

非牛顿流体管内不定常流的解析解

刘慈群 黄军旗

(石油部、中科院渗流流体力学研究所, 1988年8月10日收到)

摘 要

本文用积分变换方法分别给出了二阶流体和 Maxwell 流体管内不定常流运动方程的解析解, 据此可以分析轴向速度和切应力分布与变化特征, 为管道工程设计提供理论依据。

一、引 言

钻井和采油工程以及高分子化学工程需要研究非牛顿粘弹性流体在管内的不定常流动。1988年, 韩式方^[1]、伍岳庆^[2]相继用 Kantorovich 变分方法和差分方法近似地求解了二阶流体和 Maxwell 流体圆管内不定常流运动方程, 初步得出反映非牛顿流特征的一些结果。本文用 Hankell 积分变换方法分别得到了该两种流体管内运动问题的解析解, 其形式简洁, 易于数值实现, 不仅从理论上能够分析揭示非牛顿管流的定常和不定常特征, 而且能用以校核近似解的精度及适用范围。

二、二阶流体管内不定常流动

1. 基本方程

我们讨论圆管内的流动, 可以作如下假设:

- 1) 流体不可压缩;
- 2) 管半径方向流体速度为零;
- 3) 流动关于管轴对称;
- 4) 轴向速度 w 只与管半径 r 有关。

据此伍岳庆^[2]给出了如下的本构关系和轴向动量方程应力张量的物理分量为:

$$T_{\langle rr \rangle} = \beta_1 \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + 2\beta_2 \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \quad (2.1)$$

$$T_{\langle \theta\theta \rangle} = T_{\langle \theta z \rangle} = T_{\langle rz \rangle} = 0 \quad (2.2)$$

$$T_{\langle zz \rangle} = \beta_1 \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \quad (2.3)$$

$$T_{\langle rz \rangle} = \eta_0 \frac{\partial w}{\partial r} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (2.4)$$

轴向动量方程为:

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} T_{\langle rz \rangle} + \frac{1}{r} T_{\langle rz \rangle} \quad (2.5)$$

这里 β_1 和 β_2 是物质常数, η_0 是特征粘度. 其它字符有它们通常的意义.

将本构关系(2.1)~(2.4)代入式(2.5)并设

$$f = -\frac{\partial p}{\partial z}, \quad u = w / \left[\frac{1}{\eta_0} f R^2 \right], \quad \tau = \frac{\eta_0 t}{\rho R^2}, \quad x = \frac{r}{R}$$

则有式(2.5)的无量纲形式:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = 1 + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + R_0 \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \quad (2.6)$$

这里 $R_0 = \beta_2 / \rho R^2$, R 为管半径.

2. 问题求解

对方程(2.6)提出如下定解条件:

$$u(x, 0) = 0 \quad (2.7)$$

$$\partial u(0, \tau) / \partial x = 0 \quad (2.8)$$

$$u(1, \tau) = 0 \quad (2.9)$$

对(2.6)式在 x 空间对 u 施行 Hankel 变换, 并记:

$$\bar{u} = \int_0^1 x u(x, \tau) J_0(\rho_i x) dx$$

其中 $J_0(\cdot)$ 为第一类零阶 Bessel 函数, ρ_i 为其根, 即

$$J_0(\rho_i) = 0$$

因为

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x \left[\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] J_0(\rho_i x) dx \\ &= \int_0^1 J_0(\rho_i x) d \left[x \frac{\partial u}{\partial x} \right] = x \frac{\partial u}{\partial x} J_0(\rho_i x) \Big|_0^1 + \rho_i \int_0^1 x \frac{\partial u}{\partial x} J_1(\rho_i x) dx \\ &= \rho_i \int_0^1 x J_1(\rho_i x) du = \rho_i \left[u x J_1(\rho_i x) \Big|_0^1 - \int_0^1 u d[x J_1(\rho_i x)] \right] \\ &= - \int_0^1 u d[(x \rho_i) J_1(\rho_i x)] \end{aligned}$$

又因为 $d(x^2 J_2(x)) = x^2 J_{-1}(x) dx$

所以 $\int_0^1 x \left[\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] J_0(\rho_i x) dx = -\rho_i^2 \int_0^1 x u J_0(\rho_i x) dx = -\rho_i^2 \bar{u}$

