11841	0.26282	0.45873	0.70077	0.98306	1.2997
	相对误差	1.08%	1.07%	1.04%	1.01%	0.97%	0.93%	0.88%
$S_\theta(1)$	本　文	−0.021727	−0.086401	−0.19256	−0.33795	−0.51977	−0.73846	−0.97999
	文 [15]	−0.022065	−0.087736	−0.19551	−0.34306	−0.52750	−0.74561	−0.99410
	相对误差	1.55%	1.54%	1.53%	1.51%	1.49%	1.46%	1.44%

表 2　　$k=0.01$　$t/h=0.10$

P		5.0	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0	35.0
$W(0)$	本　文	0.17829	0.35540	0.53026	0.70192	0.86963	1.0328	1.1911
	文 [15]	0.18104	0.36085	0.53828	0.71235	0.88228	1.0475	1.2077
	相对误差	1.54%	1.53%	1.51%	1.49%	1.46%	1.42%	1.39%
$S_r(0)$	本　文	0.029167	0.11573	0.25702	0.44892	0.68634	0.96367	1.2752
	文 [15]	0.029850	0.11841	0.26282	0.45873	0.70077	0.98306	1.2997
	相对误差	2.34%	2.31%	2.26%	2.19%	2.10%	2.01%	1.92%
$S_\theta(1)$	本　文	−0.021368	−0.084980	−0.18943	−0.33253	−0.51155	−0.72344	−0.96505
	文 [15]	−0.022065	−0.087736	−0.19551	−0.34306	−0.58750	−0.74561	−0.99410
	相对误差	3.26%	3.24%	3.21%	3.17%	3.12%	3.06%	3.01%

表 3　　$k=0.01$　$t/h=0.15$

P		5.0	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0	35.0
$W(0)$	本　文	0.17679	0.35245	0.52592	0.69627	0.86277	1.0249	1.1822
	文 [15]	0.18104	0.36085	0.53828	0.71235	0.88228	1.0475	1.2077
	相对误差	2.40%	2.38%	2.35%	2.31%	2.26%	2.21%	2.15%
$S_r(0)$	本　文	0.028775	0.11420	0.25369	0.44326	0.67800	0.95244	1.2610
	文 [15]	0.029850	0.11841	0.26282	0.45873	0.70077	0.98306	1.2997
	相对误差	3.74%	3.68%	3.60%	3.49%	3.36%	3.22%	3.07%
$S_\theta(1)$	本　文	−0.020998	−0.083521	−0.18621	−0.32695	−0.50311	−0.71173	−0.94973
	文 [16]	−0.02265	−0.087736	−0.19551	−0.34306	−0.52750	−0.74561	−0.99410
	相对误差	5.08%	5.05%	4.99%	4.93%	4.85%	4.76%	4.67%

表 4 $k=0.01$ $t/h=0.20$

P		5.0	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0	35.0
$W(0)$	本 文	0.17527	0.34944	0.52149	0.69051	0.85578	1.0168	1.1731
	文 [15]	0.18104	0.36085	0.53828	0.71235	0.88228	1.0475	1.2077
	相对误差	3.29%	3.26%	3.22%	3.16%	3.10%	3.02%	2.95%
$S_r(0)$	本 文	0.028369	0.11261	0.25023	0.43739	0.66932	0.94072	1.2462
	文 [15]	0.029850	0.11841	0.26282	0.45873	0.70077	0.98306	1.2997
	相对误差	5.22%	5.15%	5.03%	4.88%	4.70%	4.50%	4.29%
$S_\theta(1)$	本 文	−0.020627	−0.082055	−0.18297	−0.32135	−0.49464	−0.69987	−0.93435
	文 [15]	−0.022065	−0.087736	−0.19551	−0.34306	−0.52750	−0.74561	−0.99410
	相对误差	6.97%	6.92%	6.85%	6.75%	6.64%	6.52%	6.39%

