应用数学和力学，第10卷第10期（1989年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Lurie型直接控制系统的绝对稳定性准则*

张　维

（华中师范大学数学系，1988年10月31日收到）

摘　要

本文对几类特殊的直接控制系统得到了绝对稳定的充要条件，讨论了控制系统第一标准型的绝对稳定性，所得结果改进了文[3]、[5]、[6]、[7]中的相应结果

一、引　言

对形如

$$\dot{x}=Ax+bf(c^Tx)$$

的直接控制系统，国内有一些学者讨论了它的绝对稳定性问题.如文[3]、[5]，而文[6]、[7]等工作则致力于对一些特殊的直接控制系统给出其绝对稳定的充要条件。以上这些工作所采用的方法均是 Liapunov 函数法。本文试图用 Popov 的频率法来讨论直接控制系统的绝对稳定性。第二节得到了几类直接控制系统的绝对稳定的充要条件或充分条件，所得结果改进了文[6]、[7]的相应结果，或者得到了新类型的绝对稳定性准则。

对控制系统的第一标准型：

$$\frac{dx_j}{dt}=-\lambda_jx_j+f(\sigma)\qquad \lambda_j>0$$

$$\sigma=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\qquad (j=1,\ \cdots,\ n)$$

文[3]、[5]用 Liapunov 函数法分别得到了这个系统在 Hurwitz 角域[0, K]和[0, +∞)内的绝对稳定性准则.本文第三节对第一标准型得到的绝对稳定性准则改进或包含了文[3]、[5]的相应结果。

本文得到的所有绝对稳定性准则仅依赖于系统的参数，条件及结论均很明确，易于检验。

二、几类直接控制系统的绝对稳定性准则

本节试图用频率法来解决几类特殊的直接控制系统的绝对稳定性问题。

---

* 周焕文推荐。

对直接控制系统

$$\dot{x}=Ax+bf(c^Tx) \tag{2.1}$$

其中，A 为稳定矩阵，$f(0)=0$，$\sigma f(\sigma)>0$，当 $\sigma\neq 0$。$f(\sigma)$为实连续函数，b，c 均为 n 维实列向量。

首先我们将 Popov 的频率判据写成引理的形式。

引理2.1[2] 如果存在一个 $q\geqslant 0$，使得

$$\operatorname{Re}\{(1+i\omega q)W(i\omega)\}\geqslant 0 \qquad \text{对 } \omega\geqslant 0 \tag{2.2}$$

其中 $W(z)=-c^T(zI-A)^{-1}b$，则系统（2.1）是绝对稳定的。

在系统（2.1）中，实方阵 A 可通过复的相似变换化为若当标准型，但当 A 不能对角化，即 A 有重初等因子的特征值时，系统绝对稳定性的讨论很困难，一般文献较少涉及[1]。这里我们就一类这种情形的系统得到了绝对稳定的充要条件。

定理2.1 设在系统（2.1）中

$$A=\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & & & \\ & -\lambda & & 0 & \\ & & -\lambda & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & -\lambda \end{pmatrix}_{n\times n}, \quad \lambda>0$$

则系统（2.1）绝对稳定的充要条件为 $c^Tb\leqslant 0$，$c^TA^{-1}b\geqslant 0$。

证 必要性 通过对方程（2.1）线性化的方法，易证[7] $c^Tb\leqslant 0$，$c^TA^{-1}b\geqslant 0$ 是系统绝对稳定的必要条件。

充分性 引理 2.1 的条件（2.2）式可写为

$$\operatorname{Re}\{(1+i\omega q)c^TA_{i\omega}^{-1}b\}\leqslant 0 \qquad \text{对 } \omega\geqslant 0 \tag{2.3}$$

其中 $A_{i\omega}=(i\omega I-A)$，在这里

$$A_{i\omega}=\begin{pmatrix} i\omega+\lambda & -1 & & & \\ & i\omega+\lambda & & 0 & \\ & & i\omega+\lambda & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & i\omega+\lambda \end{pmatrix}$$

$$A_{i\omega}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{i\omega+\lambda} & \frac{1}{(i\omega+\lambda)^2} & & & \\ & \frac{1}{i\omega+\lambda} & & 0 & \\ & & \frac{1}{i\omega+\lambda} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{i\omega+\lambda} \end{pmatrix}$$