方程(2.6)中右端第一项常数1的 Hankel 变换为

$$\frac{1}{\rho_i} J_1(\rho_i)$$

所以经过变换后我们有

$$\frac{d\bar{u}}{d\tau} = \frac{1}{\rho_i} J_1(\rho_i) - \rho_i^2 \bar{u} - R_o \rho_i^2 \frac{d\bar{u}}{d\tau} \quad (2.10)$$

$$\bar{u}(\rho_i, 0) = 0 \quad (2.11)$$

解之得

$$\bar{u}(\rho_i, \tau) = \frac{J_1(\rho_i)}{\rho_i^3} \left[1 - \exp\left(-\frac{\rho_i^2}{1+R_o\rho_i^2} \tau\right) \right] \quad (2.12)$$

根据 Hankel 变换反演公式

$$u(x, \tau) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \bar{u}(\rho_i, \tau) \frac{J_0(\rho_i x)}{J_1^2(\rho_i)}$$

最终有

$$u(x, \tau) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \left[1 - \exp\left(-\frac{\rho_i^2}{1+R_o\rho_i^2} \tau\right) \right] \frac{J_0(\rho_i x)}{\rho_i^3 J_1(\rho_i)} \quad (2.13)$$

此式即为二阶流体管流的速度分布公式。

当 $R_o=0$ 时, 式(2.13)化简为牛顿流体的结果。

$$u(x, \tau) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} [1 - \exp(-\rho_i^2 \tau)] \frac{J_0(\rho_i x)}{\rho_i^3 J_1(\rho_i)} \quad (2.14)$$

比较(2.13)和(2.14)两式可知, 二阶流体准数 R_o 越大则趋向定常速度分布的时间就越长。

因为

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_i x)}{\rho_i^3 J_1(\rho_i)} = \frac{1}{8} (1-x^2)$$

所以(2.13)还可写为

$$u(x, \tau) = \frac{1}{4} (1-x^2) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \exp\left(-\frac{\rho_i^2}{1+R_o\rho_i^2} \tau\right) J_0(\rho_i x)}{\rho_i^3 J_1(\rho_i)} \quad (2.15)$$

通常的工程设计中, 取上式右端级数的前一项或两项即可。对于给定的 R_o , 由式(2.15)还可估计要满足某种精度须取的级数项数。

平均流速公式为

$$u_c = 2 \int_0^1 u x dx = \frac{1}{8} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{\rho_i^4} \exp\left(-\frac{\rho_i^2}{1+R_o\rho_i^2} \tau\right) \quad (2.16)$$

剪切应力公式为

$$\begin{aligned} F_\tau(x, \tau) &= \frac{\partial u}{\partial x} + R_o \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{2} x + \sum_{i=1}^{\infty} 2 \exp\left(-\frac{\rho_i^2 \tau}{1+R_o\rho_i^2}\right) \frac{J_1(\rho_i x)}{\rho_i^2 (1+R_o\rho_i^2) J_1(\rho_i)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

这里 $F_\tau = R_o T_{rz} / f$, 须定义 $F_\tau(x, 0) = 0$ 。

从以上各式看出, 当 $\tau \rightarrow \infty$ 时即流动稳定以后, 非牛顿流体和牛顿流体管流问题的速度和应力分布是一致的, 其行为特征是非牛顿流趋于稳定的时间较长。

三、Maxwell 流体管内不定常流

1. 基本方程

这里的基本假设仍同于二阶流体, 其本构关系伍岳庆^[2]给出为

$$T_{\langle rs \rangle} + \lambda_1 \partial T_{\langle rs \rangle} / \partial t = \eta_0 \partial w / \partial r \quad (3.1)$$

式中 λ_1 为松弛时间, η_0 为零剪切粘度, 轴向动量方程亦为式(2.5)。将(3.1)代入(2.5)并无量纲化之有

$$H_a \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial u}{\partial \tau} = 1 + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (3.2)$$

这里 $H_a = \lambda_1 \eta_0 / \rho R^2$ 为物质常数, $u = w / (\eta_0^{-1} f R^2)$, $\tau = \eta_0 t / \rho R^2$, $x = r / R$,

$$f = - \left[\frac{\partial p}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \right] \text{ 认为是常数.}$$

2. 问题求解

我们提出下述定解条件.

$$u(x, 0) = \frac{\partial}{\partial \tau} u(x, 0) = 0 \quad (3.3)$$

$$u(1, \tau) = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(0, \tau) = 0 \quad (3.5)$$

对(3.2)式中的 u 在 x 空间施行 Hankel 变换, 并设

$$\bar{u} = \int_0^1 x u J_0(\rho_i x) dx$$

这里的字符意义同前。我们有下述常微分方程及初始条件.

$$H_a \frac{d^2 \bar{u}}{d\tau^2} + \frac{d\bar{u}}{d\tau} + \rho_i^2 \bar{u} = \frac{1}{\rho_i} J_1(\rho_i) \quad (3.6)$$

$$\bar{u}|_{\tau=0} = \frac{d\bar{u}}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = 0 \quad (3.7)$$

