

带有摩擦的单边接触大变形问题的研究

(I)——增量变分方程

尚 勇 陈至达

(中国矿业大学北京研究生部, 1988年11月2日收到)

摘 要

本文以非线性连续体几何场论为基本理论和方法, 建立了拖带坐标下弹塑性大变形增量变分方程的更一般表示式。给出了二维、三维连续体接触边界变化率公式, 得到了变边界接触大变形增量变分公式和速率型变分不等式, 为有限元计算求解带有摩擦弹塑性大变形接触问题提供了理论基础。

一、引 言

弹塑性接触大变形是几何、物理和边界条件非线性相耦合的力学问题。接触边界随着变形不断变化, 被约束和被分离的边界部分预先未知。再之由于接触面间存在着摩擦和有限滑动, 使接触层内材料性质呈现复杂的特性等, 因此, 给理论研究和计算求解带来较大困难, 致使该领域研究进展缓慢。

有限元方法研究的深入, 促进了接触问题研究的进展。70年代, Fichero, Duvant 等一些研究者较早地研究了弹性小变形接触的变分问题及有限元求解。近年 Zienkiewicz, Oden, Bathe, Bufler 等都以不同的方面对接触问题进行了研究。目前在接触问题的有限元分析中常用的方法有: 罚函数法, Lagrange 乘子法, 摄动 Lagrange 乘子法和变分不等式直接迭代法。接触元、摩擦元、超单元等特殊单元技巧也将被采用。除此还有将摩擦作为负功加到势能泛函中去, 用一般有限元方法求解等。但目前尚未被公认为行之有效的求解方法。就研究范围讲, 多数限于线弹性材料, 考虑 Coulomb 摩擦的接触问题。Oden 等的主要工作是围绕其提出的非局部摩擦定律展开的。一些文章讨论了大变形弹性接触问题, 个别也涉及了弹塑性大变形接触问题, 但从算例见, 边界形状较简单, 尤其是计算时间大量耗费成为人们所关注的重要问题。正如文[15]所言, 带有摩擦的接触问题的分析仍是对计算力学工作者的挑战。

有限变形理论及有关接触摩擦的基本理论正确合理与否, 对非线性有限元理论及程序至关重要。以S-R定理为核心的非线性几何场论, 使有限应变的定义更为合理。本文以该理论为主要理论基础和研究手段, 在前人及作者与同事以前研究的基础上, 首先更进一步探讨了拖带坐标系下弹塑性大变形增量变分方程更为精确、一般的形式。

目前有关接触摩擦的研究,基本上未考虑接触边界变化对总体变分的影响,对于接触大变形有限元分析,该因素的影响不可忽略。钱伟长教授在专著[2]中,从一般意义上研究了变边界变分问题。本文给出了以变形体速率表示的接触边界变化率表达式,建立了具体的二维三维连续体增量变边界变分公式。

另外,本文还讨论了摩擦滑动物性方程的一般形式,并利用凸分析方法,去建立速率型单边约束变分不等式。

二、边值问题基本方程

在 Eucliden 空间 R^3 中,定义可变形体为占有一定空间处所的无穷物质点的闭集 $\bar{\Omega} \subset R^3$, 并有: $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, Ω 是 $\bar{\Omega}$ 的内部, 是一有界的开子集, $\partial\Omega$ 是边界点集合, 并有:

$$\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_f \cup \Gamma_c$$

其中 Γ_u 为给定位移边界, Γ_f 为给定分布力边界, Γ_c 为带有摩擦的接触边界。

我们用记号 ${}^0B \subset R^3$ 和 ${}^tB \subset R^3$ 分别表示变形体的初始位形和 t 时刻的实时位形(当前位形)。采用拖带坐标系作为参考系,它由空间固定坐标 $\{X^i\}$ 和拖带坐标 $\{x^i\}$ 两套坐标组成。以 \mathbf{l}_i 表示 $\{X^i\}$ 的基矢, 以 $\hat{\mathbf{g}}_i$, \mathbf{g}_i 分别表示 $\{x^i\}$ 在 0B 和 tB 上的基矢, 通过以下映射, 可定义力学量的空间及相应元素, 其分量表示为:

$$\mathbf{g}_i = F^j_i \hat{\mathbf{g}}_j$$

其中:
$$F^j_i = \frac{\partial X^j}{\partial x^i} = \delta^j_i + u^j_i$$

几何方程:

