应用数学和力学，第10卷第12期(1989年12月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

不均匀杆、梁、膜的高频渐近性质*

姬建军　胡　奎　王大钧

(北京大学力学系，1987年9月15日收到)

摘　要

本文用摄动法研究了不均匀的杆、梁和圆膜的高频渐近性质．对有间断的物理参数的情形也作了讨论．

当物理参数、几何参数随杆或梁的轴线变化，或随圆膜的径向变化时，一般情况这些结构的频率、振型只能借助于数值方法求得．但是，对于它们的高频，却可以用分析方法估计．了解它们的高频渐近性质，对于研究振动结构的定性性质是有用的，对于给定频率数据以构造结构的物理参数的反问题来说更是必要的．

在[1]和[2]中，对不均匀杆的问题作了初步讨论，后者用摄动法作了一阶近似分析．H. Hochstadt[3]曾对杆的高频渐近性质给予详细分析，V. Barcilon[4]对梁的问题给出了一阶近似估计．本文统一用摄动法给出了杆、梁和圆膜的高频渐近估计，而且讨论了杆和梁的截面参数不连续的情形，给出了相应的结果．

一、不均匀杆的高频渐近性质

当弹性模量E、质量密度ρ、截面积A随轴线x变化时，圆频率ω和振型y的方程为

$$\frac{d}{dx}\left(EA\frac{dy}{dx}\right)+\rho A\omega^2 y=0 \tag{1.1}$$

这里以两端固定的边条件为例讨论杆的高频渐近性质．此时 $y(0)=y(l)=0$．作变换

$$\phi(t)=(E\rho A^2)^{1/4}y(x),\ t=\int_0^x\sqrt{\rho/E}\,dx \tag{1.2}$$

当EA和ρA的二级微商存在时，方程(1.1)变为

$$\phi_{tt}(t)+(\omega^2+f(t))\phi(t)=0 \tag{1.3}$$

其中

$$f(t)=(E^5\rho^{-3}A^2)^{1/4}\left[\frac{d^2}{dx^2}(E\rho A^2)^{-1/4}+(EA)^{-1}\frac{d}{dx}(EA)\frac{d}{dx}(E\rho A^2)^{-1/4}\right] \tag{1.4}$$

* 叶开沅推荐．

边条件

$$\phi(0)=0, \quad \phi\left(\int_0^l \sqrt{\rho/E}\,dx\right)=0 \tag{1.5}$$

对于大的ω，方程(1.3)的渐近解可表为[2]

$$\phi=\exp\left[\omega\sum_{m=0}^{\infty}v_m(t)\omega^{-m}\right] \tag{1.6}$$

代入方程(1.3)，并使ω的同次幂相等，得到v_m的方程

$$v_0'^2+1=0$$

$$2v_0'v_m'+q_m+\sum_{s=1}^{m-1}v_s'v_{m-s}'+v_{m-1}''=0 \qquad m\geqslant 1$$

其中$q_1=0$；$q_2=f$；$q_m=0$，$m>2$。解出

$$v_0=\pm ix+C_0, \quad v_1=C_1$$

$$v_2=\pm\frac{i}{2}\int_0^t f(\tau)d\tau+C_2, \quad v_3=-\frac{1}{4}f(t)+C_3$$

$$v_4=\mp\frac{i}{8}\left[\int_0^t f^2(\tau)d\tau+\int_0^t \phi''(\tau)d\tau\right]+C_4$$

……

其中C_j是常数，如只取前四项，$\phi(t)$可表为

$$\phi(t)=[\exp(-f/4\omega^2)]\left\{A\sin\left[\omega t+\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)\Big/2\omega+o(1/\omega^3)\right]\right.$$
$$\left.+B\cos\left[\omega t+\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)\Big/2\omega+o(1/\omega^3)\right]\right\} \tag{1.7}$$

由边条件(1.5)得

$$B=0$$

$$\sin\left[\omega t_2+\left(\int_0^{t_2}f(\tau)d\tau\right)\Big/2\omega+o(1/\omega^3)\right]=0$$

其中 $t_2=\int_0^l \sqrt{\rho/E}\,dx$. 由

$$\omega_n t_2+\left(\int_0^{t_2}f(\tau)d\tau\right)\Big/2\omega_n+o(1/\omega^3)=n\pi \qquad n\to\infty$$

得

$$\omega_n=n\pi\Big/\int_0^l\sqrt{\rho/E}\,dx-\left(\int_0^{t_2}f(\tau)d\tau\right)\Big/2n\pi+o(1/n^3) \qquad n\to\infty \tag{1.8}$$