那么

$$c^TA_{i\omega}^{-1}b=(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n)\begin{pmatrix} \frac{1}{i\omega+\lambda} & \frac{1}{(i\omega+\lambda)^2} & & & 0 \\ & \frac{1}{i\omega+\lambda} & & & \\ & & \frac{1}{i\omega+\lambda} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \frac{1}{i\omega+\lambda} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$=\frac{b_1c_1}{i\omega+\lambda}+\frac{c_1b_2}{(i\omega+\lambda)^2}+\frac{c_2b_2}{i\omega+\lambda}+\cdots+\frac{c_nb_n}{i\omega+\lambda}$$

$$=\frac{c^Tb}{i\omega+\lambda}+\frac{c_1b_2}{(i\omega+\lambda)^2}$$

$$=\frac{c^Tb(\lambda-i\omega)}{\lambda^2+\omega^2}+\frac{c_1b_2(\lambda^2-\omega^2)-c_1b_2\cdot 2\omega i\lambda}{(\lambda^2-\omega^2)^2+4\omega^2\lambda^2}$$

从而 $\quad \mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c^TA_{i\omega}^{-1}b\}$

$$=\frac{(c^Tb)\lambda}{\lambda^2+\omega^2}+\frac{c_1b_2(\lambda^2-\omega^2)}{(\lambda^2-\omega^2)^2+4\omega^2\lambda^2}+\frac{q\omega^2(c^Tb)}{\lambda^2+\omega^2}+\frac{2q\omega^2c_1b_2\lambda}{(\lambda^2-\omega^2)^2+4\omega^2\lambda^2}$$

$$\triangleq\frac{F(\omega^2)}{(\lambda^2+\omega^2)[(\lambda^2-\omega^2)^2+4\omega^2\lambda^2]}$$

其中

$$\begin{aligned} F(\omega^2)=&[(\lambda^2-\omega^2)^2+4\omega^2\lambda^2][(c^Tb)\lambda+q\omega^2(c^Tb)] \\ &+[\lambda^2+\omega^2][c_1b_2(\lambda^2-\omega^2)+2q\omega^2c_1b_2\lambda] \\ =&(c^Tb)[\lambda^4+2\omega^2\lambda^2+\omega^4][\lambda+q\omega^2] \\ &+c_1b_2(\lambda^4-\omega^4)+2q\lambda^3\omega^2c_1b_2+2q\omega^4c_1b_2\lambda \\ =&q(c^Tb)\omega^6+[(c^Tb)\lambda+2(c^Tb)\lambda^2q-c_1b_2 \\ &+2qc_1b_2\lambda]\omega^4+[(c^Tb)\lambda^4q+2(c^Tb)\lambda^3 \\ &+2q\lambda^3c_1b_2]\omega^2+[(c^Tb)\lambda^5+c_1b_2\lambda^4] \end{aligned}$$

由条件

$$c^Tb\leqslant 0,\ -c^TA^{-1}b=[(c^Tb)\lambda+c_1b_2]/\lambda^2\leqslant 0$$

可知 $F(\omega^2)$ 中首项系数和常数项非正，下面讨论 ω^4 和 ω^2 项。

1° 当 $c_1b_2\leqslant 0$ 时

显然对任意 $q\geqslant 0$，$(c^Tb)\lambda^4q+2(c^Tb)\lambda^3+2q\lambda^3c_1b_2\leqslant 0$

取 $q>1/2\lambda$，则

$$(c^Tb)\lambda+2(c^Tb)\lambda^2q-c_1b_2+2qc_1b_2\lambda=(c^Tb)\lambda+2(c^Tb)\lambda^2q+c_1b_2(2q\lambda-1)\leqslant 0$$

即 ω^4 和 ω^2 项的系数均为非正。

2° 当 $c_1b_2>0$ 时，取 $q=0$

ω^4 的系数为 $\quad (c^Tb)\lambda-c_1b_2\leqslant 0$

ω^2 的系数为 $\quad 2(c^Tb)\lambda^3\leqslant 0$

于是无论怎样，总可选取 $q\geqslant 0$ 使 $F(\omega^2)\leqslant 0$，即（2.3）式成立，由引理2.1，系统（2.1）绝对稳定。

推论2.1 在系统（2.1）中，如果存在一个实的相似变换能把矩阵 A 化为定理2.1中的矩阵形式，则系统（2.1）绝对稳定的充要条件为 $c^Tb\leqslant 0$，$c^TA^{-1}b\geqslant 0$。

证 必要性显然，下证充分性

由假设，存在一个实方阵 M 使得 $\bar{A}=M^{-1}AM$ 为定理2.1中的矩阵 A 的形式，所以我们对系统（2.1）作非奇异变换 $x=My$，从而

$$\dot{y}=\bar{A}y+M^{-1}bf(c^TMy) \tag{2.4}$$

令 $\bar{b}=M^{-1}b$，$\bar{c}=M^Tc$，上式可写为

$$\dot{y}=\bar{A}y+\bar{b}f(\bar{c}^Ty) \tag{2.5}$$

由定理2.1，系统（2.5）从而系统（2.1）绝对稳定的充要条件为 $\bar{c}^T\bar{b}\leqslant 0$，$\bar{c}^T\bar{A}^{-1}\bar{b}\geqslant 0$，而 $\bar{c}^T\bar{b}=c^TMM^{-1}b=c^Tb$，$\bar{c}^T\bar{A}^{-1}\bar{b}=c^TMM^{-1}A^{-1}MM^{-1}b=c^TA^{-1}b$，故系统（2.1）绝对稳定的充要条件为 $c^Tb\leqslant 0$，$c^TA^{-1}b\geqslant 0$。