解之有

$$\bar{u}(\rho_i, \tau) = \left[\frac{r_2}{r_1 - r_2} \exp[r_1 \tau] + \frac{r_1}{r_2 - r_1} \exp[r_2 \tau] + 1 \right] \frac{J_1(\rho_i)}{\rho_i^2} \quad (3.8)$$

当 $1 - 4H_a \rho_i^2 \geq 0$

$$\bar{u}(\rho_i, \tau) = \left[\exp[\alpha \tau] \left(\frac{\alpha}{\beta} \sin \beta \tau - \cos \beta \tau \right) + 1 \right] \frac{J_1(\rho_i)}{\rho_i^2} \quad (3.9)$$

当 $1 - 4H_a \rho_i^2 < 0$

这里

$$r_1 = \alpha + \frac{\sqrt{1 - 4H_a \rho_i^2}}{2H_a}, \quad r_2 = \alpha - \frac{\sqrt{1 - 4H_a \rho_i^2}}{2H_a}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2H_a}, \quad \beta = \frac{1}{2H_a} \sqrt{4H_a \rho_i^2 - 1}$$

反演(3.8)和(3.9)最终有

$$u(x, \tau) = 2 \sum_{\rho_i \leq 1/4H_a} \left[\frac{r_2}{r_1 - r_2} \exp[r_1 \tau] + \frac{r_1}{r_2 - r_1} \exp[r_2 \tau] + 1 \right] \frac{J_0(\rho_i x)}{\rho_i^3 J_1(\rho_i)} + 2 \sum_{\rho_i > 1/4H_a} \left[\exp[\alpha \tau] \left(\frac{\alpha}{\beta} \sin \beta \tau - \cos \beta \tau \right) + 1 \right] \frac{J_0(\rho_i x)}{\rho_i^3 J_1(\rho_i)} \quad (3.10)$$

此式即为 Maxwell 流体管内流动速度分布公式。当 $H_a \rightarrow 0$ 时, $r_1 \rightarrow -\rho_i^2$, $r_2 \rightarrow -\infty$, 此时(3.10)式变为

$$u(x, \tau) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} [1 - \exp(-\rho_i^2 \tau)] \frac{J_0(\rho_i x)}{\rho_i^3 J_1(\rho_i)} \quad (3.11)$$

此式为牛顿流体速度分布公式。

$$\text{当 } \tau \rightarrow \infty \text{ 时} \quad u(x, \infty) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_i x)}{\rho_i^3 J_1(\rho_i)} = \frac{1}{4} (1 - x^2) \quad (3.12)$$

为管内稳定流动的牛顿流体速度分布公式。

由(3.10)式知道, u 为两个级数之和, 第一个级数随时间增加单调变化, 第二个级数随时间增加呈振荡型, H_a 越大第二级数的贡献越多, 振荡成份也就越多。所以, H_a 越大速度趋于稳定前的振动就越厉害。

切应力分布公式由下述方程决定:

$$F_r + H_a \partial F_r / \partial \tau = \partial u / \partial x \quad (3.13)$$

这里 $F_r = RT_{(rz)} / f$

将(3.10)式代入有

$$F_r(x, \tau) = \frac{1}{H_a} \exp\left[-\frac{1}{H_a} \tau\right] \int_0^{\tau} \frac{\partial u}{\partial x} \exp\left[\frac{1}{H_a} \tau\right] d\tau \quad (3.14)$$

运算后有

$$F_r(x, \tau) = 2 \sum_{\rho_i \leq 1/(4H_a)} f_1 \frac{J_1(\rho_i x)}{\rho_i^3 J_1(\rho_i)} + 2 \sum_{\rho_i > 1/(4H_a)} f_2 \frac{J_1(\rho_i x)}{\rho_i^3 J_1(\rho_i)} \quad (3.15a)$$

$$f_1 = - \left\{ \frac{r_2}{(r_1 - r_2) \left(r_1 + \frac{1}{H_a} \right)} \left[\exp[r_1 \tau] - \exp\left[-\frac{\tau}{H_a}\right] \right] + \frac{r_1}{(r_2 - r_1) \left(r_2 + \frac{1}{H_a} \right)} \left[\exp[r_2 \tau] - \exp\left[-\frac{\tau}{H_a}\right] \right] + H_a \left(1 - \exp\left[-\frac{\tau}{H_a}\right] \right) \right\} / H_a \quad (3.15b)$$

