应用数学和力学，第10卷第12期(1989年12月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Sachs法的应用及推广*

宋　顺　成

(内蒙古金属材料研究所，1988年12月8日收到)

摘　　要

本文提出测量平面应力状态厚壁圆筒残余应力时 Sachs 公式的简化，特别提出了测量和计算具有轴向残余应力有限长厚壁圆筒残余应力的方法．这些结果可用于研究火炮自紧身管内的残余应力．

一、引　　言

测量厚壁圆筒内残余应力的方法首先是由Sachs提出的，因此被称为Sachs方法．最近几年该方法广泛用于自紧管内残余应力的研究中．实践证明，利用 Sachs 方法测量平面残余应力是满意的，但用于测量有限长圆管内轴向残余应力是不可靠的．

实际上，Sachs 公式不适合有限长圆管内的轴向残余应力．本文提出 Sachs 方法的推广，用以测量有限长圆管特别是机械自紧管内的轴向、切向、径向残余应力．

二、Sachs方法中残余应力公式推导

设厚壁圆筒处平于面残余应力状态．当从其内半径a同心切削到半径r时，由于径向残余应力$\sigma_r^R(r)$被释放，外表面产生切向应力$\sigma_{tb}(r)$．

根据 Lamé 公式，

$$\sigma_{tb}(r)=\frac{2r^2}{b^2-r^2}\sigma_r^R(r) \tag{2.1}$$

即，

$$\sigma_r^R(r)=\frac{b^2-r^2}{2r^2}\sigma_{tb}(r) \tag{2.2}$$

其中b是厚壁圆筒的外半径．

把虎克定律

$$\sigma_{tb}(r)=\frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_{tb}(r)+\nu\varepsilon_{zb}(r)] \tag{2.3}$$

---

*卢文达推荐．

直接代入到(2.2)就得到

$$\sigma_r^R(r)=\frac{E}{1-\nu^2}\frac{b^2-r^2}{2r^2}[\varepsilon_{tb}(r)+\nu\varepsilon_{zb}(r)] \tag{2.4}$$

其中E为圆筒材料的杨氏模量，ν为材料的泊松比。$\varepsilon_{tb}(r)$及$\varepsilon_{zb}(r)$分别是由于厚壁圆筒从内半径a同心切削至r时，在外表面产生的切向应变和轴向应变。

就是说，当厚壁圆筒从内半径a同心地切削到半径r时，测量出外表面应变$\varepsilon_{tb}(r)$，$\varepsilon_{zb}(r)$即可由(2.5)式计算出厚壁圆筒半径r处的径向残余应力$\sigma_r^R(r)$。

由于平面残余应力满足以下平衡方程，

$$\frac{d\sigma_r^R}{dr}+\frac{\sigma_r^R-\sigma_t^R}{r}=0 \tag{2.5}$$

所以将(2.4)式代入(2.5)即可得出厚壁圆筒r处切向残余应力$\sigma_t^R(r)$的计算公式，

$$\sigma_t^R(r)=\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{b^2-r^2}{2r}\frac{d}{dr}[\varepsilon_{tb}(r)+\nu\varepsilon_{zb}(r)]-\frac{b^2+r^2}{2r^2}[\varepsilon_{tb}(r)+\nu\varepsilon_{zb}(r)]\right\} \tag{2.6}$$

记$\varepsilon_{tb}(r)+\nu\varepsilon_{zb}(r)=\Theta$，并把(2.4)，(2.6)中有关的分子、分母同乘以π就得到著名的Sachs 方法测量计算式，

$$\sigma_r^R(r)=\frac{E}{1-\nu^2}\frac{A_b-A}{2A}\Theta \tag{2.7}$$

$$\sigma_t^R(r)=\frac{E}{1-\nu^2}\left[(A_b-A)\frac{d\Theta}{dA}-\frac{A_b+A}{2A}\Theta\right] \tag{2.8}$$

其中 $A=\pi r^2$，$A_b=\pi b^2$。

从以上推导可以看出 Sachs 法测量公式(2.7)，(2.8)只适用于平面残余应力的厚壁圆筒。

对于无限长具有轴向残余应力$\sigma_z^R(z)=$常数的情况，Sachs 法还给出了轴向残余应力的测量计算公式，

$$\sigma_z^R(r)=\frac{E}{1-\nu^2}\left[(A_b-A)\frac{d\Lambda}{dA}-\Lambda\right] \tag{2.9}$$

其中 $\Lambda=\varepsilon_{zb}(r)+\nu\varepsilon_{tb}(r)$，$A_b=\pi b^2$，$A=\pi r^2$。