引理2.2 若 λ_1，λ_2 为正数，a_1，a_2 为实数，且 $a_1+a_2\leqslant 0$，则存在一个 $q\geqslant 0$ 使得

$$(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2)+q(a_1\lambda_2^2+a_2\lambda_1^2)\leqslant 0 \tag{2.6}$$

证 当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时，结论显然成立，不妨设 $\lambda_1>\lambda_2$。由 $a_1+a_2\leqslant 0$，分三种情形：

1° 若 $a_1\leqslant 0$，$a_2\leqslant 0$，显然有 $a_1\lambda_1+a_2\lambda_2\leqslant 0$，取 $q=0$ 就可使（2.6）式成立。

2° 若 $a_1\leqslant 0$，$a_2\geqslant 0$，由 $a_1\leqslant -a_2$，那么 $a_1\lambda_1\leqslant -a_2\lambda_1\leqslant -a_2\lambda_2$，即 $a_1\lambda_1+a_2\lambda_2\leqslant 0$，(2.6) 式在 $q=0$ 时成立。

3° 若 $a_1>0$，$a_2<0$，由 $a_1\leqslant -a_2$，$a_1\lambda_2^2\leqslant -a_2\lambda_2^2<-a_2\lambda_1^2$，即 $a_1\lambda_2^2+a_2\lambda_1^2<0$，那么我们总可取 q 为充分大的正数，使（2.6）式成立。

引理得证。

如果系统（2.1）中的矩阵 A 是对称的，只有两个实特征值且只有简单的初等因子，标准型为

$$A=\begin{pmatrix} -\lambda & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & -\lambda & & & \\ & & & -\rho & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -\rho \end{pmatrix} \qquad (\lambda>0,\ \rho>0)$$

我们可以给出一个充要条件：

定理2.2 设系统（2.1）中

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

其中 $A_1=-\lambda I_1$，$A_2=-\rho I_2$，$\lambda>0$，$\rho>0$，I_1，I_2 为单位矩阵，则系统（2.1）绝对稳定的充要条件是 $c^Tb\leqslant 0$，$c^TA^{-1}b\geqslant 0$。

证 必要性显然

充分性：由

$$A=\begin{pmatrix} -\lambda I_1 & 0 \\ 0 & -\rho I_2 \end{pmatrix}, \qquad A_{i\omega}=\begin{pmatrix} (i\omega+\lambda)I_1 & 0 \\ 0 & (i\omega+\rho)I_2 \end{pmatrix}$$

$$A_{i\omega}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{i\omega+\lambda}I_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{i\omega+\rho}I_2 \end{pmatrix}$$

令 $c_1=\begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}c,\quad c_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}c,\quad b_1=\begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}b,\quad b_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}b$

则

$$c^TA_{i\omega}^{-1}b=\frac{c_1^Tb_1}{i\omega+\lambda}+\frac{c_2^Tb_2}{i\omega+\rho}=\frac{c_1^Tb_1\lambda-ic_1^Tb_1\omega}{\omega^2+\lambda^2}+\frac{c_2^Tb_2\rho-ic_2^Tb_2\omega}{\omega^2+\rho^2}$$

从而

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c^TA_{i\omega}^{-1}b\}&=\frac{c_1^Tb_1\lambda+q\omega^2c_1^Tb_1}{\omega^2+\lambda^2}+\frac{c_2^Tb_2\rho+q\omega^2c_2^Tb_2}{\omega^2+\rho^2}\\&=\frac{F(\omega^2)}{(\omega^2+\lambda^2)(\omega^2+\rho^2)}\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}F(\omega^2)=&q(c_1^Tb_1+c_2^Tb_2)\omega^4+[(c_1^Tb_1\lambda+c_2^Tb_2\rho)\\&+q(c_1^Tb_1\rho^2+c_2^Tb_2\lambda^2)]\omega^2+\left(\frac{c_1^Tb_1}{\lambda}+\frac{c_2^Tb_2}{\rho}\right)\lambda^2\rho^2\end{aligned}$$

由定理条件

$$c^Tb=c_1^Tb_1+c_2^Tb_2\leqslant 0,\qquad -c^TA^{-1}b=\frac{c_1^Tb_1}{\lambda}+\frac{c_2^Tb_2}{\rho}\leqslant 0$$

