

# 用有限元结合动态光弹性分析确定 动态应力强度因子

宁 杰 钱伟长

(上海工业大学, 上海市应用数学和力学研究所, 1988年5月1日收到)

## 摘 要

本文运用有限元方法结合动态光弹性分析, 对动态应力强度因子的计算进行了分析研究。作者在钱伟长教授[1]的基础上, 将动态裂尖的奇异性分析解引入有限元计算, 并以动态光弹性分析所得的裂纹扩展长度与时间的关系曲线作为定解补充条件, 据此建立了有效模拟裂纹扩展的数值模型。通过具体算例证明, 本文的方法取得了与实验结果相吻合的效果。

## 一、公 式

设有一个单位厚度的二维张开型裂纹体, 其所受的外载荷随时间变化。

考虑裂纹传播的情形。在任一时刻 $t$ , 令位移列阵为

$$\{u\} = \{u_0\} + \{u_1^D\} \quad (1.1)$$

其中诸符号的意义如下:

1.  $\{u_0\} = [N]\{\delta^e\} \quad (1.2)$

式中 $\{u_0\}$ ,  $[N]$ 和 $\{\delta^e\}$ 分别为普通有限元计算的位移阵列, 形态函数矩阵和单元结点位移阵列。

2.  $\{u_1^D\}$ 为裂纹扩展情形下, 裂尖的位移场。这种情形下的渐近场为 Rice<sup>[2]</sup>等人先后发现。

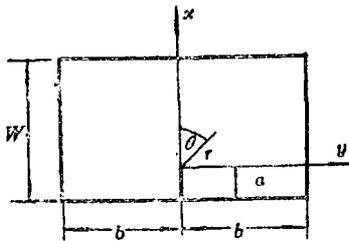


图 1

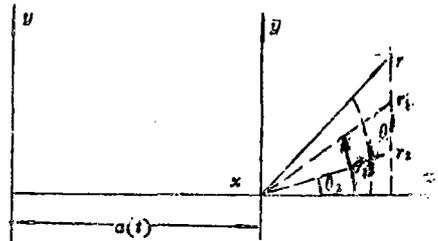


图 2

$$\{u_i^D\} = \beta \left\{ \begin{array}{l} -a_1 \sqrt{r_1} \sin \frac{\theta_1}{2} + \sqrt{r_2} \frac{2a_1 a_2}{1+a_1^2} \sin \frac{\theta_2}{2} \\ \sqrt{r_1} \cos \frac{\theta_1}{2} - \sqrt{r_2} \frac{2a_1 a_2}{1+a_1^2} \cos \frac{\theta_2}{2} \end{array} \right\} K_1^D \quad (1.3)$$

或者记为  $\{u_i^D\} = \{S_i^D\} K_1^D$  (1.4)

其中  $\{S_i^D\} = \beta \left\{ \begin{array}{l} -a_1 \sqrt{r_1} \sin \frac{\theta_1}{2} + \sqrt{r_2} \frac{2a_1 a_2}{1+a_1^2} \sin \frac{\theta_2}{2} \\ \sqrt{r_1} \cos \frac{\theta_1}{2} - \sqrt{r_2} \frac{2a_1 a_2}{1+a_1^2} \cos \frac{\theta_2}{2} \end{array} \right\}$  (1.5)

$$\left. \begin{array}{l} \beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{4(1+\nu)(1+a_1^2)^2}{E[4a_1 a_2 - (1+a_1^2)^2]} \\ \bar{x} = x - a(t) = r_1 \cos \theta_1 = r_2 \cos \theta_2 \\ \bar{y} = y = (r_1/a_1) \sin \theta_1 = (r_2/a_2) \sin \theta_2 \\ r_1 = (\bar{x}^2 + a_1^2 \bar{y}^2)^{1/2}, \quad r_2 = (\bar{x}^2 + a_2^2 \bar{y}^2)^{1/2} \\ \theta_1 = \text{tg}^{-1}(a_1 \bar{y}/\bar{x}), \quad \theta_2 = \text{tg}^{-1}(a_2 \bar{y}/\bar{x}) \\ a_1 = 1 - v^2/c_1^2, \quad a_2 = 1 - v^2/c_2^2, \quad v = \dot{a}(t) = da/dt \\ c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \sqrt{\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \\ c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \sqrt{\frac{1}{2(1+\nu)}} \end{array} \right\} \quad (1.6)$$

式中  $c_1$  与  $c_2$  为弹性膨胀波与剪切波的传播速度,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $E$ ,  $\nu$  与  $\rho$  为材料常数。  
由(1.3)式我们可以求得

