应用数学和力学，第10卷第11期（1989年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

二阶拟线性奇摄动常微分方程的数值解法

林　平　苏煜城

（南京大学，1988年12月8日收到）

摘　要

本文讨论二阶拟线性奇摄动常微分方程边值问题的数值解法．首先以一个非线性一阶初值问题近似原问题，然后用迭代法求解该近似问题．最后通过迭代法与古典格式得到一个比较满意的结果．

一、引　　言

奇异摄动问题的数值解法已有二十年的历史了。但关于非线性的工作仍很少见，其中多是讨论半线性问题。拟线性方面的文章则更少，其中有好几篇是讨论类似于 Engquist-Osher 格式[1]的一类单调差分格式。Niijima[2],[3] 在这方面得到了最好的收敛结果，即在 l^1范数意义下一阶一致收敛。Lorenz[4]给出拟线性奇异摄动方程解的一些导数估计，并采用数值求解外部展开及内部展开项（校正项）来获得近似解。文［5］也讨论了拟线性方程，得到解的更加精确的导数估计。最近文[6]提出一个数值计算过程，但缺乏严格的理论分析。本文利用连续问题解的性质，给出了原问题的一个近似初值问题，并用［7］中的思想构造迭代序列来数值求解近似问题，在最大模意义下得到收敛性估计。估计式表明当ε较小时，数值过程收敛性很好。当ε不太小时，本文也给出处理方法。

二、连续问题的性质及近似

我们考虑较为一般的拟线性常微分方程奇异摄动边值问题

$$\varepsilon\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d}{dx}f(u)-g(x,u)=0\quad(0<x<1)\tag{2.1a}$$

$$u(0)=A,\ u(1)=B\tag{2.1b}$$

其中 $f(u)\in C^1(R)$，$g(x,u)\in C^1([0,1]\times R)$ 且 $df(u)/du\geqslant\alpha>0$，$\partial g(x,u)/\partial u>0$。由［4］，我们知(2.1)存在唯一解。由[5]，可得如下引理

引理2.1　对问题(2.1)的解$u(x)$及其导数，估计式

$$\left|\frac{d^iu}{dx^i}\right|\leqslant c(1+\varepsilon^{-i}\exp(-\sigma x/\varepsilon))$$

成立，其中$\sigma>0$ $(i=0,1,2)$。

根据$f(u)$，$g(x,u)$的光滑性及$|u|\leqslant c$，又根据有限区域上连续函数的有界性，不难有

引理2.2 $\left|\frac{d^i f}{du^i}\right|\leqslant c$, $\left|\frac{\partial^i g(x,u)}{\partial x^j\partial u^{i-j}}\right|\leqslant c$ $(0\leqslant j\leqslant i,\ i=0,1)$

现在将(2.1a)两边积分，可有

$$\varepsilon\frac{du}{dx}+f(u)=\int_0^x g(t,u(t))dt+K \tag{2.2}$$

其中K为积分常数。令

$$G(x)=\int_0^x g(t,u(t))\,dt,$$

其中的$u(x)$是(2.1)的唯一精确解，看作已知函数。由边界条件$u(1)=B$，又可知

$$K=\varepsilon\frac{du}{dx}(1)+f(B)-G(1).$$

从而问题(2.1)化为一个非线性初值问题

$$\varepsilon\frac{du}{dx}+f(u)=G(x)+K \tag{2.3a}$$

$$u(0)=A \tag{2.3b}$$

K，$G(x)$定义如上。众所周知，问题(2.3)存在唯一解。而(2.1)的解显然满足(2.3)，故(2.1)与(2.3)同解。下面我们来推导(2.3)的一个近似问题。

令$\bar{G}(x)=\int_0^x g(t,w(t))dt$，$\bar{K}=f(B)-\bar{G}(1)$，其中$w(x)$是(2.1)的退化问题

$$\frac{d}{dx}f(w)-g(x,w)=0,\ w(1)=B \tag{2.4}$$

的解，则据[8]，有

$$|u(x)-w(x)|=O(\varepsilon)+O(1)\exp(-\alpha x/\varepsilon)\qquad(\alpha>0,x\in[0,1]) \tag{2.5}$$