又由引理2.2，存在 $q\geqslant 0$ 使得

$$(c_1^Tb_1\lambda+c_2^Tb_2\rho)+q(c_1^Tb_1\rho^2+c_2^Tb_2\lambda^2)\leqslant 0$$

即存在 $q\geqslant 0$ 使得 $F(\omega^2)\leqslant 0$，满足引理2.1的条件，故系统（2.1）是绝对稳定的。

利用 c^Tb 和 $c^TA^{-1}b$ 在相似变换下的不变性，得到

推论2.2 如果系统（2.1）中的矩阵 $A=A^T$，至多只有两个相异的实特征值且只有简单的初等因子，则系统（2.1）绝对稳定的充要条件为 $c^Tb\leqslant 0$，$c^TA^{-1}b\geqslant 0$。

在定理 2.2 中令 $\lambda=\rho$，我们又有

推论2.3 如果系统（2.1）中的矩阵 $A=A^T$，A 有相同的实特征值且只有简单的初等因子，则系统（2.1）绝对稳定的充要条件为 $c^Tb\leqslant 0$。

推论 2.3 就是文[7]中的一个结果。

定理2.3 在系统（2.1）中，设向量 b 是矩阵 A 的特征向量，或向量 c 是 A^T 的特征向量，则系统（2.1）绝对稳定的充分必要条件为 $c^Tb\leqslant 0$。

证 必要性显然，下证充分性。

先假设 $Ab=-\lambda b(\lambda>0)$，那么

$$(i\omega I-A)b=[\lambda+i\omega]b\qquad \omega\in R^1$$

$$(i\omega I-A)^{-1}b=\frac{1}{\lambda+i\omega}b$$

从而 $c^T(i\omega I-A)^{-1}b=c^Tb/(\lambda+i\omega)$，由条件 $c^Tb\leqslant 0$，有

$$\mathrm{Re}\{c^T(i\omega I-A)^{-1}b\}=\frac{\lambda c^Tb}{\lambda^2+\omega^2}\leqslant 0$$

故系统（2.1）绝对稳定。

若 $A^Tc=-\lambda c$，$(\lambda>0)$，那么

$$(i\omega I-A^T)^{-1}c=\frac{1}{i\omega+\lambda}c$$

于是　　　　$c^T(i\omega I-A)^{-1}b=c^Tb/(i\omega+\lambda)$

同样有 $\mathrm{Re}\{c^T(i\omega I-A)^{-1}b\}\leqslant 0$，系统（2.1）也是绝对稳定的。

文[6]证明了在条件 $Abc^T=bc^TA$ 下，系统（2.1）绝对稳定的充要条件为 $c^Tb\leqslant 0$，但 $Abc^T=bc^TA\Longleftrightarrow Ab=-\lambda b$，且 $A^Tc=-\lambda c$，$(\lambda>0)$。定理2.3显然改进了文[6]的这一结果。

引理2.3　如果系统（2.1）中的矩阵 A 为准对角型，即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & 0\\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_m\end{pmatrix}\qquad A_r(r=1,\ \cdots,\ m)\text{ 为小方阵}$$

则系统（2.1）绝对稳定的充分条件为

$$\mathrm{Re}\{c_r^T(i\omega I_r-A_r)^{-1}b_r\}\leqslant 0\qquad(\omega\geqslant 0;\ r=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

$(c_r,\ b_r$ 为 A_r 对应的列向量，I_r 为 A_r 对应的单位矩阵)。

证　易证　　$c^TA_{i\omega}^{-1}b=\sum\limits_{r=1}^{m}c_r^T(i\omega I_r-A_r)^{-1}b_r$

由条件知

$$\mathrm{Re}\,(c^TA_{i\omega}^{-1}b)=\sum_{r=1}^{m}\mathrm{Re}\{c_r^T(i\omega I_r-A_r)^{-1}b_r\}\leqslant 0$$

根据引理2.1，系统（2.1）绝对稳定。

利用引理2.3，我们可以推广改进很多结果。

定理2.4　在系统（2.1）中，设

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & 0\\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_m\end{pmatrix}$$

如果对任意的 $r=1,\ 2,\ \cdots,\ m$，b_r 为 A_r 的特征向量或者 c_r 为 A_r^T 的特征向量，则 $c_r^Tb_r\leqslant 0$，$(r=1,\ \cdots,\ m)$ 为系统（2.1）绝对稳定的充分条件。

证　由引理2.3我们只须证 $\mathrm{Re}\{c_r^T(i\omega I_r-A_r)^{-1}b_r\}\leqslant 0$。而这一不等式可完全类似于定理2.3证得。这里从略。