表 5 $k=0.05$ $t/h=0.05$

P		5.0	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0	35.0
$W(0)$	本 文	0.27422	0.54346	0.80368	1.0523	1.2881	1.5111	1.7217
	文 [15]	0.28031	0.55524	0.82049	1.0734	1.3128	1.5387	1.7517
	相对误差	2.22%	2.17%	2.09%	2.00%	1.91%	1.83%	1.74%
$S_r(0)$	本 文	0.055751	0.21770	0.47182	0.79975	1.1830	1.6053	2.0542
	文 [15]	0.057756	0.22521	0.48711	0.82373	1.2156	1.6457	2.1013
	相对误差	3.60%	3.45%	3.24%	3.00%	2.75%	2.51%	2.29%
$S_\theta(1)$	本 文	−0.054894	−0.21645	−0.47625	−0.82288	−1.2442	−1.7289	−2.2673
	文 [16]	−0.057641	−0.22711	−0.49920	−0.86148	−1.3010	−1.8057	−2.3654
	相对误差	5.00%	4.93%	4.82%	4.69%	4.56%	4.44%	4.33%

表 6 $k=0.05$ $t/h=0.10$

P		5.0	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0	35.0
$W(0)$	本 文	0.26834	0.53207	0.78739	1.0318	1.8642	1.4843	1.6924
	文 [15]	0.28031	0.55524	0.82049	1.0734	1.3128	1.5387	1.7517
	相对误差	4.46%	4.36%	4.20%	4.03%	3.84%	3.67%	3.50%
$S_r(0)$	本 文	0.053822	0.21045	0.45700	0.77639	1.1511	1.5657	2.0077
	文 [15]	0.057756	0.22521	0.48711	0.82373	1.2156	1.6457	2.1013
	相对误差	7.31%	7.02%	6.59%	6.10%	5.60%	5.11%	4.66%
$S_\theta(1)$	本 文	−0.052327	−0.20647	−0.45476	−0.78668	−1.1909	−1.6568	−2.1750
	文 [16]	−0.057641	−0.22711	−0.49920	−0.86148	−1.3010	−1.8057	−2.3654
	相对误差	10.16%	10.00%	9.77%	9.51%	9.24%	8.99%	8.75%

表 7 $k=0.05$ $t/h=0.15$

P		5.0	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0	35.0
$W(0)$	本 文	0.26271	0.52114	0.77174	1.0121	1.2411	1.4583	1.6641
	文 [15]	0.28031	0.55524	0.82049	1.0734	1.3128	1.5387	1.7517
	相对误差	6.70%	6.54%	6.31%	6.05%	5.78%	5.51%	5.27%
$S_r(0)$	本 文	0.051985	0.20352	0.44278	0.75387	1.1203	1.5271	1.9623
	文 [15]	0.057756	0.22521	0.48711	0.82373	1.2156	1.6457	2.1013
	相对误差	11.10%	10.66%	10.01%	9.27%	8.50%	7.76%	7.08
$S_\theta(1)$	本 文	−0.049942	−0.19719	−0.43475	−0.75292	−1.1412	−1.5894	−2.0887
	文 [15]	−0.057641	−0.22711	−0.49920	−0.86148	−1.3010	−1.8057	−2.3654
	相对误差	15.42%	15.18%	14.82%	14.42%	14.01%	13.61%	13.25%

表 8 $k=0.05$ $t/h=0.20$

P		5.0	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0	35.0
$W(0)$	本 文	0.25734	0.51070	0.75678	0.99326	1.2189	1.4334	1.6368
	文 [15]	0.28031	0.55524	0.82049	1.0734	1.3128	1.5387	1.7517
	相对误差	8.93%	8.72%	8.42%	8.07%	7.70%	7.35%	7.02%
$S_r(0)$	本 文	0.050247	0.19695	0.42923	0.73230	1.0906	1.4898	1.9182
	文 [15]	0.057756	0.22521	0.48711	0.82373	1.2155	1.6457	2.1013
	相对误差	14.94%	14.35%	13.49%	12.49%	11.45%	10.46%	9.55%
$S_\theta(1)$	本 文	−0.047733	−0.18859	−0.41617	−0.72153	−1.0948	−1.5265	−2.0080
	文 [15]	−0.057641	−0.22711	−0.49920	−0.86148	−1.3010	−1.8057	−2.3654
	相对误差	20.76%	20.42%	19.95%	19.40%	18.83%	18.29%	17.80%

三、讨论和结论

在上一节，应用我们的修正幂级数方法，首次解决了计及表板抗弯刚度的夹层圆板的非线性弯曲问题。由前述分析和结果，我们可知：

（1） 在本文的分析中，计及了表板的抗弯刚度。我们所作的唯一近似是忽略了表板的一个边界条件，而在前述理论[15]中它也是未考虑的。故其它方程和边界条件以及所得到的结果仍然比文献[15]精确。我们的工作可用于各种工程问题。