于是，根据引理2.2和(2.5)，可得

$$|G(x)-\bar{G}(x)|=\left|\int_0^x[g(t,u(t))-g(t,w(t))]\,dt\right|$$

$$\leqslant\int_0^x\left|\frac{\partial}{\partial u}g(t,\xi)\right||u(t)-w(t)|dt\leqslant c\varepsilon\qquad(x\in[0,1]) \tag{2.6}$$

根据引理2.1和(2.6)，还有

$$|K-\bar{K}|=\left|\varepsilon\frac{du}{dx}(1)+G(1)-\bar{G}(1)\right|\leqslant c\varepsilon \tag{2.7}$$

从而可得(2.3)的近似问题

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}+f(y)=\bar{G}(x)+\bar{K} \tag{2.8a}$$

$$y(0)=A \tag{2.8b}$$

根据(2.6)，(2.7)及条件$df/du\geqslant\alpha>0$，不难知(2.8)存在唯一解$y(x)$，且

$$|u(x)-y(x)|\leqslant c\varepsilon\qquad(x\in[0,1]) \tag{2.9}$$

三、数值计算过程的建立及收敛估计

本节我们讨论问题(2.8)的数值解法。构造如下的迭代过程：

$$Ly_{n+1}\equiv\varepsilon\frac{dy_{n+1}}{dx}+My_{n+1}=\bar{G}(x)+\bar{K}-f(y_n)+My_n \tag{3.1}$$

$$y_{n+1}(0)=A\qquad(n=0,1,\cdots)$$

其中常数$M\geqslant\sup\limits_{u\in R}\left|\dfrac{df}{du}\right|$，$y_0(x)$满足方程

$$\varepsilon\frac{dy_0}{dx}+f(y_0)\geqslant\bar{G}(x)+\bar{K},\ y_0(0)\geqslant A \tag{3.2}$$

关于(3.1)，(3.2)确定的迭代序列$\{y_n\}$，我们有下面的定理。

定理3.1 由（3.1），（3.2）确定的迭代序列$\{y_n\}$（$n=0,1,\cdots$），单调递减收敛到问题(2.8)的解$y(x)$，且有估计

$$|y(x)-y_n(x)|\leqslant c(1-\alpha/M)^{n-1} \tag{3.3}$$

证 先用数学归纳法证明迭代序列$\{y_n\}$单调递减。记$w_n=y_n-y_{n-1}$，即证$w_n\leqslant 0$（$n=1,2,\cdots$）。当$n=0$时，由(3.2)和(3.1)有

$$Lw_1\equiv\varepsilon\frac{dw_1}{dx}+Mw_1=\bar{G}(x)+\bar{K}-f(y_0)-\varepsilon\frac{dy_0}{dx}\leqslant 0 \tag{3.4}$$

$$w_1(0)=y_1(0)-y_0(0)=A-y_0(0)\leqslant 0$$

而根据[9]知算子L满足极值原理，从而有

$$w_1(x)\leqslant 0\qquad(x\in[0,1])$$

设当$n-1$时$w_{n-1}\leqslant 0$对一切$x\in[0,1]$成立。我们来看w_n的情形。因为

$$\begin{aligned}Lw_n&=Mw_{n-1}-[f(y_{n-1})-f(y_{n-2})]\\&=\left[M-\frac{df}{du}(\xi)\right]w_{n-1},\ w_n(0)=0\end{aligned} \tag{3.5}$$

由M的选取知$Lw_n\leqslant 0$，从而$w_n\leqslant 0$（$x\in[0,1]$），即证明了$\{y_n\}$（$n=0,1,\cdots$）单调递减。

另一方面，从(3.4)不难得（据极值原理）

$$|w_1|\leqslant c \tag{3.6}$$

而根据(3.5)有

$$|w_n|\leqslant(1-\alpha/M)|w_{n-1}|\leqslant\cdots\leqslant(1-\alpha/M)^{n-1}|w_1|$$