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\} = \beta \left\{ \begin{array}{l} -(1+a_1^2) \frac{\cos(\theta_1/2)}{\sqrt{r_1}} + \frac{4a_1 a_2}{1+a_1^2} \frac{\cos(\theta_2/2)}{\sqrt{r_2}} \\ (1+2a_1^2 - a_1^2) \frac{\cos(\theta_1/2)}{\sqrt{r_1}} - \frac{4a_1 a_2}{1+a_1^2} \frac{\cos(\theta_2/2)}{\sqrt{r_2}} \\ 2a_1 \left( \frac{\sin(\theta_1/2)}{\sqrt{r_1}} + \frac{\sin(\theta_2/2)}{\sqrt{r_2}} \right) \end{array} \right\} K_1^D \quad (1.7)$$

(1.7)可记为  $\{\sigma^D\} = \{S_i^D\} K_1^D$  (1.8)

并有  $\{\varepsilon^D\} = \{S_i^D\} K_1^D$  (1.9)

其中

$$\{S_i^D\} = \beta \left\{ \begin{array}{l} -(1+a_1^2) \frac{\cos(\theta_1/2)}{\sqrt{r_1}} + \frac{4a_1 a_2}{1+a_1^2} \frac{\cos(\theta_2/2)}{\sqrt{r_2}} \\ (1+2a_1^2 - a_1^2) \frac{\cos(\theta_1/2)}{\sqrt{r_1}} - \frac{4a_1 a_2}{1+a_1^2} \frac{\cos(\theta_2/2)}{\sqrt{r_2}} \\ 2a_1 \left( \frac{\sin(\theta_1/2)}{\sqrt{r_1}} + \frac{\sin(\theta_2/2)}{\sqrt{r_2}} \right) \end{array} \right\} \quad (1.10)$$

$$\{S_p^0\} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \{S_p^0\} \quad (1.11)$$

将(1.2)和(1.4)代入(1.1), 可得

$$\{u\} = [[N] \{S_p^0\}] \begin{Bmatrix} \{\delta^0\} \\ K_p^0 \end{Bmatrix} \quad (1.12)$$

由(1.12)式, 并根据位移应变关系及虎克定律可以求得

$$\{e\} = [[B] \{S_p^0\}] \begin{Bmatrix} \{\delta^0\} \\ K_p^0 \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

$$\{\sigma\} = [[D] \{S_p^0\}] \begin{Bmatrix} \{\delta^0\} \\ K_p^0 \end{Bmatrix} \quad (1.14)$$

其中[B]和[D]为普通有限元计算的应变矩阵和应力矩阵。

现在我们采用与动力分析的位移有限元素法相伴的 Hamilton 变分原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (1.15)$$

推导有限元动平衡方程, 这个原理中的L为 Lagrange 泛函, 它被定义成<sup>[3]</sup>

$$L = T - u - W, \quad (1.16)$$

对于线弹性体, 上式可表示为

$$L = \sum_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \right] \int_{\Omega} (\rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} - \{e\}^T \{\sigma\}) d\Omega + \int_{S_p} \{u\}^T \{p\} dS \quad (1.17)$$

将(1.12)、(1.13)及(1.14)代入(1.17), 则有

$$\begin{aligned} L = & \sum_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \right] \int_{\Omega} \left( - \begin{Bmatrix} \{\delta^0\} \\ K_p^0 \end{Bmatrix}^T [[B] \{S_p^0\}]^T [[D] \{S_p^0\}] \begin{Bmatrix} \{\delta^0\} \\ K_p^0 \end{Bmatrix} \right. \\ & + \varphi \left. \begin{Bmatrix} \{\delta^0\} \\ K_p^0 \end{Bmatrix}^T [[N] \{S_p^0\}]^T [[N] \{S_p^0\}] \begin{Bmatrix} \{\delta^0\} \\ K_p^0 \end{Bmatrix} \right) d\Omega \\ & + \int_{S_p} \begin{Bmatrix} \{\delta^0\} \\ K_p^0 \end{Bmatrix}^T [[N] \{S_p^0\}]^T \{p\} dS \end{aligned} \quad (1.18)$$

利用变分原理(1.15)式, 得到

$$\begin{aligned} & \sum_{\Omega} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \left( \delta \begin{Bmatrix} \{\delta^0\} \\ K_p^0 \end{Bmatrix}^T \right) \int_{\Omega} [[B] \{S_p^0\}]^T [[D] \{S_p^0\}] d\Omega \begin{Bmatrix} \{\delta^0\} \\ K_p^0 \end{Bmatrix} \right. \\ & \left. - \delta \begin{Bmatrix} \{\delta^0\} \\ K_p^0 \end{Bmatrix}^T \int_{S_p} [[N] \{S_p^0\}]^T \{p\} dS \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