为了说明定理 2.4 的作用，我们看一个例子．当（2.1）中

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_m \end{pmatrix}$$

其中 $A_r=-\lambda_r I_r(\lambda_r>0;\ r=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，$\lambda_r$ 为互异的正数，这是最普遍常见的系统之一。当 $m=1$，2 时，绝对稳定的充要条件为 $c^Tb\leqslant 0$，$c^TA^{-1}b\geqslant 0$。当 $m\geqslant 3$ 时，一般没有得到充要条件。文[7]得到的充分条件为 $c_ib_i<0$（$i=1,\ \cdots,\ n$），用引理 2.1 显然可将充分条件改进为 $c_ib_i\leqslant 0$（$i=1,\ \cdots,\ n$）。但如果用定理2.4，得到绝对稳定的充分条件为 $c_r^Tb_r\leqslant 0$（$r=1,\ \cdots,\ m$）。如果 $m<n$，后一条件显然比前两个条件要弱。

三、控制系统第一标准型的绝对稳定性准则

对系统（2.1）的特殊类型讨论最多的是控制系统的第一标准型[1],[5]：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_j}{dt}=-\lambda_j x_j+f(\sigma) \qquad \lambda_j>0 \\ &\sigma=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (j=1,\ \cdots,\ n) \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

引理3.1[4] 对直接控制系统

$$\dot{x}=Ax+bf(c^Tx),\ \ \mathrm{Re}\lambda(A)<0 \tag{2.1}$$

如果存在一个 $q\geqslant 0$ 使得

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c^TA_{i\omega}^{-1}b\}-1/K<0 \qquad 对\ \omega\geqslant 0 \tag{3.2}$$

则系统（2.1）在 Hurwitz 角域$[0,\ K]$内绝对稳定．

对系统（3.1）在角域（0，$+\infty$）和角域$[0,\ K]$内的绝对稳定性，文[5]、[3]、[7]等有一些讨论，但这些结果的条件仍然较强，下面我们给出两个较为精细的绝对稳定性准则。

对实数 $q\geqslant 0$，记

$$a_j=\begin{cases} c_j q, & 若\ c_j(q\lambda_j-1)>0 \\ c_j/\lambda_j, & 若\ c_j(q\lambda_j-1)<0 \\ c_j/\lambda_j, & 若\ c_j(q\lambda_j-1)=0,\ c_j\neq 0 \\ 0, & 若\ c_j(q\lambda_j-1)=0,\ c_j=0 \end{cases}$$

定理3.1 如果存在 $q\geqslant 0$，使得

$$\sum_{j=1}^{n} a_j<\frac{1}{K}$$

则系统（3.1）在角域$[0,\ K]$内绝对稳定．

证 由

$$A=\begin{pmatrix} -\lambda_1 & & & 0 \\ & -\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -\lambda_n \end{pmatrix}, \qquad A_{i\omega}^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{i\omega+\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \dfrac{1}{i\omega+\lambda_n} \end{pmatrix}$$

有
$$c^T A_{i\omega}^{-1} b=\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{i\omega+\lambda_j}$$

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c^T A_{i\omega}^{-1} b\}=\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j(\lambda_j+q\omega^2)}{\omega^2+\lambda_j^2}$$

我们记 $f_j(\omega)=c_j(\lambda_j+q\omega^2)/(\omega^2+\lambda_j^2)$，对 $f_j(\omega)$ 求导数：

$$f_j'(\omega)=\left[\frac{c_j(\lambda_j+q\omega^2)}{\omega^2+\lambda_j^2}\right]'=\frac{2c_jq\omega(\omega^2+\lambda_j^2)-(c_j\lambda_j+c_jq\omega^2)\cdot 2\omega}{(\omega^2+\lambda_j^2)^2}$$

$$=\frac{2c_j\lambda_j(q\lambda_j-1)\omega}{(\omega^2+\lambda_j^2)^2}$$

$f_j'(\omega)=0$ 仅当 $\omega=0$，即 $f_j(\omega)$ 只在 $\omega=0$ 处取极值。若 $c_j(q\lambda_j-1)>0$，则函数 $f_j(\omega)$ 在 $[0, \infty)$ 上是单调递增的，从而 $f_j(\omega)\leqslant f_j(\infty)=c_jq$。若 $c_j(q\lambda_j-1)<0$，则函数 $f_j(\omega)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是单调递减的，从而 $f_j(\omega)\leqslant f_j(0)=c_j/\lambda_j$。若 $c_j(q\lambda_j-1)=0$，$c_j\neq 0$，则 $f_j'(\omega)=0$，$q=1/\lambda_j$，代入 $f_j(\omega)$，有 $f_j(\omega)=c_j(\lambda_j+\omega^2/\lambda_j)/(\omega^2+\lambda_j^2)=c_j/\lambda_j$。若 $c_j(q\lambda_j-1)=0$，$c_j=0$，显然，$f_j(\omega)=0$，故而由 a_j 的取法，总有

$$f_j(\omega)\leqslant a_j$$

由定理假设

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c^T A_{i\omega}^{-1} b\}=\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j(\lambda_j+q\omega^2)}{\omega^2+\lambda_j^2}=\sum_{j=1}^{n} f_j(\omega)\leqslant\sum_{j=1}^{n} a_j<\frac{1}{K}$$