由 S-R 定理所定义的应变及转动分量公式为:

$$\hat{S}_i^j = \frac{1}{2} (\mathbf{a}^j_i + \mathbf{a}^i_j) - (1 - \cos \hat{\theta}) \hat{L}_i^k \hat{L}_k^j \quad (2.1a)$$

$$\hat{\theta} = \pm \arcsin(-\hat{\omega}_i \hat{\omega}_i)^{\frac{1}{2}} \quad (2.1b)$$

$$\hat{L}_i^j = \frac{\hat{\omega}_i^j}{\sin \hat{\theta}} \quad (2.1c)$$

$$\hat{\omega}_i^j = \frac{1}{2} (\mathbf{a}^j_i - \mathbf{a}^i_j), \quad \mathbf{a}^j_i = \sqrt{\hat{g}_{(ii)}} / \sqrt{g_{(jj)}} u^j_i$$

\hat{S}_i^j 为应变, $\hat{\theta}$ 为平均整旋角, \hat{L}_i^j 为转轴方位, $()_i$ 为相对 $\hat{\mathbf{g}}_i$ 的协变导数。上标“ \wedge ”表示各量的物理分量。

相对实时位形的应变速率及转动率方程:

$$\hat{\hat{S}}_i^j = \frac{1}{2} (\hat{V}^j_i + \hat{V}^i_j) \quad (2.2a)$$

$$\hat{\hat{L}}_i^j = \hat{\theta} \frac{1}{2} (\hat{V}^j_i - \hat{V}^i_j) \quad (2.2b)$$

$()_i$ 表示相对 \mathbf{g}_i 的协变导数, 上标“ \cdot ”表示相对实时位形的时间导数, V^i 为速度逆变分量。

几何边界条件

$$u^i = \bar{u}^i, \quad V^i = \bar{V}^i \quad \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \quad (2.3)$$

以上三组方程表示了从位移(速度)空间到应变(率)、转动(率)空间和边界位移空

间的映射.

运动方程:

$$\hat{\sigma}_{;i} + \rho f_j = \rho \hat{W}_{,j} \quad \text{在 } \Omega \text{ 中} \quad (2.4)$$

动量矩方程:

$$\hat{\sigma}^t_{;j} - \hat{\sigma}^t_{;j}{}^T = \rho m^t_{;j} \quad \text{在 } \Omega \text{ 中} \quad (2.5)$$

力边界条件

$$\sigma^t_j n_i = P_j \quad \text{在 } \Gamma_f \text{ 上} \quad (2.6)$$

以上三个方程建立了从应力空间到外力空间的映射.

物性方程:

一般表达式可由次微分形式给出:

$$\hat{V} \in \partial W(\hat{S}) \quad (2.7)$$

或:

$$\hat{S} \in \partial^* W(\hat{V})$$

若势函数 W 光滑, 我们可表示为显式:

$$\hat{V}_j = C_{ij} \hat{S}_i + B_j(\hat{\sigma}_j, \hat{S}_j, h) \quad (2.8)$$

上式表达了一般发展型方程 (速率相关).

对一般弹塑性瞬态方程 (速率无关) 则有:

$$\hat{V}_j = C_{ij} \hat{S}_i$$

这里 σ^t_j 与 \hat{S}_j 有着严格的能量共轭关系.

$$\hat{V}_j = \hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j \hat{S}_j - \hat{\sigma}_j \hat{S}_j \quad (2.9)$$

为拖带坐标下应力客观速率^[3].

单边约束的接触与摩擦边界条件后节讨论.

三、大变形势能率泛函的构造

基于上节的基本方程和文献[1], 我们构造出弹塑性大变形势能率泛函的更一般形式. 定义允许速度空间:

$$U = \{\hat{V}^t \in W^1_2(\Omega)^3 / \hat{V}^t_{;j} = \hat{S}_j + \hat{L}_j \hat{\theta}, \Omega \text{ 中}, V^t = \hat{V}^t, \Gamma_u \text{ 上}\}$$

和静力许可的应力空间:

$$\Sigma = \{\hat{\sigma}^t \in W^1_2(\Omega)^9 / \hat{\sigma}^t_{;i} + \rho f_j = 0, \Omega \text{ 中}, \sigma^t_j n_i = T_j, \Gamma_f \text{ 上}\}$$

其中 $W^1_2(\Omega)$ 为 Sobolev 空间.