$$f_2 = - \frac{1}{\left(\alpha + \frac{1}{H_a} \right)^2 + \beta^2} \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \left[\beta \exp\left[-\frac{\tau}{H_a}\right] + \exp[\alpha \tau] \left(\left(\alpha + \frac{1}{H_a} \right) \sin \beta \tau - \beta \cos \beta \tau \right) \right] - \left[\exp[\alpha \tau] \left(\left(\alpha + \frac{1}{H_a} \right) \cos \beta \tau + \beta \sin \beta \tau \right) - \left(\alpha + \frac{1}{H_a} \right) \cdot \exp\left[-\frac{\tau}{H_a}\right] \right] \right\} / H_a - \left(1 - \exp\left[-\frac{\tau}{H_a}\right] \right) \quad (3.15c)$$

平均流速公式为 $u_o = 2 \int_0^1 u x dx$

积分之有

$$u_o = \sum_{\rho_i \leq 1/(4H_o)} \left[\frac{r_2}{r_1 - r_2} \exp[r_1 \tau] + \frac{r_1}{r_2 - r_1} \exp[r_2 \tau] + 1 \right] \frac{4}{\rho_i^4} + \sum_{\rho_i > 1/(4H_o)} \left[\exp[\alpha \tau] \left(\frac{\alpha}{\beta} \sin \beta \tau - \cos \beta \tau \right) + 1 \right] \frac{4}{\rho_i^4} \quad (3.16)$$

当 $\tau \rightarrow \infty$ 时

$$u_o = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{\rho_i^4} = \frac{1}{8}, \quad F_{\tau} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-2}{\rho_i^2} \frac{J_1(\rho_i x)}{J_1(\rho_i)} = -\frac{1}{2} x$$

以上两式是通过式(3.12)积分和微分得出。

四、数值结果

图1~10分别为二阶流体和 Maxwell 流体的管内速度分布、中心点速度变化和平均速度变化以及管内应力分布和管壁应力变化图。可以看出各物理量的行为特征与牛顿流体的显著差别。对二阶流体，管壁上的应力在时间 $\tau=0$ 时有一个跳跃， R_o 越大跃值越大，但随 τ 的增大其应力变化却不是 R_o 的单调函数。对于 Maxwell 流体其应力与速度的变化相似，都出现振荡。但速度振荡出现的极大值高于稳定后的对应点速度且 H_o 越大高出幅度越大，而切应力的振荡形态却有异， H_o 越大应力振荡似有减弱，当 $H_o=1.2$ 时，首次振荡极值已小于稳定值了。两种流体的管中心速度与平均速度的变化特征是一致的。