从而再由(3.6)即得

$$|w_n|\leqslant c(1-\alpha/M)^{n-1} \tag{3.7}$$

又(2.8)与(3.1)相减可得

$$\varepsilon\frac{d}{dx}(y-y_{n+1})+\frac{df}{du}(\xi_1)(y-y_{n+1})$$

$$=\left(M-\frac{df}{du}(\xi_2)\right)(y_{n+1}-y_n),$$

$$(y-y_{n+1})(0)=0$$

由极值原理即有

$$|y-y_{n+1}|\leqslant c|y_{n+1}-y_n|=c|w_{n+1}|$$

因此，由(3.7)知$y_n(x)$收敛于$y(x)$且估计式(3.3)成立。证明毕。

现在我们来考虑关于$y_n(x)$($n=0,1,2,\cdots$)的每一迭代步的计算。先讨论$y_0(x)$的选取。记$\bar{M}\geqslant\max\{\max\limits_{x\in[0,1]}|\bar{G}(x)+\bar{K}-f(0)|,\ \alpha|A|\}$，则取

$$y_0(x)=\bar{M}/\alpha \tag{3.8}$$

不难有 $\varepsilon\dfrac{dy_0}{dx}+f(y_0)=f(0)+\dfrac{df}{du}(\xi)y_0\geqslant f(0)+\bar{M}$

$$\geqslant|\bar{G}(x)+\bar{K}-f(0)|+f(0)\geqslant\bar{G}(x)+\bar{K}\text{和}y_0(0)\geqslant A.$$

即按(3.8)取定的$y_0(x)$满足(3.2)。

对每一迭代步(3.1)，采用指数型拟合差分格式

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon\sigma(\rho)D_+y_{n+1}^{(i)}+My_{n+1}^{(i+1)}=\bar{G}(x_i)+\bar{K}-f(y_n^{(i)})+My_n^{(i)}\quad(i=1,\cdots,N-1)\\&y_{n+1}^{(0)}=A,\ \sigma(\rho)=\rho M\exp(-\rho M)/[1-\exp(-\rho M)]\quad(\rho=h/\varepsilon)\end{aligned}\right\}\tag{3.9}$$

其中 $h=1/N$是网格步长,$x_i=ih$ $(i=0,1,\cdots,N-1)$为网格点,$D_+y_{n+1}^{(i)}=(y_{n+1}^{(i+1)}-y_{n+1}^{(i)})/h$ $(n=0,1,\cdots)$。

为讨论(3.9)的收敛性，先证明一个引理。

引理3.1 设$\{y_n(x)\}(n=0,1,\cdots)$为由(3.1)，(3.8)确定的迭代序列，则下面的估计式成立

$$\left|\frac{d^iy_n(x)}{dx^i}\right|\leqslant c(1+\varepsilon^{-i}\exp(-\alpha x/\varepsilon))\qquad(\alpha>0).$$

其中c与n,ε,x无关$(i=0,1,2)$。

证 我们采用数学归纳法。当$n=0$时，结论显然；$n=1$时，由[9]知结论成立。设$n=k$时结论成立，现在来看$n=k+1$的情形。这时由归纳假设知(3.1)的右端函数$R(x)=\bar{G}(x)+\bar{K}-f(y_k(x))+My_k(x)$满足

$$\left|\frac{d^iR(x)}{dx^i}\right|\leqslant c(1+\varepsilon^{-i}\exp(-\alpha x/\varepsilon))\qquad(\alpha>0)$$

c与k,x,ε无关。故类似于[5]中引理2.1的证明过程知结论成立。证毕。

现在来证明(3.9)的收敛性，即证

$$|y_{n+1}(x_i)-y_{n+1}^{(i)}|\leqslant ch\quad(i=0,1,\cdots,N-1)\tag{3.10}$$

对一切$n\geqslant0$成立，c与n,h,i无关。

仍然采用归纳法。$n=0$时，由于$y_0(x)=\bar{M}/\alpha$为常数，故直接由[9]中第Ⅰ部分第6节知(3.10)成立。设$n=k$时结论成立，现在来看$n=k+1$的情形。考虑辅助问题

$$\begin{aligned}&\varepsilon\sigma(\rho)D_+z_{k+1}^{(i)}+Mz_{k+1}^{(i+1)}=\bar{G}(x_i)+\bar{K}-f(y_k(x_i))+My_k(x_i)\\&z_{k+1}^{(0)}=A\end{aligned}\tag{3.9$'$}$$