任取 $\hat{V}^t \in U$, 显然, 若 \hat{V}^t 是边值问题的真实解, 则运动方程和边界条件能得到满足. 因此我们不妨令 \hat{V}^t 为 Lagrange 乘子, 将运动方程 (略去惯性力) 和整个边界上的内外力关系乘以 \hat{V}^t 后并在定义域上积分, (为书写方便, 以后省略了上标“ \wedge ”, 如不特殊声明, 均指各量物理分量) 得:

$$\Pi^* = \int_{\Omega} (\sigma^t_{;i} + \rho f_j) V^t d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\sigma^t_j n_i - T_j) V^t d\theta \quad (3.1)$$

不难证明以下三种条件等价:

- (i) $V^t \in U$ 是边值问题的真实解;
- (ii) 运动方程(2.4)和力边界条件满足;

(iii) 泛函 Π^* 相对 V^i 的一阶变分为零。

据 Gauss 定理, 可得:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^i V^j d\Omega &= \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^i V^j n_i d\Omega - \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^i V^j \delta_{ij} d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^i n_i V^j d\Omega - \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^i \delta_{ij} d\Omega \end{aligned} \quad (a)$$

其中 σ_{ij}^i 为 σ_{ij}^i 的对称部分。代入到 (3.1) 整理得:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^i \delta_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \rho f_j V^j d\Omega - \int_{\partial\Omega} T_i V^i d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^i \delta_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \rho f_j V^j d\Omega - \int_{\Gamma_f} P_i V^i d\Gamma_f \\ &\quad - \int_{\Gamma_u} T_i V^i d\Gamma_u - \int_{\Gamma_c} (\sigma_n V^n + \sigma_{t1} V^1) d\Gamma_c \end{aligned} \quad (3.2)$$

注意:

$$\Pi = -\Pi^*, \quad \delta_{ij}^i \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega), \quad \sigma_{ij}^i \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$$

$P_i, f_i, T_i \in L^2(\Omega)$, 这里 $H^{\frac{1}{2}}$ 是 Hilbert 空间, L^2 是 Lebesgue 空间。

若不考虑接触摩擦边界, 则 $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_f$, 上式则退化成文 [1] 中的势能率变分公式的无矩形式。

四、拖带坐标系中大变形增量变分公式

以上速率型变分公式对大变形过程的瞬时描述是合理的。在实际数值计算中, 是将变形过程划分成若干个增量步来实施, 故变分公式应写成增量形式。我们定义各力学量是以实时位形为参考基准, 每个增量步中, 位形的变化对此刻之前基准上的各量则产生影响。在增量计算及合成时, 应将位形变化之影响合理地包括进去。

以第 (i) 个增量步作为实时位形, 此时作用在变形体上的外力矢量为 $\overset{(i)}{\mathbf{T}}$, 我们可把该量理解为第 $(i-1)$ 步上的量 $\overset{(i-1)}{\mathbf{T}}$ 与第 (i) 步增量 $\Delta\overset{(i)}{\mathbf{T}}$ 之和,

$$\overset{(i)}{\mathbf{T}} = \overset{(i-1)}{\mathbf{T}} + \Delta\overset{(i)}{\mathbf{T}} \quad (4.1)$$

在位形 ${}^{(i)}B$ 中, 沿基矢 \mathbf{g}_j 将上式分解:

$$T_j^i \mathbf{g}_j = T_j^{(i-1)} \mathbf{g}_j + \Delta T_j^i \mathbf{g}_j \quad (4.2)$$

或沿逆变基矢 \mathbf{g}^j 分解为:

$$T_i^i \mathbf{g}^i = T_i^{(i-1)} \mathbf{g}^i + \Delta T_i^i \mathbf{g}^i \quad (4.3)$$

又在 ${}^{(i-1)}B$ 位形上 $\overset{(i-1)}{\mathbf{T}}$ 沿 \mathbf{g}^j 按下式分解,

$$\overset{(t-1)}{\mathbf{T}} = \overset{(t-1)}{T^j} \overset{(t-1)}{\mathbf{g}}_j = \overset{(t-1)}{T}_j \overset{(t-1)}{\mathbf{g}}^j \quad (4.4)$$

不难推得 $\overset{(t-1)}{\mathbf{g}}$ 与 $\overset{(t)}{\mathbf{g}}$ 有下列关系:

$$\overset{(t)}{\mathbf{g}}_i = \overset{(t)}{F}_i^k \overset{(t-1)}{\mathbf{g}}_j = \overset{(t)}{F}_i^k \overset{(t-1)}{F}_j^{-1} \overset{(t-1)}{\mathbf{g}}_j \quad (4.5)$$

其中 $\overset{(t)}{F}_i^k = \overset{(t)}{F}_i^k \overset{(t-1)}{F}_k^{-1}$, $\overset{(t)}{F}_i^k = \frac{\partial X^k}{\partial x^i}$