第二项对时间部分积分, 得到

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \begin{Bmatrix} \{\delta^0\} \\ K_p^0 \end{Bmatrix}^T \int_{\Omega} \rho [[N] \{S_p^0\}]^T [[N] \{S_p^0\}] d\Omega \begin{Bmatrix} \{\delta^0\} \\ K_p^0 \end{Bmatrix} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \delta \left\{ \begin{matrix} \{\delta^e\} \\ K_P^e \end{matrix} \right\} \right]_{\Omega} \rho [[N] \{S_P^e\}]^T [[N] \{S_P^e\}] \left\{ \begin{matrix} \{\delta^e\} \\ \dot{K}_P^e \end{matrix} \right\} d\Omega \Big|_{t_1}^{t_2} \\
&\quad - \int_{t_1}^{t_2} \delta \left\{ \begin{matrix} \{\delta^e\} \\ K_P^e \end{matrix} \right\}^T \left[ \int_{\Omega} \rho [[N] \{S_P^e\}]^T [[N] \{S_P^e\}] d\Omega \left\{ \begin{matrix} \{\delta^e\} \\ \dot{K}_P^e \end{matrix} \right\} \right] dt \quad (1.20)
\end{aligned}$$

按照Hamilton原理, 试探位移形态函数在 $t_1$ 与 $t_2$ 时刻, 必须满足给定的条件. 这样, 由于

$$\delta \left\{ \begin{matrix} \delta^e(t_1) \\ K_P^e(t_1) \end{matrix} \right\} = \delta \left\{ \begin{matrix} \delta^e(t_2) \\ K_P^e(t_2) \end{matrix} \right\} = 0$$

所以(1.20)式右端第一项为零, 剩下的一项代入(1.19), 得到

$$\begin{aligned}
&\sum \left[ \int_{t_1}^{t_2} \delta \left\{ \begin{matrix} \{\delta^e\} \\ K_P^e \end{matrix} \right\}^T \left( \int_{\Omega} \rho [[N] \{S_P^e\}]^T [[N] \{S_P^e\}] d\Omega \left\{ \begin{matrix} \{\delta^e\} \\ \dot{K}_P^e \end{matrix} \right\} \right) \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} [[B] \{S_P^e\}]^T [[D] \{S_P^e\}] d\Omega \left\{ \begin{matrix} \{\delta^e\} \\ K_P^e \end{matrix} \right\} - \int_S [[N] \{S_P^e\}]^T \{p\} dS \right] dt = 0 \quad (1.21)
\end{aligned}$$

因为变分 $\delta \left\{ \begin{matrix} \{\delta^e\} \\ K_P^e \end{matrix} \right\}$ 是任意的, 所以就得到了有限元动平衡方程的表达式

$$[M]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\} \quad (1.22)$$

其中诸符号的意义如下

$$1. [M] = \sum \int_{\Omega} \rho \begin{bmatrix} [N]^T [N] & [N]^T \{S_P^e\} \\ \{S_P^e\}^T [N] & \{S_P^e\}^T \{S_P^e\} \end{bmatrix} d\Omega \quad (1.23)$$

$$2. \{q\} = \left\{ \begin{matrix} \{u\} \\ K_P^e \end{matrix} \right\}, \{u\} = [u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n]^T \quad (1.24)$$

$$3. [K] = \sum \int_{\Omega} \begin{bmatrix} [B]^T [D] & [B]^T \{S_P^e\} \\ \{S_P^e\} [B] & \{S_P^e\}^T \{S_P^e\} \end{bmatrix} d\Omega \quad (1.25)$$

$$4. \{Q\} = \sum \int_S \begin{bmatrix} [N]^T \{p\} \\ \{S_P^e\} \{p\} \end{bmatrix} dS \quad (1.26)$$

值得注意的是, 我们所考虑的是一个自由边界问题, 方程(1.22)中的刚度矩阵含有未知的裂纹传播速度. 为了求解方程(1.22), 必须补充一个定解条件. 在此, 我们提出有限元与光弹性分析相结合的方法, 将光弹性分析所得的裂纹传播速度随时间变化的关系 $\alpha = \alpha(t)$ 作为定解补充条件, 将此条件引入方程(1.22)中的刚度矩阵, 便可同一般的动力问题一样求得解答.

裂纹的传播速度是这样测定的, 首先根据所拍摄的动态光弹性照片, 测出裂纹扩展的长度, 而每幅照片所对应的时刻可用示波器记录下来. 于是便获得了裂纹长度随时间变化的曲线, 该曲线的导数即表示了裂纹的传播速度.