显然公式(2.9)对于有限长厚壁圆筒残余应力的测量计算是无效的。

三、Sachs 公式的简化

在实际测量平面残余应力状态下的厚壁圆筒时，Sachs 公式(2.7)，(2.8)应该予以简化。

既然在该状态下轴向残余应力$\sigma_z^R=0$（例如圆筒高度不大时），那么当厚壁圆筒以内半径a同心切削到半径r时，由于残余应力释放在外表面产生的轴向应力$\sigma_{zb}(r)$也应该为零。根据虎克定律，

$$\sigma_{zb}(r)=\frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_{zb}(r)+\nu\varepsilon_{tb}(r)] \tag{3.1}$$

得出

$$\varepsilon_{zb}(r)=-\nu\varepsilon_{tb}(r) \tag{3.2}$$

将(3.2)式代入(2.4)，(2.6)得到

$$\sigma_r^R(r)=\frac{b^2-r^2}{2r^2}[E\varepsilon_{tb}(r)] \tag{3.3}$$

$$\sigma_t^R(r)=\frac{b^2-r^2}{2r}\frac{d}{dr}[E\varepsilon_{tb}(r)]-\frac{b^2+r^2}{2r^2}[E\varepsilon_{tb}(r)] \tag{3.4}$$

记$\phi=E\varepsilon_{tb}(r)$，并把(3.3)，(3.4)写成(2.7)，(2.8)类似的形式，

$$\sigma_r^R(r)=\frac{A_b-A}{2A}\phi \tag{3.5}$$

$$\sigma_t^R(r)=(A_b-A)\frac{d\phi}{dA}-\frac{A_b+A}{2A}\phi \tag{3.6}$$

其中$A=\pi r^2$，$A_b=\pi b^2$。

(3.5)，(3.6)式即为简化的 Sachs 法测量公式。其优点在于不需要测量材料的泊松比ν和圆筒的外表面应变$\varepsilon_{zb}(r)$，简化了测量参数，减少了测量误差，从而能提高残余应力的测量计算精确度。

四、Sachs 公式的推广

对于有限长度并存有轴向残余应力的厚壁圆筒，Sachs 公式是不适用的。因此需要进一步推广。

首先建立有限长度厚壁圆筒的圆柱坐标系，坐标原点取在圆筒的中心处，径向坐标为r，轴向坐标为z。圆筒内残余应力满足平衡方程

$$\frac{\partial\sigma_r^R}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}^R}{\partial z}+\frac{\sigma_r^R-\sigma_t^R}{r}=0 \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial\sigma_z^R}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{rz}^R}{\partial r}+\frac{\tau_{rz}^R}{r}=0 \tag{4.2}$$

并且在圆筒端部，

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{rz}^R=0,\quad \sigma_z^R=0\quad 当 z=z_e\\&\tau_{rz}^R=0,\quad \sigma_z^R=0\quad 当 z=-z_e\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

其中z_e为圆筒高度的一半。

另外在圆筒的内外表面上，

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_r^R=0,\quad \tau_{rz}^R=0\quad 当 r=a\\&\sigma_r^R=0,\quad \tau_{rz}^R=0\quad 当 r=b\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

根据τ_{rz}^R的反对称性及σ_z^R的对称性，取τ_{rz}^R为比较简单的形式，

$$\tau_{rz}^R=\frac{1}{K}z(z^2-z_e^2)(r-a)(r-b)f_1(r) \tag{4.5}$$

其中$f_1(r)$为第一个待定函数，系数K是根据计算方便可任意选定的有量纲常数。显然(4.5)满足边界条件(4.3)，(4.4)。

将(4.5)代入(4.2)有，

$$\frac{\partial\sigma_z^R}{\partial z}=-\frac{1}{K}z(z^2-z_e^2)\left\{\left[3r-2(a+b)+\frac{ab}{r}\right]f_1(r)+(r-a)(r-b)f_1'(r)\right\} \tag{4.6}$$

积分(4.6)得，

$$\sigma_z^R=\frac{1}{4K}[2(z\cdot z_e)^2-z^4]\left\{\left[3r-2(a+b)+\frac{ab}{r}\right]f_1(r)\right.$$
$$\left.+(r-a)(r-b)f_1'(r)\right\}+f_2(r) \tag{4.7}$$

其中$f_2(r)$为第2个待定函数。对于无限长圆筒并且$\sigma_z^R(z)=$常数的情况，$f_2(r)$ 可以取 (2.9) 右端项，这种情况不在本文重点讨论范围。