F^{-1} 表示逆变换。因此, 不难得到:

$$\overset{(t-1)}{T}_i^j = \overset{(t-1)}{F}^{-1} \overset{(t-1)}{T}_j^i \quad (4.6)$$

同理:

$$\overset{(t-1)}{T}_i^j = \overset{(t-1)}{F}_i^k \overset{(t-1)}{T}_k^j \quad (4.7)$$

又因为:

$$\overset{(t-1)}{T}_i^j = \overset{(t-1)}{\sigma}_i^k \overset{(t-1)}{n}_j^k, \quad \overset{(t-1)}{T}_i^j = \overset{(t-1)}{\sigma}'^k_i \overset{(t-1)}{n}_i^k$$

故有:

$$\overset{(t-1)}{\sigma}'^k_i = \overset{(t-1)}{\sigma}_i^k \overset{(t-1)}{F}_i^j \overset{(t-1)}{F}^{-1}_{j k} \quad (4.8)$$

注意:

$$\overset{(t-1)}{F}_i^k \overset{(t-1)}{F}^{-1}_{k j} = \delta^k_j$$

考虑以上从 $(i-1)$ 步到第 i 步位形各量间的客观变换, 在实时位形 B 上, 有

$$\overset{(t)}{T}_j = \overset{(t-1)}{T}_i \overset{(t-1)}{F}_i^j + \Delta T_j \quad (4.9)$$

$$\overset{(t)}{\sigma}_j = \overset{(t-1)}{\sigma}_i^k \overset{(t-1)}{F}_i^j \overset{(t-1)}{F}^{-1}_{k j} + \Delta \sigma_j \quad (4.10)$$

对位移增量叠加, 同样有:

$$\overset{(t)}{u}^j = \overset{(t-1)}{u}^k \overset{(t-1)}{F}^{-1}_{k j} + \Delta u^j \quad (4.11)$$

将(4.10)代入(3.2)式后, 以速度和应变率作为变分量进行变分并取驻值, 整理得:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta \sigma_j^i \delta \dot{S}_i^j d\Omega &= \int_{\Omega} \rho f_j^i \delta V^i d\Omega + \int_{\Gamma_f} \overset{(t)}{P}_j \delta V^j d\Gamma_f \\ &+ \int_{\Gamma_c} (\overset{(t)}{\sigma}_n \delta V^n + \overset{(t)}{\sigma}_{\tau_i} \delta V^i) d\Gamma_c + (\overset{(t)}{\sigma}_n V^n + \overset{(t)}{\sigma}_{\tau_i} V^i) \Big|_{\Gamma_c} \left(\frac{\partial \Gamma_c}{\partial V^j} \right) \delta V^j \\ &- \int_{\Omega} \overset{(t-1)}{\sigma}_i^k \overset{(t-1)}{F}_i^j \overset{(t-1)}{F}^{-1}_{k j} \delta \dot{S}_i^j d\Omega \end{aligned} \quad (4.12)$$

上式中 $\Delta \sigma_j^i$ 可表示为

$$\Delta \sigma_j^i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\sigma}_j^i dt$$

$\dot{\sigma}_j^i$ 表示应力的物质速率, 上式积分是难以实现的, 当增量步相对不太大时可近似表示为:

$$\Delta \sigma_j^i = (\beta \dot{\sigma}_j^i + (1-\beta) \dot{\sigma}_j^i) \Delta t \quad (4.13)$$

其中 $0 \leq \beta \leq 1$, 为简化计算, 不仿取 $\beta = 0$.

对于一般弹塑性问题，我们只考虑瞬态物性方程：

$$\nabla_i \dot{\epsilon}_i = C_{ik} \dot{S}_k$$

结合应力客观速率(2.9)，可写成以下形式：

$$\dot{\sigma}_i = \bar{C}_{ik} \dot{S}_k \tag{4.14}$$

上式中 $\bar{C}_{ik} = C_{ik} + A_{ik}$ ， A_{ik} 是公式(2.9)的影响项。代入(4.12)，并注意到以‘B’为基准，不仿省略增量标号(i)，整理得到：

$$\int_{\Omega} \bar{C}_{ik} \dot{S}_k \delta S_i d\Omega \Delta t = \int_{\Omega} \rho f_j \delta V^j d\Omega + \int_{\Gamma_f} P_j \delta V^j d\Gamma_f + \int_{\Gamma_c} (\sigma_n \delta V^n + \sigma_{\tau_j} \delta V^j) d\Gamma_c + (\sigma_n V^n + \sigma_{\tau_j} V^j) \Big|_{\Gamma_c} \frac{\partial \Gamma_c}{\partial V^j} \delta V^j - \int_{\Omega} \sigma_k^{(t-1)} \bar{F}_k \bar{F}^{-1} \delta S_i d\Omega \tag{4.15}$$