注意到对于均匀杆，即E,ρ,A为常数时，

$$\omega_n=\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{1.9}$$

式(1.8)表明，在略去$o(1/n)$的意义下，高频与截面积$A(x)$无关；而且对于相同的

$$\int_0^l \sqrt{\rho/E}\,dx$$

的杆，不论$\rho(x)$，$E(x)$如何变化，其高频是相同的，就是具有常数值

$$\rho/E=\left(\int_0^l \sqrt{\rho(x)/E(x)}\,dx/l\right)^2$$

的均匀杆的高频。

本节处理的杆的高频渐近结果只适用于杆的截面参数充分光滑时，有间断的情况完全不同。

二、参数有间断情形的杆

设杆在$x=\alpha l$处，$\alpha<1$，EA和ρA不连续，而在$0\leqslant x\leqslant \alpha l$，$\alpha l\leqslant x\leqslant l$两段内光滑，分别以$E_1A_1$，$\rho_1A_1$和$E_2A_2$，$\rho_2A_2$表示两段内的刚度和质量参数，仍以两端固定为例来讨论。

如两段杆皆为均匀，频率方程是

$$\begin{aligned}&\sin(\sqrt{\rho_1/E_1}\,\omega\alpha l)\cos(\sqrt{\rho_2/E_2}\,\omega l(1-\alpha))\\&\quad+\beta\cos(\sqrt{\rho_1/E_1}\,\omega\alpha l)\sin(\sqrt{\rho_2/E_2}\,\omega l(1-\alpha))=0\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中 $\beta=\sqrt{E_1\rho_1}\,A_1/\sqrt{E_2\rho_2}\,A_2$。

对在两段内分别光滑而不均匀的杆，分别用y_1和y_2表示这两段内的纵向位移。对这两段分别列出运动方程，分别作出形式如式(1.2)的变换，得到两个如方程(1.3)的方程。再设分别有式(1.6)的渐近解。利用两端的位移为零的边条件和在截面间断处($x=\alpha l$)位移和内力连续的条件，得频率方程

$$\begin{aligned}&\sin\left(\omega\int_0^{\alpha l}\sqrt{\rho_1/E_1}\,dx\right)\cos\left(\omega\int_{\alpha l}^{l}\sqrt{\rho_2/E_2}\,dx\right)\\&\quad+\beta_1\cos\left(\omega\int_0^{\alpha l}\sqrt{\rho_1/E_1}\,dx\right)\sin\left(\omega\int_{\alpha l}^{l}\sqrt{\rho_2/E_2}\,dx\right)=o(1/\omega)\end{aligned}\tag{2.2}$$

式(2.2)表明，在高频的情形频率依赖于α（表征截面参数间断的位置）和$\beta_1=[\sqrt{E_1\rho_1}\,A_1/\sqrt{E_2\rho_2}\,A_2]_{x=\alpha l}$（表征间断的大小），而与各段的截面积$A(x)$无关；对具有相同的$\alpha$，$\beta$，且两段的积分

$$\int_0^{\alpha l}\sqrt{\rho_1/E_1}\,dx,\quad \int_{\alpha l}^{l}\sqrt{\rho_2/E_2}\,dx$$

分别相同的杆，频率是相同的，也就是具有常数值

$$\rho_{10}/E_{10}=\left(\int_0^{\alpha l}\sqrt{\rho_1/E_1}\,dx/\alpha l\right)^2$$

和
$$\rho_{20}/E_{20}=\left(\int_{\alpha l}^{l}\sqrt{\rho_2/E_2}\,dx/(1-\alpha l)\right)^2$$

的两段均匀杆合成的杆的频率，频率方程(2.2)趋于方程(2.1)（$\omega\to\infty$）。

三、不均匀梁

梁的抗弯刚度$r(x)$，单位长的质量$m(x)$，振型方程为

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(r(x)\frac{d^2y(x)}{dx^2}\right)-\omega^2m(x)y(x)=0 \tag{3.1}$$

对于均匀梁，$r(x)$，$m(x)$为常数r和m。悬臂梁的频率方程为

$$\mathrm{ch}(\sqrt{\omega}(m/r)^{1/4}l)\cos(\sqrt{\omega}(m/r)^{1/4}l)=-1 \tag{3.2}$$

对高频情形，渐近表达式为$\cos(\sqrt{\omega}(m/r)^{1/4}l)=0$。高频的近似表达式为

$$\omega_n=\frac{(n-1/2)^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{r}{m}}\qquad n\to\infty \tag{3.3}$$