利用端部条件(4.3)可以确定$f_2(r)$，

$$f_2(r)=-\frac{1}{4K}z_e^4\left\{\left[3r-2(a+b)+\frac{ab}{r}\right]f_1(r)+(r-a)(r-b)f_1'(r)\right\} \tag{4.8}$$

于是将(4.8)代入(4.7)得，

$$\sigma_z^R=\frac{1}{4K}[2(z\cdot z_e)^2-z_e^4-z^4]\left\{\left[3r-2(a+b)+\frac{ab}{r}\right]f_1(r)+(r-a)(r-b)f_1'(r)\right\} \tag{4.9}$$

将(4.5)代入(4.1)有，

$$\frac{\partial\sigma_r^R}{\partial r}+\frac{\sigma_r^R-\sigma_t^R}{r}=\frac{1}{K}(z_e^2-3z^2)(r-a)(r-b)f_1(r) \tag{4.10}$$

记在截面$z=z_e/\sqrt{3}$上分布的径向残余应力和切向残余应力分别为σ_r^{RI}，σ_t^{RI}，则由(4.10)得知它们满足以下平衡方程，

$$\frac{d\sigma_r^{RI}}{dr}+\frac{\sigma_r^{RI}-\sigma_t^{RI}}{r}=0 \tag{4.11}$$

就是说，在截面$z=z_e/\sqrt{3}$上的径向及切向残余应力分布自成平衡系统。如果在该截面附近取一薄环，可以利用简化的 Sachs 公式测量计算该截面上的径向及切向残余应力σ_r^{RI}和σ_t^{RI}，

$$\sigma_r^{RI}=\frac{A_b-A}{2A}\phi \tag{4.12}$$

$$\sigma_t^{RI}=(A_b-A)\frac{d\phi}{dA}-\frac{A_b+A}{2A}\phi \tag{4.13}$$

其中$A=\pi r^2$，$A_b=\pi b^2$，$\phi=E\varepsilon_{tb}(r)$。

为此我们定义$z=z_e/\sqrt{3}$截面为“优选截面”。

考虑任意截面上的径向及切向残余应力，可以近似认为按比例变化。于是在任意截面上，

$$\sigma_r^R=\sigma_r^{RI}+\delta(z,r)\sigma_r^{RI} \tag{4.14}$$
$$\sigma_t^R=\sigma_t^{RI}+\delta(z,r)\sigma_t^{RI} \tag{4.15}$$

其中σ_r^{RI}，σ_t^{RI}是由 Sachs 法测定的“优选截面”上的残余应力，$\delta(z,r)$是任意截面上的比例函数。

将(4.14)，(4.15)代入(4.10)得，

$$\frac{\partial\delta(z,r)}{\partial r}=\frac{1}{K}(z_e^2-3z^2)\frac{1}{\sigma_r^{RI}}(r-a)(r-b)f_1(r) \tag{4.16}$$

并根据(4.14)，(4.15)有“优选截面条件”，

$$\delta(z,r)=0 \qquad \text{当}z=\frac{1}{\sqrt{3}}z_e \tag{4.17}$$

积分(4.16)：

$$\delta(z,r)=\frac{1}{K}(z_e^2-3z^2)\int_a^r\frac{1}{\sigma_r^{RI}}(r-a)(r-b)f_1(r)dr+c(z) \tag{4.18}$$

其中$c(z)$是待定函数，根据“优选截面条件”(4.17)，可以取$c(z)=0$，于是

$$\delta(z,r)=\frac{1}{K}(z_e^2-3z^2)\int_a^r\frac{1}{\sigma_r^{RI}}(r-a)(r-b)f_1(r)dr \tag{4.19}$$

方程(4.19)是一类特殊的沃尔泰拉积分方程，核函数为$(r-a)(r-b)/\sigma_r^{RI}$，未知函数为$f_1(r)$。如果在圆筒某一截面上测得一系列δ值，那么就很容易求得$f_1(r)$的数值解。然后用(4.14)，(4.15)，(4.5)，(4.9)可以计算圆筒内任意位置的残余应力σ_r^R，σ_t^R，τ_{rz}^R，σ_z^R。

测量δ的合理位置应该选取圆筒端部截面。在截取“优选截面”薄环之前用X光方法可测得圆筒端部的$\sigma_r^R(r)$，$\sigma_t^R(r)$值。然后截取“优选截面”薄环，用Sachs法测得$\sigma_r^{RI}(r)$，$\sigma_t^{RI}(r)$值，从而适当用(4.14)，(4.15)确定一系列δ值。