## 二、算 例

我们对受冲击载荷作用的含边裂纹的三点弯试样进行计算 (如图3所示)

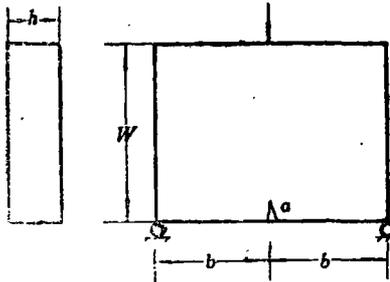


图 3

采用三角形有限单元, 具体计算参数如下:

$$a=6\text{mm}, W=155\text{mm}, 2b=270\text{mm}, h=5.5\text{mm}$$

$$\rho=1277.83\text{kg/m}^3, E_d=5.11 \times 10^9 \text{N/m}^2$$

$$\nu=0.401$$

$$c_1=2938.57\text{m/sec}, c_2=1194.65\text{m/sec}$$

在求解过程中, 冲击载荷可转化成方程(1.22)的初始条件, 裂纹尖端的有限元网格之间的距离与每一时间步裂纹扩展的长度取为一致。裂纹扩展的模拟是通过每计算一时间步放松一个结点来实现的。

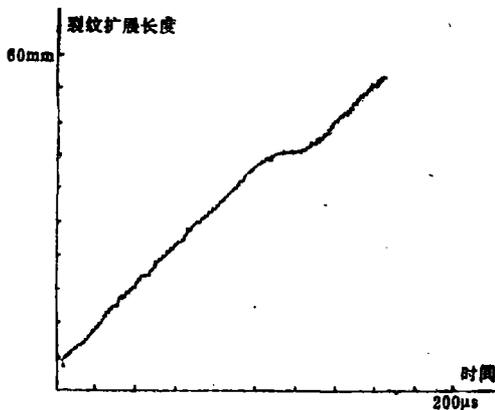


图 4

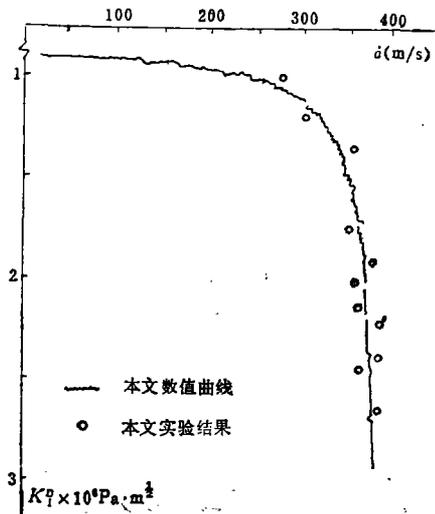


图 5

### 三、结 论

由上述计算实例可见, 我们所得的数值结果和实验结果吻合得较好。在裂纹扩展的初始阶段, 动态应力强度因子的增加是相当缓慢的; 但是, 当裂纹扩展速度到达一定的值时 (我们所得到的这一数值为  $200\text{m/s}$ ), 应力强度因子的增加十分显著, 而以后裂纹扩展的速度几乎保持不变。

本文提供了一种计算动态应力强度因子的较有希望的方法。该方法的优点是在普通有限元中引入了传播裂尖的奇异性分析解, 并以动态光弹性分析所得的裂纹扩展随时间变化的关系曲线作为求解方程的补充条件。此外, 根据这一关系建立的裂纹扩展数值模型亦较真实合理。

最后, 笔者特别感谢钱伟长老师的悉心指导, 对庞金祥先生在动光弹分析方面提供的帮助也一并表示深深的谢意。

### 参 考 文 献

- [1] 钱伟长, 在奇异项上叠加有限元法计算应力强度因子, 《应用数学与力学论文集》, 钱伟长

著, 江苏科学技术出版社 (1980).

- [2] Rice, J. R., Mathematical analysis in the mechanics of fracture, *Fracture*, 2 (1969), 191—311.
- [3] Desai, C. S. and J. F. Abel, *Introduction to the Finite Element Method*, Ch.4, Van Nostrand Reinhold Co., New York (1972).

## Finite Element Method Combined with Dynamic Photoelastic Analysis to Determine Dynamic Stress-Intensity Factors

Ning Jie Chien Wei-zang

(*Shanghai University of Technology; Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai*)

### Abstract

The present paper is addressed to the finite element method combined with dynamic photoelastic analysis of propagating cracks; that is, on the basis of [1] by Chien Wei-zang, finite elements which incorporate the propagating crack-tip singularity intrinsic to two-dimensional elasticity are employed. The relation between crack opening length and time step obtained from dynamic photoelastic analysis is used as a definite condition for solving the dynamic equations and simulating the crack propagations as well. As an example, the impact response of dynamic-bending-test specimen is investigated and the dynamic stress-intensity factor obtained from the mentioned finite element analysis and dynamic photoelasticity is in reasonable agreement with each other.