由引理3.1知系统在角域 $[0, K]$ 内绝对稳定。

由于定理3.1中的 q 可由我们在 $[0, +\infty)$ 的区间内适当选取，故而定理 3.1 给出了一个非常广泛的充分条件。

我们总可适当调整方程（3.1）和未知函数 x_j 的编号顺序，使之有

$$c_j:\begin{cases} <0, & j=1, \cdots, j_1 \\ =0, & j=j_1+1, \cdots, j_2 \\ >0, & j=j_2+1, \cdots, n \end{cases} \tag{3.3}$$

推论3.1 若 $\sum\limits_{j=j_2+1}^{n} c_j/\lambda_j<1/K$，则系统（3.1）的平凡解在 Hurwitz 角域 $[0, K]$ 内绝对稳定。

证 在定理 3.1 中取 $q=0$ 立得。

推论3.2 若 $\lambda_j>2K(n-j_2)c_j$ $(j=j_2+1, \cdots, n)$，则系统（3.1）在角域 $[0, K]$ 内绝对稳定。

证 由 $\lambda_j>2K(n-j_2)c_j$ $(j=j_2+1,\ \cdots,\ n)$

$$\sum_{j=j_2+1}^{n}\frac{c_j}{\lambda_j}<\sum_{j=j_2+1}^{n}\frac{1}{2K(n-j_2)}=\frac{1}{2K}<\frac{1}{K}$$

满足推论 3.1 的条件，推论 3.2 得证。

推论 3.2 就是文[3]中的定理 3.1。

推论3.3 若 $c_j\geqslant 0$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，则系统 (3.1) 在角域 $[0,\ K]$ 内绝对稳定的充要条件是

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{\lambda_j}<\frac{1}{K}$$

证 充分性由推论 3.1 立得。

必要性 易证[7]系统 (2.1) 在 $[0,\ K]$ 内绝对稳定的必要条件为 $c^TA^{-1}b>-1/K$。在系统 (3.1) 中，

$$c^TA^{-1}b=\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{-\lambda_j}$$

于是 $c^TA^{-1}b>-1/K$ 变为

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{\lambda_j}<\frac{1}{K}$$

必要性得证。

如果考虑角域 $[0,\ +\infty)$，我们同样得到：

定理3.2 如果存在 $q\geqslant 0$，使得 $\sum_{j=1}^{n}a_j\leqslant 0$，则系统 (3.1) 在角域 $[0,\ +\infty)$ 内绝对稳定。

证 完全同定理 3.1 的证明可证得

$$f_j(\omega)\leqslant a_j$$

由

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c^TA_{i\omega}^{-1}b\}=\sum_{j=1}^{n}f_j(\omega)\leqslant\sum_{j=1}^{n}a_j\leqslant 0$$

根据引理 2.1 可得定理 3.2 结论。

定理 3.2 又可以包含赵素霞文[5]中关于系统 (3.1) 在 $[0,\ +\infty)$ 内绝对稳定的两个充分准则。

我们按照文[5]对 c_j，λ_j 的编序：

$$\begin{array}{ll} c_1>0,\ \cdots,\ c_{j_1}>0, & \lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{j_1} \\ c_{j_1+1}=0,\ \cdots,\ c_{j_2}=0, & \lambda_{j_1+1}<\cdots<\lambda_{j_2} \\ c_{j_2+1}<0,\ \cdots,\ c_n<0, & \lambda_{j_2+1}<\cdots<\lambda_n \end{array}$$

在定理 3.2 中取 $q=1/\lambda_1$，分三种情形：

(i) 若 $\lambda_1<\lambda_{j_2+1}$，则

当 $1<j\leqslant j_1$ 时，$q\lambda_j-1>0$，$a_j=c_j/\lambda_1$

当 $j_2+1\leqslant j\leqslant n$ 时，$q\lambda_j-1>0$，$a_j=c_j/\lambda_j$

当 $j=1$ 时，$q\lambda_j-1=0$，$a_1=c_1/\lambda_1$

当 $j_1+1\leqslant j\leqslant j_2$ 时，$c_j=0$，$a_j=0$

从而系统(3.1)在$[0, +\infty)$内绝对稳定的充分条件为

$$\sum_{j=1}^{j_1}\frac{c_j}{\lambda_1}+\sum_{j=j_2+1}^{n}\frac{c_j}{\lambda_j}\leqslant 0$$