对于一端固定、另一端滑动$(y'=(ry'')'=0)$、铰支和固定的梁的高频近似表达式分别为

$$\omega_n=\frac{(n-1/4)^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{r}{m}},\quad \omega_n=\frac{(n+1/4)^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{r}{m}},\quad \omega_n=\frac{(n+1/2)^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{r}{m}}$$

对于不均匀的梁，在高频情形设振型渐近展开式为

$$y=\exp\left(\sqrt{\omega}\sum_{s=0}^{\infty}v_s(x)\sqrt{\omega}^{-s}\right) \tag{3.4}$$

取前三项，代入方程(3.1)，比较ω^2，$\omega^{3/2}$和ω的系数，得

$$\begin{aligned}&(v_0')^4r/m=1\\&r(4v_0'^3v_1'+6v_0'^2v_0'')+2r'v_0'^3=0\\&r(4v_0'^3v_2'+6v_0'^2v_1'^2+3(v_0'')^2+4v_0'''v_0'+6v_0'^2v_1''\\&\qquad+12v_0'v_0''v_1')+2r'(3v_0'^2v_1'+3v_0''v_0')+r''v_0'^2=0\end{aligned}$$

令 $$p(x)=(m/r)^{1/4},\quad q(x)=p^{3/2}r^{1/2},\quad f(x)=\int_0^x p(\tau)d\tau$$

$$g(x)=\int_0^x\{(5p''/p^2-15p'^2/2p^3)/4-3r'^2/8pr^2+r''/2rp\}dx$$

取v_s的四组解

$$\begin{cases}v_0=f(x)\\v_1=\ln q(x)\\v_2=g(x)\end{cases}\quad\begin{cases}v_0=-f(x)\\v_1=\ln q(x)\\v_2=-g(x)\end{cases}\quad\begin{cases}v_0=if(x)\\v_1=\ln q(x)\\v_2=-ig(x)\end{cases}\quad\begin{cases}v_0=-if(x)\\v_1=\ln q(x)\\v_2=ig(x)\end{cases}$$

于是$y(x)$的基本解

$$y(x)=d_1S(x)+d_2T(x)+d_3Q(x)+d_4R(x) \tag{3.5}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&S(x)=q(x)(\mathrm{ch}\phi_1+\cos\phi_2),\ T(x)=q(x)(\mathrm{sh}\phi_1+\sin\phi_2)\\&Q(x)=q(x)(\mathrm{ch}\phi_1-\cos\phi_2),\ R(x)=q(x)(\mathrm{sh}\phi_1-\sin\phi_2)\\&\phi_1=f(x)\sqrt{\omega}+g(x)/\sqrt{\omega}+o(1/\omega)\\&\phi_2=f(x)\sqrt{\omega}-g(x)/\sqrt{\omega}+o(1/\omega)\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

对于悬臂梁，得频率方程

$$\left|\begin{array}{ll} a_1\mathrm{ch}\phi_1-a_2\cos\phi_2+b_1\mathrm{sh}\phi_1+b_2\sin\phi_2, & a_1\mathrm{sh}\phi_1+a_2\sin\phi_2+b_1\mathrm{ch}\phi_1+b_2\cos\phi_2 \\ b_3\mathrm{sh}\phi_1+c_1\mathrm{ch}\phi_1+c_2\cos\phi_2+b_4\sin\phi_2, & b_3\mathrm{ch}\phi_1+c_1\mathrm{sh}\phi_1-c_2\sin\phi_1+b_4\cos\phi_2 \end{array}\right|_{x=l}=0$$

其中 a_i，b_i，c_i 是 q，ϕ_1 和 ϕ_2 的函数。舍去 ω 的高阶小量，得高频情形的频率方程渐近表达式

$$\cos\left(f(l)\sqrt{\omega}-g(l)/\sqrt{\omega}+o(1/\omega)\right)=0 \tag{3.7}$$

从而高频的渐近表达式为

$$\omega_n=\frac{(n-1/2)^2\pi^2}{\left(\int_0^l (m/r)^{1/4}dx\right)^2}\left[1+\frac{2g(l)\int_0^l (m/r)^{1/4}dx}{(n-1/2)^2\pi^2}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right] \tag{3.8}$$

对于一端固定另一端滑动、铰支和固定的梁，高频的渐近表达式和式(3.8)一样，只需将 $(n-1/2)$ 分别换为 $(n-1/4)$，$(n+1/4)$ 和 $(n+1/2)$。