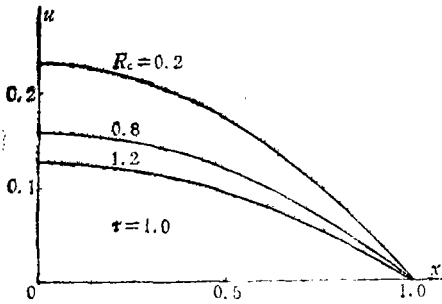


图1 二阶流体管内速度分布

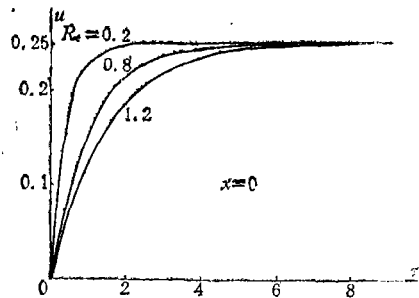


图2 二阶流体管中心速度变化

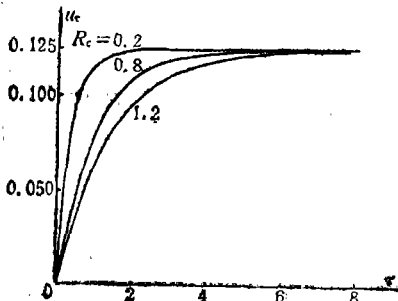


图3 二阶流体管内平均速度变化

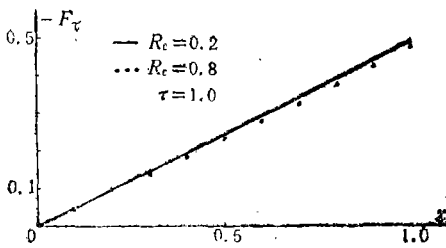


图4 二阶流体管内切应力分布

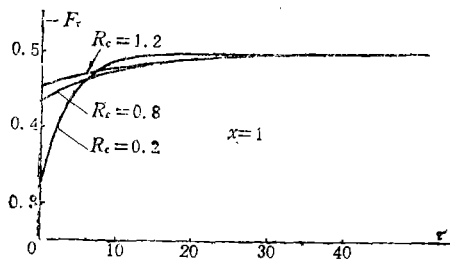


图5 二阶流体管壁切应力变化

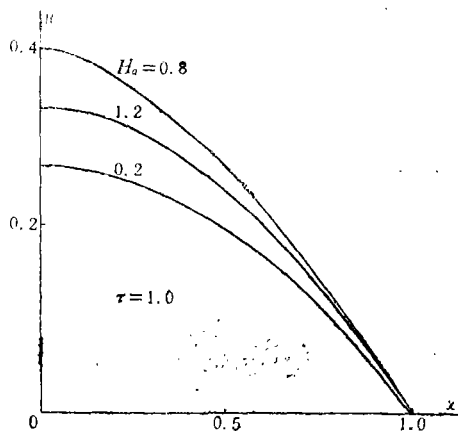


图6 Maxwell 流体管内速度分布

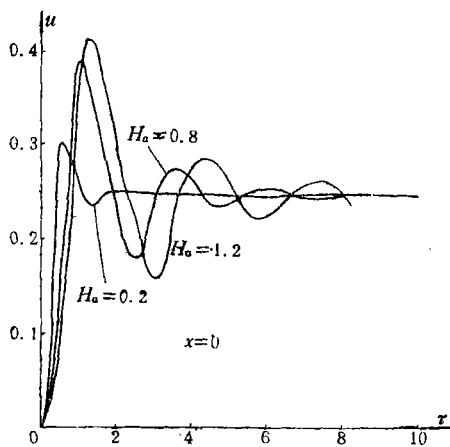


图7 Maxwell 流体管中心速度变化

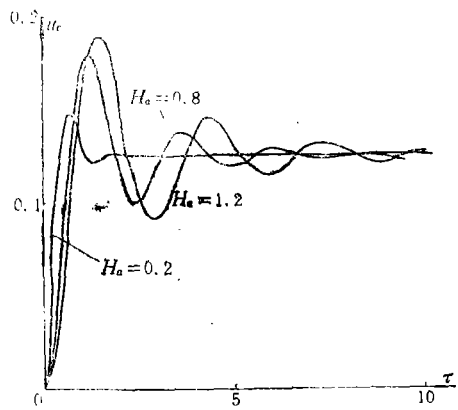


图8 Maxwell 流体管内平均速度变化

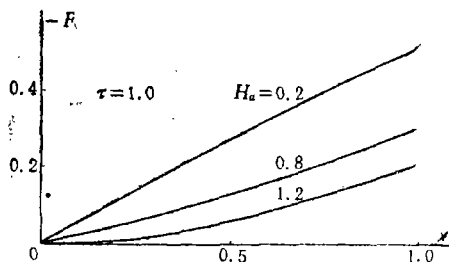


图9 Maxwell 流体管内切应力分布

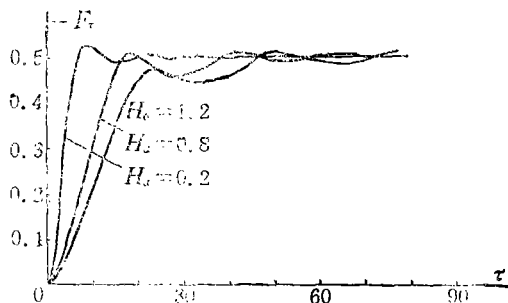


图10 Maxwell 流体管壁切应力变化

五、结 语

非牛顿流体的管流问题应用很广，越要近似于实际问题，简化的因素就越少，问题也就越难。本文给出的解虽有其特定条件的限制，但对非牛顿流体流动特征的反映却有着可靠性和便利性。

参 考 文 献

- [1] 韩式方, 《非牛顿流体连续介质力学》, 四川科学技术出版社 (1987).
- [2] 伍岳庆, 非牛顿流体管内非定常流动研究, 中科院成都分院, 硕士学位论文 (1988).

Analytical Solutions for Equations of Unsteady Flow of Non-Newtonian Fluids in Tube

Liu Ci-qun Huang Jun-qi

(Institute of Porous Flow Fluid Mechanics, Langfang)

Abstract

This paper presents analytical solutions to the partial differential equations for unsteady flow of the second-order fluid and Maxwell fluid in tube by using the integral transform method. It can be used to analyse the behaviour of axial velocity and shear stress for unsteady flow of non-Newtonian visco-elastic fluids in tube, and to provide a theoretical base for the projection of pipe-line engineering.