五、接触边界变化率

从上节(4.15)式可见，由于接触边界 Γ_c 的变化给总势能率产生影响，而求出接触边界随变形的变化速率是准确分析这一影响量的关键问题。

为便于分析先看二维情形下理想情形，如图1：

设两物体A, B, A有不动的水平边界，B变形体的待接触边界 Γ'_c 为斜平面 r ， $a(t, x)$ 表示接触区边界，当经过 Δt 时间后其变化为 $\Delta a(t, x)$ 由图1中的几何关系不难得到：

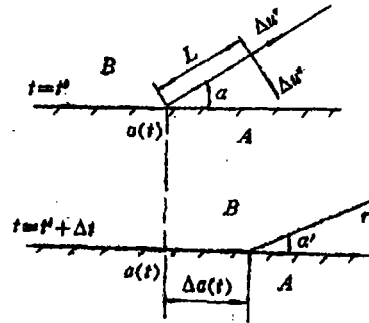


图 1

$$\Delta a(t, x) = L + \Delta u^r = \frac{\Delta u^n}{\text{tg}\alpha} + \Delta u^r$$

其中 Δu^n 为法向位移， Δu^r 为切向移位 (变形引起)。

若考虑摩擦滑动产生的切向位移增量 Δu^r 则：

$$\Delta a(t, x^i) = \frac{\Delta u^n}{\text{tg}\alpha} + \Delta u^r + \Delta u^r_i$$

方程两边除 Δt 并取极限，即得：

$$\dot{a}(t, x^i) = \frac{\dot{u}^n(x^i)}{\text{tg}\alpha|_{x^i(t)}} + \dot{u}^r(x^i) + \dot{u}^r_i(x^i) \tag{5.1}$$

若接触体B的边界为凸曲线，并接触间距 d 满足 $d(x, B) \leq d(x_1, B)$ ，若 $x_1 > x$ (在右预接触区)， $x_1 < x$ (在左预接触区)， $x_1, x \in \Gamma'_c$ 。

则：

$$\text{tg}\alpha = \frac{r'_i(x_0) - k}{1 + k \cdot r'_i(x_0)}$$

其中 $k = \text{tg}\theta$ ， $r'_i(x_0)$ 为接触边界曲线在临界点 x_0 的斜率，“↑”表示右导数，即：

$$r'_i(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{r(x_0 + \Delta x) - r(x_0)}{\Delta x}$$

则(5.1)进一步写成：

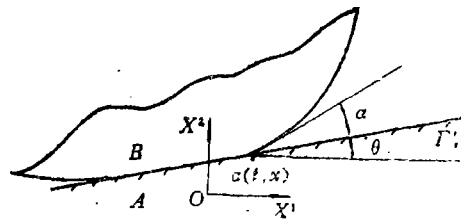


图 2

$$\dot{a}(t, x) = \frac{\dot{u}^n(x_0) \cdot [1 + r'_i(x_0) \cdot k]}{r'_i(x_0) - k} + \dot{u}^\tau(x_0) + \dot{u}^f(x_0) \quad (5.2)$$

二维问题的一般情形:

接触体与被接触体外廓皆为曲线并满足条件A: 间距

$$d(r(x_1), R(x_1)) \geq d(r(x_2), R(x_2)).$$

若在右侧临界点之外, 则 $x_1 > x_2$, 而在左侧临界点之外, $x_1 < x_2$.

其中 $r(x)$, $R(x)$ 分别为接触体与被接触体的待接触边界曲线, 它们在临界点 x_0 的斜率分别为 $R'_i(x_0)$, $r'_i(x_0)$, 则:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|r'_i(x_0) - R'_i(x_0)|}{1 + |r'_i(x_0) R'_i(x_0)|}$$

接触边界变化率为:

$$\dot{a}(t, x) = \frac{1 + r'_i(x_0) R'_i(x_0)}{r'_i(x_0) - R'_i(x_0)} \dot{u}^n(x_0) + \dot{u}^\tau(x_0) + \dot{u}^f(x_0) \quad (5.3)$$

三维一般情形:

三维空间中任意满足条件A的两接触曲面, 设接触体曲面方程为 $r = r(x^1, x^2, t)$, 被接触体曲面方程为 $R = R(x^1, x^2, t)$, x^1, x^2 为曲面上的拖带坐标. 建立接触边界变化率与变形体质点速率关系的关键是寻求(5.1)式中的“ $\operatorname{tg} \alpha$ ”. 在两个曲面上的切向量分别定义为:

$$\mathbf{t}_r = \frac{\partial r}{\partial x^1} \tau_1^i + \frac{\partial r}{\partial x^2} \tau_2^i = \tau_i^j \mathbf{g}_j, \quad \mathbf{t}_R = \frac{\partial R}{\partial x^1} \tau_1^i = \tau_i^j \mathbf{G}_j,$$

其单位向量为:

$$\tau_r = \mathbf{t}_r / |\mathbf{t}_r|, \quad \tau_R = \mathbf{t}_R / |\mathbf{t}_R|$$

单位法向量定义为:

$$\mathbf{n}_r = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2|}, \quad \mathbf{n}_R = \frac{\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2}{|\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2|}$$

因而不难确定两曲面法线在临界点 (x_1^i, x_2^i) 处的夹角:

$$\cos \alpha = \mathbf{n}_r^i \cdot \mathbf{n}_R^i, \quad \sin \alpha = |\mathbf{n}_r^i \times \mathbf{n}_R^i|$$

以上利用了 $|\mathbf{n}_r| = |\mathbf{n}_R| = 1$ 的性质. 故:

$$\operatorname{tg} \alpha = |\mathbf{n}_r^i \times \mathbf{n}_R^i| / \mathbf{n}_r^i \cdot \mathbf{n}_R^i$$

“ \uparrow ”表示临界点法向外侧.

沿曲面切向 τ_R , 接触面的变化率为(参照(5.1))

$$\dot{a}(x^i, t) |_{\tau_R} = \left(\frac{\mathbf{n}_r^i \cdot \mathbf{n}_R^i}{|\mathbf{n}_r^i \times \mathbf{n}_R^i|} \right) \Big|_{x_1^i} \dot{u}^n(x_1^i) \tau_R + \dot{u}^\tau(x_1^i) + \dot{u}^f(x_1^i) \quad (5.4)$$

我们可把接触曲面面积看作由初始区域 Γ_0 和变化增量部分 $\Delta \Gamma_0$ 的和:

$$\Gamma_0 = \Gamma_0^i + \Delta \Gamma_0 = \Gamma_0^i + \int_0^t \dot{a}(x^i, t) dt$$

如把 Γ_0^i 选作前 $(i-1)$ 增量步的初值, 而 $\Delta \Gamma_0$ 近似写成:

$$\Delta \Gamma_0 = |\dot{a}(x^i, t)| \Delta t$$

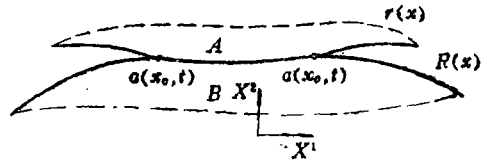


图 3

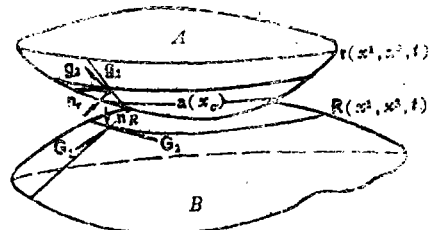


图 4

可得近似公式:

$$\frac{\partial \Gamma_0}{\partial V^j} = \frac{\partial |\dot{\mathbf{a}}(x^i, t)|}{\partial V^j} \Delta t \quad (5.5)$$

代入(4.15), 即得到变边界接触大变形增量变分方程的具体形式, 为不重复仅写出接触摩擦边界部分:

$$\begin{aligned} \delta J(V) = & \int_{\Gamma_0} (\sigma_n \delta V^n + \sigma_{\tau i} \delta V^i) d\Gamma_0 \\ & + [\sigma_n V^n + \sigma_{\tau i} V^i] \left[\frac{\partial |\dot{\mathbf{a}}(x^i, t)|}{\partial V^j} \Delta t \delta V^j \right]_{\Gamma_0 + \theta \Delta \Gamma_0} \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned} \quad (5.6)$$

将(5.2)~(5.4)分别代入上式, 可通过数值近似求出各种情况下的解. 详细讨论在本文第(II)部分.