式(3.8)表明，在忽略 $o(1/n^2)$ 的意义下，梁的高频只依赖于

$$M=\int_0^l (m/r)^{1/4}dx$$

对于具有不同的 $m(x)$ 和 $r(x)$ 的梁，只要 M 相同，梁的高频是相同的。由式(3.3)知道，它们和一个具有常数值

$$m/r=\left(\int_0^l (m/r)^{1/4}dx/l\right)^4$$

的均匀梁的高频相同。

四、参数有间断的梁

梁在 $x=al$，$a<1$，$r(x)$，$m(x)$ 有间断时，上节的处理是无效的。如 $(0, al)$ 和 (al, l) 两段梁的 $r''(x)$ 和 $m''(x)$ 存在，则两段梁分别用上节的振型渐近展开式，利用间断处 $(x=al)$ 两段梁的位移、转角、弯矩和剪力的连续条件，可得梁的频率方程的渐近表达式。例如，悬臂梁的频率方程为

$$\begin{aligned} &c_1c_2-2s_1s_2a^2b^2+(c_1+s_1)(c_2-s_2)ab^3 \\ &\quad+(c_1-s_1)(c_2+s_2)a^3b+c_1c_2a^4b^4=o(1/\sqrt{\omega}) \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中

$$\left.\begin{array}{ll} c_1=\cos\left(\sqrt{\omega}\int_0^{al}(m_1/r_1)^{1/4}dx\right), & c_2=\cos\left(\sqrt{\omega}\int_{al}^{l}(m_2/r_2)^{1/4}dx\right) \\ s_1=\sin\left(\sqrt{\omega}\int_0^{al}(m_1/r_1)^{1/4}dx\right), & s_2=\sin\left(\sqrt{\omega}\int_{al}^{l}(m_2/r_2)^{1/4}dx\right) \\ a=(r_1(al)/r_2(al))^{1/4}, & b=(m_1(al)/m_2(al))^{1/4} \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

对于两段梁都是均匀的情形，可直接（而不是由式(4.1)和(4.2)）得到频率方程

$$c_1c_2-2s_1s_2\cdot a^2b^2+(c_1+s_1)(c_2-s_2)ab^3+(c_1-s_1)(c_2+s_2)a^3b+c_1c_2a^4b^4=0 \tag{4.3}$$

其中

$$\left.\begin{array}{ll} c_1=\cos(\sqrt{\omega}\,(m_1/r_1)^{1/4}al), & c_2=\cos(\sqrt{\omega}\,(m_2/r_2)^{1/4}(1-a)l) \\ s_1=\sin(\sqrt{\omega}\,(m_1/r_1)^{1/4}al), & s_2=\sin(\sqrt{\omega}\,(m_2/r_2)^{1/4}(1-a)l) \\ a=(r_1/r_2)^{1/4}, & b=(m_1/m_2)^{1/4} \end{array}\right\} \tag{4.4}$$

式(4.1)和(4.2)表明，对于不同的梁，不论两段梁的$r_i(x)$和$m_i(x)$，$i=1,2$，如何变化，只要各梁段的$(m_i/r_i)^{1/4}$的积分分别相同，间断位置相同，间断处的$m_1(al)/m_2(al)$和$r_1(al)/r_2(al)$相同，则梁的高频在忽略$o(1/\sqrt{\omega})$的意义下是相同的。比较式(4.3)和(4.4)，它们和具有常数值

$$m_1/r_1=\left(\int_0^{al}(m_1/r_1)^{1/4}dx/al\right)^4,\quad m_2/r_2=\left(\int_{al}^{l}(m_2/r_2)^{1/4}dx/(1-a)l\right)^4$$

的两段均匀梁合成的梁的高频相同。

五、轴对称不均匀圆膜

对于轴对称的具有不均匀的单位面积上的质量$m(r)$的圆膜，振型在环向可按三角级数展开，考虑它的一个环向谐波，振型是

$$u(r,\theta)=F(r)\sin\nu\theta$$

$F(r)$满足方程

$$\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}+\left(\omega^2\frac{m(r)}{T}-\frac{\nu^2}{r^2}\right)F=0 \tag{5.1}$$