利用引理3.1，逐步重复[9]中第Ⅰ部分第6节的过程可得

$$|y_{k+1}(x_i)-z_{k+1}^{(i)}|\leqslant ch\qquad(i=0,1,\cdots,N-1)\tag{3.11}$$

其中c与n,h,ε无关。又(3.9)与(3.9)$'$相减得

$$\begin{aligned}&\varepsilon\sigma(\rho)D_+(y_{k+1}^{(i)}-z_{k+1}^{(i)})+M(y_{k+1}^{(i+1)}-z_{k+1}^{(i+1)})\\&=\left(M-\frac{df}{du}(\xi_i)\right)(y_k^{(i)}-y_k(x_i))\\&y_{k+1}^{(0)}-z_{k+1}^{(0)}=0\end{aligned}$$

其中ξ_i位于$y_k(x_i)$与$y_k^{(i)}$之间。利用极值原理及归纳假设得

$$|y_{k+1}^{(i)}-z_{k+1}^{(i)}|\leqslant\frac{M-\alpha}{M}|y_k^{(i)}-y_k(x_i)|\leqslant ch\tag{3.12}$$

结合(3.11)，(3.12)可知(3.10)成立。

根据(3.10)，(2.9)和定理3.1，我们得

定理3.2 关于由(3.8)，(3.9)确定的解$y_n^{(i)}$ $(i=0,1,\cdots,N-1)$，与原问题(2.1)的解$u(x_i)$之差，成立下面的估计

$$|u(x_i)-y_n^{(i)}|\leqslant c(\varepsilon+h+(1-\alpha M^{-1})^n)\quad(i=0,1,\cdots,N-1)\tag{3.13}$$

其中c与n,h,ε,i无关.

从估计式(3.13)可以看到，当ε不很小时，上面构造的数值计算过程收敛性不好。我们可以如下处理，以得到一个比较满意的结果。设对问题(2.1)给出另外一个算法，为叙述方便起见，我们牌之为算法CM。它的收敛阶为$O(h^s/\varepsilon^r)$ ($s>0$, $r>0$)，例如普通的古典格式就可作为算法CM。当$\varepsilon\leqslant h^{s/(1+r)}$时，我们使用上面提出的迭代法，当$\varepsilon>h^{s/(1+r)}$时，我们使用算法CM，从而可对任意的$\varepsilon$值计算出一个近似值$u_i$。对这个近似值可有误差估计

$$|u(x_i)-u_i|\leqslant ch^{s/(1+r)}\quad(i=0,1,\cdots,N)\tag{3.14}$$

其中c与h,ε,i,n无关，且迭代次数n必须充分大。

参 考 文 献

[1] Osher, S., Nonliear singular perturbation problems and one-sided difference schemes, *SIAM J. Numer. Anal.*, **18**, 1 (1981), 29—144.

[2] Niijima, K., On a difference scheme of exponential type for a nonlinear singular perturbation problem, *Numer. Math.*, **46** (1985), 521—539.

[3] Niijima, K., An error analysis for a difference scheme of exponential type applied to a nonlinear singular perturbation problem without turning points, *J. Comp. Appl. Math.*, **15** (1986), 93—101.

[4] Lorenz, J., Combinations of initial and boundary value method for a class of singular perturbation problem, *Numerical Analysis of Singular Perturbation Problem*, eds. Hemker/Miller, (1979), 296—315.

[5] 林平, 非线性二阶奇异摄动常微分方程的数值解 (待发表).

[6] Kadalbajoo, M. K. and Y. N. Reddy, Initial-value technique for a class of nonlinear singular perturbation problems, *J. Optim. Theory and Appls.*, **53**,3 (1987), 395—406.

[7] Sattinger, D. H., Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems, *Indiana Univ. Math. J.*, **21**, 11 (1972), 979—1000.

[8] Howes, F. A., Singular perturbations and differential inequalities, *Memoirs of the AMS*, 5 (1976), 1—75.

[9] Doolan, E. P, J. J. H. Miller, and W. H. A. Schilders, *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers*, Boole Press, Dublin (1980).

Numerical Solution of Quasilinear Singularly Perturbed Ordinary Differential Equation without Turning Points

Lin Ping Su Yu-cheng

(Nanjing University, Nanjing)

Abstract

In this paper we consider a quasilinear second order ordinary differential equation with a small parameter ε. Firstly an approximate problem is constructed. Then an iterative procedure is developed. Finally we give an algorithm whose accuracy is good for arbitrary $\varepsilon>0$.