六、速率型变分不等式

如令以下算子表示:

$$\begin{aligned} a(V, \delta V) &= \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{ij}^* \dot{S}^i \delta \dot{S}^j d\Omega \Delta t \\ (f, \delta V) &= \int_{\Omega} \rho f_i \delta V^i d\Omega + \int_{\Gamma_f} P_i \delta V^i d\Gamma_f - \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{ij}^{(-)} \bar{F}^i \bar{F}^{-j} \delta \dot{S}^j d\Omega \\ (b(V_\tau), \delta V) &= [\sigma_{\tau i} V^i] \frac{\partial |\dot{\mathbf{a}}(x^i, t)|}{\partial V^j} \Delta t \delta V^j \end{aligned}$$

则, 结合(5.6)将(4.15)写成:

$$a(V, \delta V) - (f, \delta V) - (b(V_\tau), \delta V) - \int_{\Gamma_0} (\sigma_n \delta V^n + \sigma_{\tau i} \delta V^i) d\Gamma_0 = 0 \quad (6.1)$$

$$\text{并受到约束: } C: k_j V^j - \dot{g} \leq 0, \sigma_n \leq 0 \quad (6.2)$$

\dot{g} 为间隙函数速率, k_j 为方向数, 以上又等价于:

$$\Pi(V) = \inf_{V' \in U} \Pi(V'), \quad C: k_j V^j - \dot{g} \leq 0, \sigma_n \leq 0 \quad (6.3)$$

结合(6.3), 可将(6.1)式写成更一般形式:

$$\begin{aligned} a(V, V' - V) - (f, V' - V) - (b(V_\tau), V' - V) - \int_{\Gamma_0} [\sigma_n (V'_n - V_n) \\ + \sigma_{\tau i} (V'_i - V_i)] d\Gamma_0 = 0 \quad \forall V' \in U \end{aligned} \quad (6.4)$$

定义摩擦约束凸集: $K = \{\sigma_\tau / G(\sigma_\tau, \sigma_n, \mu) \leq 0\}$

G 为临界滑动摩擦准则函数, μ 是摩擦系数. 对Coulomb定律, G 的具体形式为:

$$G(\sigma_\tau, \sigma_n, \mu) = (\sigma_\tau^i \sigma_\tau^i g_{ij})^{\frac{1}{2}} - \mu \sigma_n \leq 0$$

对于Oden的非局部摩擦定律^[10], G 可表示为:

$$G(\sigma_\tau, \sigma_n, \mu) = (\sigma_\tau^i \sigma_\tau^i g_{ij})^{\frac{1}{2}} - \mu S_\rho(\sigma_n(\mathbf{u})) \leq 0$$

其中:

$$S_\rho(\sigma_n(\mathbf{u}(\mathbf{X}))) = \int_{\Gamma_0} \omega_\rho(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) (\sigma_n(\mathbf{u}(\mathbf{Y}))) d\mathbf{Y}$$

引进摩擦约束凸集 K 的支承函数:

$$\psi_{\mathbf{K}}(V') = \int_{\Gamma_c} \sigma_{\tau} \cdot (-V'_{\tau}) d\Gamma_0.$$

又利用 Kohn-Tucker 条件: $\sigma_n(k_i V'_i - g) = 0$

式(6.4)可写成:

$$\begin{aligned} a(V, V' - V) + \psi_{\mathbf{K}}(V') - \psi_{\mathbf{K}}(V) &= (f, V' - V) + (b(V_{\tau}), V' - V) \\ &+ [\psi_{\mathbf{K}}(V') - \psi_{\mathbf{K}}(V)] + \int_{\Gamma_c} \sigma_{\tau i} (V'_{\tau i} - V_{\tau i}) d\Gamma_0. \quad \forall V' \in U \end{aligned} \quad (6.5)$$

其中: $U = U \cap C$ 为满足接触约束的允许速度空间.

不难证明:

$$[\psi_{\mathbf{K}}(V') - \psi_{\mathbf{K}}(V)] + \int_{\Gamma_c} \sigma_{\tau i} (V'_{\tau i} - V_{\tau i}) d\Gamma_0 \geq 0$$

故式(6.5)可写成:

$$a(V, V' - V) + \psi_{\mathbf{K}}(V') - \psi_{\mathbf{K}}(V) \leq (f, V' - V) + (b(V_{\tau}), V' - V) \quad \forall V' \in U$$

据凸分析理论^[14], 引进接触约束凸集 C 的指示函数:

$$\chi_0(V') = \begin{cases} 0 & V' \in C \\ +\infty & V' \notin C \end{cases}$$

将凸集约束的变分问题转化为整个矢量空间中的变分问题:

$$\begin{aligned} a(V, V' - V) + \psi_{\mathbf{K}}(V') - \psi_{\mathbf{K}}(V) + \chi_0(V') - \chi_0(V) &\leq (f, V' - V) \\ &+ (b(V_{\tau}), V' - V) \quad \forall V' \in U \end{aligned} \quad (6.6)$$