其中T为张力。均匀质量$m(r)=m$时，周边$r=a$固定的圆膜的振型

$$F(r)=J_\nu(\omega\sqrt{m/T}\ r) \tag{5.2}$$

J_ν是第一类贝塞耳函数。高频的近似表达式为

$$\omega_n=[n\pi+\pi/4+(\nu+1)\pi/2]\frac{1}{a}\sqrt{\frac{T}{m}} \tag{5.3}$$

对方程(5.1)，作变换

$$F(r)=r^{-1/2}G(r)$$

得方程

$$\frac{d^2G}{dr^2}+\left(\omega^2\frac{m(r)}{T}+\frac{1/4-\nu^2}{r^2}\right)G=0$$

这是属于带奇点的转点问题[2]，可得渐近式

$$F(r)=\left(\frac{m(r)}{T}\right)^{-1/4}\left[\frac{1}{r}\int_0^r\sqrt{\frac{m(\tau)}{T}}d\tau\right]^{1/2}\left[AJ_\nu\left(\omega\int_0^r\sqrt{\frac{m(\tau)}{T}}d\tau\right)\right.$$
$$\left.+BY_\nu\left(\omega\int_0^r\sqrt{\frac{m(\tau)}{\tau}}d\tau\right)\right] \tag{5.4}$$

由于$F(r)$在$r=0$处有界，而

$$\lim_{r\to 0}\left(\int_0^r\sqrt{m/T}\,d\tau\right)\Big/r=\sqrt{m(0)/T}$$

从而$B=0$。

对周边$r=a$固定的膜$F(a)=0$，得频率方程的渐近式

$$J_\nu\left(\omega\int_0^a\sqrt{m(\tau)/T}\,d\tau\right)=0\qquad \omega\to\infty \tag{5.5}$$

及高频的渐近表达式

$$\omega_n=[n\pi+\pi/4+(\nu+1)\pi/2]\Big/\int_0^a\sqrt{m/T}\,dr \qquad n\to\infty \tag{5.6}$$

式(5.6)表明，不论$m(r)$如何变化，只要

$$\int_0^a\sqrt{m(r)}\,dr$$

相同，膜的高频是相同的。比较式(5.3)，这些高频和具有均匀质量

$$m=\left(\int_0^a\sqrt{m(r)}\,dr/a\right)^2$$

的膜的高频相同。

六、一个数值算例

一矩形截面梁，高度h呈线性，厚度为常数，长$l=300$，在$x=0$处$h=31$，$x=300$处$h=1$。表1的第一行是$x=0$处固定$x=l$处自由的悬臂梁的第1至15阶频率，单位为Hz。第二行为$x=l$处固定$x=0$处自由的梁的频率，它们由有限单元法计算。第三行是相当等截面梁的频率，其相当的梁高由

$$m/r=\left(\int_0^l\sqrt[4]{m(x)/r(x)}\,dx/l\right)^4$$

计算，即

$$h=l^2\Big/\left(\int_0^l\sqrt{1/h(x)}\,dx\right)^2$$

第四行是按公式(3.3)计算的频率近似值。结果表明，即使对于变化很大的变截面梁，在不大的几阶频率以后，渐近解的结果已经很好了。

表 1

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0.060	0.174	0.353	0.600	0.941	1.337	1.796	2.357	2.956	3.677	4.487	5.307	6.264	7.199	8.246
0.020	0.052	0.232	0.476	0.818	1.226	1.697	2.280	2.907	3.668	4.507	5.363	6.353	7.288	8.404
0.014	0.089	0.250	0.490	0.810	1.210	1.690	2.250	2.890	3.610	4.490	5.290	6.250	7.290	8.410
0.010	0.090	0.250	0.490	0.810	1.210	1.690	2.250	2.890	3.610	4.490	5.290	6.250	7.290	8.410

参 考 文 献

[1] 柯朗、希尔伯特，《数学物理方法》，（中译本），科学出版社（1959）.

[2] 奈弗，A. H.，《摄动方法》，（中译本），上海科技出版社（1984）.

[3] Hochstadt, H., Asymptotic estimates for the Sturm-Liouville spectrum, *Comm. on Pure and Appl. Math.*, Interscience Publishers, A Division of John Wiley & Sons, New York, London, 14 (1961), 749—764.

[4] Barcilon, V., Inverse problem for the vibrating beam in the free-clamped configuration, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **304** (1982), 211—251.

The Asymptotic Properties of High Frequencies for Bars, Beams and Membranes

Ji Jian-jun Hu Kui Wang Da-jun

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)

Abstract

In this paper, a uniform analysis of the asymptotic properties of high frequencies of non-uniform bars, beams and circular membranes is given by using perturbation method, and the case of discontinuous physical parameters is also discussed.