附　录

积分方程(4.19)可以推广为下述一般形式，

$$F(x)=\lambda(x)\int_a^b K(x)y(x)dx+\int_a^x K(x)y(x)dx \qquad (a\leqslant x\leqslant b) \tag{A.1}$$

其中$F(x)$，$\lambda(x)$，$K(x)$为已知函数，$y(x)$为未知函数。

该方程为一类特殊的沃尔泰拉积分方程。以下给出关于该方程的数值方法。

首先将方程(A.1)离散为如下形式，

$$F(x_i)=\lambda(x_i)\sum_{j=1}^{n}K(x_j)y(x_j)W_j$$

$$+\sum_{m=1}^{i-1}\frac{1}{2}[K(x_m)y(x_m)+K(x_{m+1})y(x_{m+1})]\overline{W}_m \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{A.2}$$

亦即，

$$F(x_i)=\sum_{j=1}^{n}\lambda(x_i)K(x_j)y(x_j)W_j$$

$$+\sum_{m=1}^{i-1}\frac{1}{2}[K(x_m)y(x_m)+K(x_{m+1})y(x_{m+1})]\overline{W}_m \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{A.3}$$

其中$x_j(j=1,2,\cdots,n)$是在区间$[a,b]$上n个选定的求积节点，常数W_j和$\overline{W}_m$是对应的求积系数。如果要求在每个节点$x_i(i=1,2,\cdots,n)$处，(A.3)两边相等，就得到关于n个未知函数值$y(x_i)(i=1,2,3,\cdots,n)$的n个线性方程。

令：

$$y_j=y(x_j),\quad F_i=F(x_i),\quad A_{ij}=\lambda(x_i)K(x_j)$$

$$B_{ij}=\begin{cases}K(x_i) & (1\leqslant j\leqslant i)\\ 0 & (j>i)\end{cases}$$

(A.3)式即可写为：

$$F_i=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}y_jW_j+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{2}[B_{ij}y_j+B_{ij+1}y_{j+1}]\overline{W}_j \tag{A.4}$$

写成矩阵形式为，

$$\mathbf{AW}\{y\}+\mathbf{B}\overline{\mathbf{W}}\{y\}=\{F\} \tag{A.5}$$

记，

$$\mathbf{H}=\mathbf{AW}+\mathbf{B}\overline{\mathbf{W}} \tag{A.6}$$

则有，

$$\mathbf{H}\{y\}=\{F\} \tag{A.7}$$

其中**A**为满阵，**B**为下三角矩阵，**W**及$\overline{\mathbf{W}}$为对角矩阵，$\{F\}$为已知向量，$\{y\}$为待求向量．

由(A.7)可以求得$y(x)$的数值解．

例如，积分方程

$$x^2-\cos x+2=(x^2+1)\int_0^{\pi/2}\cos\frac{x}{2}\,y(x)dx+\int_0^x\cos\frac{x}{2}\,y(x)dx \quad \left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right) \tag{A.8}$$

其精确解为

$$y(x)=2\sin\frac{x}{2} \tag{A.9}$$

而由以上方法得到的数值解与精确解比较如下：

节　点	$x_1=0$	$x_2=\pi/8$	$x_3=\pi/4$	$x_4=3\pi/8$	$x_5=\pi/2$
精 确 解	0	0.3902	0.7657	1.1111	1.4142
数 值 解	0.0004	0.3934	0.7781	1.1243	1.4337

从以上比较可以看出，数值解对方程（A.1)是很有效的．特别对于测量、计算有限长厚壁圆筒的残余应力时，$F(x)$不是解析表达式，而是一系列测量值．因此数值方法更有实际意义．

参 考 文 献

[1] Davidson, T. E., D. P. Kendall and A. N. Reiner, Residual stress in thick-wall cylinders resulting from mechanically induced overstrain, *Experimental Mechanics*, 3, 11 (1963).

[2] 米赫林, C. Г., 《积分方程及其应用》，商务印书馆（1955).

The Application and Extension of Sachs Method

Song Shun-cheng

(Inner Mongolia Institute of Metallic Materials, Baotou)

Abstract

In this paper, we present the simplification of Sachs formulas for the measurement and calculation of the residual stresses of the cylinder only with the plane stresses. Furthermore, we present the method for the measurement and calculation of the residual stresses of the cylinder not only with the finite length but with the longitudinal stress. These can be applied to the investigation on the residual stresses of the autofretted gun tube.