本文是利用惩罚函数法来构造指示函数的:

$$\chi_0(V) = \sigma_n V_n = \frac{1}{\varepsilon} (k_i V'_i - g) \cdot V_n. \quad (6.7)$$

则(6.6)最后写成:

$$\begin{aligned} a(V, V' - V) + \psi_{\mathbf{K}}(V') - \psi_{\mathbf{K}}(V) + \left[\frac{1}{\varepsilon} (k_i V'_i - g), V'_i - V_n \right] \\ \leq (f, V' - V) + (b(V_{\tau}), V' - V) \quad \forall V' \in U \end{aligned} \quad (6.8)$$

上式中, ε 为罚因子. $\psi_{\mathbf{K}}(V)$ 一般是非凸、非可微, 速率型变分不等式(6.8)的有限元解法将在本文第(II)部分讨论. 有关式(6.8)解的存在性问题已在文[3]中讨论, 这里暂略.

七、结 束 语

本文以当前增量步末端为基准位形, 给出了拖带坐标系中各力学量增量和的精确形式, 这是处理大变形问题的更合理方法.

对于速率型变分不等式, 有关解法仍是值得深入探讨的问题. 同时, 两个难点值得提及, 一是接触约束集的指示函数 $\chi_0(V)$ 应表示为什么具体形式, 目前所用的 Lagrange 乘子法与罚函数法都存在不少弊病, 二是摩擦势函数 $\psi_{\mathbf{K}}(V')$ 所对应的确切摩擦滑动物性关系有待继续探讨.

参 考 文 献

- [1] 陈至达, 《有理力学》, 中国矿业大学出版社(1988).
- [2] 钱伟长, 《变分法及有限元》, 科学出版社(1980).
- [3] 尚勇, 带有接触摩擦边界弹性大变形问题的理论和有限元分析, 中国矿业大学博士学位论文(1987).

- [4] 秦忠, 基于新的大变形理论的非线性有限元及其应用, 中国矿业大学博士学位论文 (1986).
- [5] 谢和平, 岩石蠕变损伤非线性大变形分析及微观断裂的 FRACTAL 模型, 中国矿业大学博士学位论文 (1987).
- [6] Shang Yong and Chen Zhi-da, Analysis of large elastic-plastic deformation by finite element method using co-moving coordinate, *Proc. ICNM*, Shanghai, ed. Chien Wei-zang (1985).
- [7] Fichero, G., Problemi elastostatici con vincoli unilaterali problema di Signorini con ambigue conditional contorno, *Mem. Acc. Naz. Lincei*, **VII**, 7a (1964).
- [8] Duvant, G. and J. L. Lions, Un problème d'élasticité avec frottement, *J. Mec.*, **10** (1970), 409—420.
- [9] Panagiotopoulos, P. D., A variational inequality approach to the friction problem of structures with convex strain energy density and application to the frictional unilateral contact problem, *J. Struct. Mech.*, **6**, 3 (1978), 303—318.
- [10] Oden, J. T. and E. B. Pires, Contact problems in elastostatics with nonlocal friction law, TICOM Report, University of Texas, Austin (1981).
- [11] Pires, E. B. and J. T. Oden, Analysis of contact problems with friction under oscillating loads, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **39** (1983), 337—362.
- [12] Bathe, K. J., A solution method for plane and axisymmetric contact problems, *Int. J. Num. Meths. Eng.*, **21** (1985), 65—88.
- [13] Bufler, M., Derivation of the variational inequalities and extremum principles of the frictionless elastic contact problem, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **53** (1985), 163—182.
- [14] Ekeland, I. and R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland (1976).
- [15] Haber, R. B. and B. H. Hariandja, An Eulerian-Lagrangian finite element approach to large deformation frictional contact, *Comp. and Structure*, **20** (1985), 194—201.

On Large Deformation Unilateral Contact Problem with Friction(I)—Incremental Variational Equations

Shang Yong Chen Zhi-da

(Beijing Graduate School, China University of Mining, Beijing)

Abstract

Based on the theory and technique of nonlinear geometric field theory of continuum, a more general incremental variational equation for elastic and plastic large deformation in co-moving coordinate is established in this paper. An expression for two- and three-dimensional continua is derived; and the incremental variational equation for large deformation of changing boundary contact and the variational inequality in rate form are obtained, which provides the theoretical basis for the computation of elastic-plastic large deformation contact problem with friction.