（2） 在综合了传统的幂级数方法和奇异摄动技术的优点后，我们提出了修正幂级数方法。对于求解一类最高阶导数项含小参数的问题，此法具有一定的有效性。

（3） 当 t/h 较小时，文献[15]的理论结果与本文解接近。随着 t/h 的增加，由忽略表板抗弯刚度所带来的相对误差逐渐增大。当 $t/h<0.20$ 和 $t/h<0.10$ 时，夹层板的挠度和应力的误差分别不超过10%。因此，在 t/h 较小的情况下，对于一般的工程问题而言，可应用文献[15]的近似理论。

（4） 边缘应力的相对误差大于中心的应力和挠度的相对误差。这是因为在我们的理论中计及了表板的抗弯刚度，出现了所谓的应力边界层的结果。

（5） 当 k 较小时，文献[15]的近似理论解与我们的结果接近。这表明表板抗弯刚度的影响，不仅随 t/h 变化，而且也与夹层板的剪切参数有关。

致谢 作者感谢薛大为教授和王秀喜副教授的宝贵意见。

参 考 文 献

[1] Reissner, E., Finite deflection of sandwich plates, *J. Aero. Sci.*, 15, 7 (1948), 435.

[2] Hoff, N. J., Bending and buckling of sandwich plates, *NACA TN*, 2225 (1950).

[3] Libove, C. and S. B. Batdorf, A general small-deflection theory for flat sandwich plates, *NACA TN*, 1526 (1948).

[4] Kan, H. and J. Huang, Large deflection of rectangular sandwich plates, *AIAA J.*, 5, 9 (1967), 1706.

[5] Bhimaraddi, A. and K. Chandrashekhara, Comparison of elasticity and sandwich theories for a rectangular sandwich plates, *Aero. J.*, 88, 876 (1984), 229.

[6] Zaid, M., Symmetrical bending of circular sandwich plates, *Proceedings of the Second United States National Congress of Applied Mechanics*, ASME, New York (1954), 413.

[7] Bruun, E. R., Thermal deflection of a circular sandwich plate, *AIAA J.*, 1, 5 (1963), 1213.

[8] Huang, J. C. and I. K. Ebcioglu, Circular sandwich plate under radial compression and thermal gradient, *AIAA J.*, 3, 6 (1965), 1146.

[9] Amato, A. J., Axisymmetric buckling of annular sandwich panels, *AIAA J.*, 10, 10 (1972), 1351.

[10] 刘人怀，在边缘力矩作用下夹层圆板的非线性轴对称弯曲问题，中国科学技术大学学报，10，2 (1980)，56.

[11] 刘人怀，夹层圆板的非线性弯曲，应用数学和力学，2，2 (1980)，173.

[12] 叶开沅、刘人怀等，在对称线布载荷作用下的圆底扁薄球壳的非线性稳定问题，科学通报，2 (1965)，142；兰州大学学报，2 (1965)，10.

[13] 叶开沅、刘人怀等，圆底扁薄球壳在边缘力矩作用下的非线性稳定问题，科学通报，2 (1965)，145.

[14] 刘人怀，在内边缘均布力矩作用下中心开孔圆底扁球壳的非线性稳定问题，科学通报，3 (1965)，253.

[15] 刘人怀、施云方，夹层圆板大挠度问题的精确解，应用数学和力学，3，1 (1982)，11.

[16] Liu Ren-huai, Nonlinear bending of circular sandwich plates under the action of axisymmetric uniformly distributed line loads, *Progress in Applied Mechanics*, ed. Yeh Kai-yuan, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht (1987), 293.

[17] Nayfeh, A. H., *Perturbation Methods*, John Wiley & Sons, New York (1973).

Further Study on Large Deflection of Circular Sandwich Plates

Liu Ren-huai

(Shanghai University of Technology; Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai)

Zhu Gao-qiu

(Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei)

Abstract

In this paper, a nonlinear solution is first presented for a circular sandwich plate with the flexure rigidity of the face layers taken into account. In solving the nonlinear bending equations, a modified power series method is proposed. The uniformly distributed loading and the clamped but sliding boundary condition are also assumed. Then our results are compared with those from Liu Ren-huai and Shi Yun-fang[15]. The present solution can be used as a more accurate basis in engineering applications.