(ii) 若 $\lambda_{j_2+s}<\lambda_1<\lambda_{j_2+s+1}$，则

当 $1<j\leqslant j_1$ 时，$q\lambda_j-1>0$，$a_j=c_j/\lambda_1$

当 $j_2+1\leqslant j\leqslant j_2+s$ 时，$q\lambda_j-1<0$，$a_j=c_j/\lambda_1$

当 $j_2+s+1\leqslant j\leqslant n$ 时，$q\lambda_j-1>0$，$a_j=c_j/\lambda_j$

当 $j=1$ 时，$q\lambda_j-1=0$，$a_1=c_1/\lambda_1$

系统(3.1)绝对稳定的充分条件为

$$\sum_{j=1}^{j_1}\frac{c_j}{\lambda_1}+\sum_{j=j_2+1}^{j_2+s}\frac{c_j}{\lambda_1}+\sum_{j=j_2+s+1}^{n}\frac{c_j}{\lambda_j}\leqslant 0$$

(iii) 若 $\lambda_n<\lambda_1$，则

当 $1<j\leqslant j_1$ 时，$q\lambda_j-1>0$，$a_j=c_j/\lambda_1$

当 $j_2+1\leqslant j\leqslant n$ 时，$q\lambda_j-1<0$，$a_j=c_j/\lambda_1$

当 $j=1$ 时，$q\lambda_j-1=0$，$a_1=c_1/\lambda_1$

故系统(3.1)绝对稳定的充分条件为 $\sum\limits_{j=1}^{n}c_j/\lambda_1\leqslant 0$。

这三种情形综合起来就是文[5]中的准则B，并且我们这里得到的充分条件还略弱一些。如果在定理3.2中取$q=1/\lambda_n$，同样也分三种情形可以得到文[5]中的准则C，这里从略。下面我们用定理3.2来解决一个四维的第一标准型的绝对稳定性。

在系统(3.1)中，设 $n=4$,

$$c_1>0,\ c_2>0,\ \lambda_1<\lambda_2$$
$$c_3<0,\ c_4<0,\ \lambda_3<\lambda_4$$

且 $\lambda_1<\lambda_3<\lambda_4<\lambda_2$，若取 $q=1/\lambda_1$（相当于文[5]中的准则B)，则得系统绝对稳定的充分条件为

$$\text{(a)}\quad \frac{c_1}{\lambda_1}+\frac{c_2}{\lambda_1}+\frac{c_3}{\lambda_3}+\frac{c_4}{\lambda_4}\leqslant 0$$

若取 $q=1/\lambda_4$（相当于文[5]中的准则C)，则得系统绝对稳定的充分条件为

$$\text{(b)}\quad \frac{c_1}{\lambda_1}+\frac{c_2}{\lambda_4}+\frac{c_3}{\lambda_4}+\frac{c_4}{\lambda_4}\leqslant 0$$

现在我们取 $q=1/\lambda_3$，由于

$$c_1(q\lambda_1-1)<0,\ a_1=c_1/\lambda_1;\ c_2(q\lambda_2-1)>0,\ a_2=c_2/\lambda_3$$
$$c_3(q\lambda_3-1)=0,\ a_3=c_3/\lambda_3;\ c_4(q\lambda_4-1)<0,\ a_4=c_4/\lambda_4$$

根据定理3.2得绝对稳定的充分条件为

(c) $\frac{c_1}{\lambda_1}+\frac{c_2}{\lambda_3}+\frac{c_3}{\lambda_3}+\frac{c_4}{\lambda_4}\leqslant 0$

条件(c)显然比条件(a)要弱，并且在 $c_2+c_3<0$ 时条件(c)也比条件(b)要弱。由此可见定理3.2确定比文[5]中的准则B和准则C要精细。

最后我们讨论在系统(3.1)中 $\lambda_j>0$ $(j=1, \cdots, n-1)$，$\lambda_n=0$ 的临界情形（即第一临界情形）。

引理3.2[2],[4] 对直接控制系统

$$\dot{x}=Ax+bf(c^Tx), \qquad \mathrm{Re}\lambda(A)\leqslant 0 \tag{3.4}$$

其中 A 有一个简单的零特征值，其余特征值均具有负实部，如果系统(3.4)是极限稳定的，且存在 $q\geqslant 0$ 使得

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c^TA_{i\omega}^{-1}b\}-1/K<0, \quad \omega\geqslant 0$$

则系统(3.4)在角域$(0, K]$内绝对稳定。

引理3.3 系统[3]

$$dx_j/dt=-\lambda_jx_j+f(\sigma) \qquad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{3.5}$$

$$\sigma=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

其中 $\lambda_j>0$ $(j=1, \cdots, n-1)$，$\lambda_n=0$，在 $c_n<0$ 的条件下是极限稳定的。

证 令 $f(\sigma)=\varepsilon\sigma$ $(0<\varepsilon\ll 1)$，欲证特征多项式

$$G(\lambda)\triangleq\begin{vmatrix}\lambda+\lambda_1-\varepsilon c_1 & -\varepsilon c_2 & \cdots & -\varepsilon c_n\\ -\varepsilon c_1 & \lambda+\lambda_2-\varepsilon c_2 & \cdots & -\varepsilon c_n\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ -\varepsilon c_1 & -\varepsilon c_2 & \cdots & \lambda-\varepsilon c_n\end{vmatrix}$$

只有负实部根。当 ε 充分小时，由多项式根对系数的连续性，特征方程 $G(\lambda)=0$ 至少有 $n-1$ 个负实部根。欲使 $G(\lambda)=0$ 有 n 个负实部的根，只须 $G(0)$ 的符号为正。而

$$G(0)=\begin{vmatrix}\lambda_1-\varepsilon c_1 & -\varepsilon c_2 & \cdots & -\varepsilon c_n\\ -\varepsilon c_1 & \lambda_2-\varepsilon c_2 & \cdots & -\varepsilon c_n\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ -\varepsilon c_1 & -\varepsilon c_2 & \cdots & -\varepsilon c_n\end{vmatrix}=-\varepsilon\cdot c_n\cdot(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1})+o(\varepsilon)$$

$o(\varepsilon)$ 为 ε 的高阶无穷小，由 $c_n<0$，可知当 ε 充分小时 $G(0)>0$。

故系统(3.5)极限稳定。

我们用类似于(3.3)的编号：

$$c_j:\begin{cases}<0, & j=1, \cdots, j_1\\ =0, & j=j_1+1, \cdots, j_2\\ >0, & j=j_2+1, \cdots, n-1\end{cases}$$

定理3.3 在系统(3.5)中，若 $c_n<0$，且 $\sum\limits_{j=j_2+1}^{n-1}c_j/\lambda_j<1/K$，则系统(3.5)在角域$[0, K]$内绝对稳定。

证 由

$$A=\begin{pmatrix} -\lambda_1 & & & & \\ & -\lambda_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & & -\lambda_{n-1} & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix},\quad A_{i\omega}^{-1}=\begin{pmatrix} 1/(i\omega+\lambda_1) & & & & \\ & 1/(i\omega+\lambda_2) & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1/(i\omega+\lambda_{n-1}) & \\ & 0 & & & 1/i\omega \end{pmatrix}$$

从而

$$c^T A_{i\omega}^{-1} b=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{c_j}{i\omega+\lambda_j}+\frac{c_n}{i\omega}$$

$$\mathrm{Re}\,c^T A_{i\omega}^{-1} b=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{c_j\lambda_j}{\omega^2+\lambda_j^2}=\sum_{j=1}^{j_1}\frac{c_j\lambda_j}{\omega^2+\lambda_j^2}+\sum_{j=j_2+1}^{n-1}\frac{c_j\lambda_j}{\omega^2+\lambda_j^2}$$

$$\leqslant\sum_{j=j_2+1}^{n-1}\frac{c_j\lambda_j}{\omega^2+\lambda_j^2}\leqslant\sum_{j=j_2+1}^{n-1}\frac{c_j}{\lambda_j}<\frac{1}{K},\qquad \omega\geqslant 0$$

故由引理3.2和引理3.3，系统(3.5)是绝对稳定的。

定理 3.3 显然是包含文[3]的定理 3.2 的。

本文是在导师廖晓昕教授和邓宗琦教授的指导和鼓励下完成的，特此致谢！

参 考 文 献

[1] 列托夫著，李惠译，《非线性调节系统的稳定性》，科学出版社（1959）.

[2] 谢惠民，《绝对稳定性理论与应用》，科学出版社（1986）.

[3] 廖晓昕，关于控制系统的绝对稳定性准则，应用数学和力学，3，2（1982），235—248.

[4] Reissig, R., G. Sansone and R. Conti, *Non-Linear Differential Equations of Higher Order* (1974).

[5] 赵素霞，关于直接调节系统的绝对稳定性，数学学报，22，4（1979）.

[6] 李森林，几类直接控制系统绝对稳定的充分及必要条件，应用数学学报，6，4（1983）.

[7] 王国荣，几类直接控制系统的绝对稳定性，湖南大学学报，8，3（1981）.

The Criterions for Absolute Stability of Direct Control Systems of Lurie Type

Zhang Wei

(*Department of Mathematics, Central China Normal University, Wuhan*)

Abstract

In this paper, we give necessary and sufficient conditions for absolute stability of several classes of direct control systems, and discuss the absolute stability of the first canonical form of control system. The corresponding results in references [3], [5], [6], [7] are improved.