应用数学和力学，第10卷第10期（1989年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

边界伸缩法*

宋　顺　成

（内蒙金属材料研究所，1989年1月20日收到）

摘　要

本文提出边界伸缩原理，并在此基础上提出边界伸缩法．不但较好地解决了边界元方法中求解边界附近区域包括边界上解的问题，而且可以方便地利用迭代过程改善求解精度．计算实例表明，本文提出的方法是十分有效的．

一、引　言

同其它数值方法相比，用边界元方法(BEM)解弹性力学问题有很多优点，特别是区域内部解的精度较高．但是，由于解的奇异性，往往使求解边界附近的区域失败．尽管无限制的增加单元，也很难直接求得边界上的应力解．这在一定程度上阻碍了边界元的推广应用．

本文提出边界伸缩原理，并在此基础上提出边界伸缩法(BECM)(Boundary Expanding-Contracting Method)，不但较好的解决了求解边界附近区域包括边界上的解，而且可以方便地利用迭代过程改善求解精度．

二、边界伸缩原理

1．边界伸缩定义

设弹性体区域Ω_1，其边界为Γ_1，φ是Γ_1上的一个可逆映照，且

$$\varphi(\Gamma_1)=\Gamma_2 \tag{2.1}$$

当Γ_2所形成的区域$\Omega_2\supset\Omega_1$时，称边界Γ_2是由边界Γ_1伸缩得到的．

2．边界伸缩原理

设弹性体Ω_1，其边界为Γ_1，边界条件为，

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{kj}n_j=\bar{P}_j &&(\text{在}\Gamma_{1\sigma}\text{上})\\&u_j=\bar{u}_j &&(\text{在}\Gamma_{1u}\text{上})\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

弹性体Ω_1经边界Γ_1伸缩后得到弹性体Ω_2及边界Γ_2．如果在Γ_2上求得一组位移$\mathscr{U}_j$和面力$\mathscr{P}_j$使Ω_2内的解满足(2.2)，则Ω_2在Ω_1内的解即与原问题在Ω_1内的解一致．

* 薛大为推荐．

该原理可由弹性解的 Kirchhoff 唯一性定理直接得到。

三、边界伸缩积分方程组

假定弹性体Ω_1，经过边界Γ_1的伸缩得到弹性体Ω_2及边界Γ_2，那么在Γ_2上的位移$\mathscr{U}_j$和面力$\mathscr{P}_j$满足如下积分方程，

$$C_{ij}(\psi)\mathscr{U}_j(\psi)=\int_{\Gamma_2}u^*_{ij}(\psi,\ Q)\mathscr{P}_j(Q)d\Gamma(Q)-\int_{\Gamma_2}P^*_{ij}(\psi,\ Q)\mathscr{U}_j(Q)d\Gamma(Q) \tag{3.1}$$

其中$\Gamma_2=\varphi(\Gamma_1)$，$\psi,Q\in\Gamma_2$，并且

$$C_{ij}(\psi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\bar{\Gamma}_{2\varepsilon}}P^*_{ij}(\psi,\ Q)d\Gamma(Q) \tag{3.2}$$

其中$\bar{\Gamma}_{2\varepsilon}$是$\Omega_{2\varepsilon}$的边界，而$\Omega_{2\varepsilon}$是在$\Omega_2$内的以$\psi$为中心以$\varepsilon$为半径的子域。当$\Gamma_2$为平滑边界时

$$C_{ij}(\psi)=\delta_{ij}/2 \tag{3.3}$$

对于弹性体Ω_1，在边界Γ_1上的位移u_j和面力P_j满足如下积分方程

$$C_{ij}(\phi)u_j(\phi)=\int_{\Gamma_1}u^*_{ij}(\phi,\ S)P_j(S)d\Gamma(S)-\int_{\Gamma_1}P^*_{ij}(\phi,\ S)u_j(S)d\Gamma(S) \tag{3.4}$$

其中$\phi,S\in\Gamma_1$，并且

$$C_{ij}(\phi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\bar{\Gamma}_{1\varepsilon}}P^*_{ij}(\phi,\ S)d\Gamma(S) \tag{3.5}$$

其中$\bar{\Gamma}_{1\varepsilon}$是$\Omega_{1\varepsilon}$的边界，而$\Omega_{1\varepsilon}$是在$\Omega_1$内的以$\phi$为中心以$\varepsilon$为半径的子域。当$\Gamma_1$为平滑边界时

$$C_{ij}(\phi)=\delta_{ij}/2 \tag{3.6}$$

由于弹性体$\Omega_2\supset\Omega_1$，因此Γ_1上的任意一点S可以看作Ω_2的内点，于是有

$$u_j(S)=\int_{\Gamma_2}u^*_{ji}(S,\ Q)\mathscr{P}_i(Q)d\Gamma(Q)-\int_{\Gamma_2}P^*_{ji}(S,\ Q)\mathscr{U}_i(Q)d\Gamma(Q) \tag{3.7}$$

$$\sigma_{kj}(S)=\int_{\Gamma_2}u^{**}_{kji}(S,\ Q)\mathscr{P}_i(Q)d\Gamma(Q)-\int_{\Gamma_2}P^{**}_{kji}(S,\ Q)\mathscr{U}_i(Q)d\Gamma(Q) \tag{3.8}$$

其中$S\in\Gamma_1$，$Q\in\Gamma_2$。

在(3.1)～(3.8)中u^*_{ij}，P^*_{ij}，u^{**}_{kji}，P^{**}_{kji}分别由以下 Kelvin 基本解变换变量确定。

对于三维问题，

$$u^*_{ij}(y,\ z)=\frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr}\{(3-4\nu)\delta_{ij}+r_{,i}r_{,j}\} \tag{3.9}$$

对于二维问题，

$$u^*_{ij}(y,\ z)=\frac{-1}{8\pi(1-\nu)G}\{(3-4\nu)\delta_{ij}\ln(r)-r_{,i}r_{,j}\} \tag{3.10}$$

$$P^*_{ij}(y,z)=\frac{-1}{4\pi\alpha(1-\nu)r^\alpha}\Big\{[(1-2\nu)\delta_{ij}+\beta r_{,i}r_{,j}]\frac{\partial r}{\partial n}-(1-2\nu)(r_{,i}n_j-r_{,j}n_i)\Big\} \tag{3.11}$$

$$u_{k\,j\,i}^{**}(y,z)=\frac{1}{4\pi\alpha(1-\nu)r^{\alpha}}\{(1-2\nu)(r_{,j}\delta_{ki}+r_{,k}\delta_{ji}-r_{,i}\delta_{kj})+\beta r_{,k}r_{,j}r_{,i}\} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}P_{k\,j\,i}^{**}(y,z)=&\frac{G}{2\pi\alpha(1-\nu)r^{\beta}}\Big\{\beta\frac{\partial r}{\partial n}[(1-2\nu)\delta_{kj}r_{,i}\\&+\nu(\delta_{ki}r_{,j}+\delta_{ji}r_{,k})-\gamma r_{,k}r_{,j}r_{,i}]+\beta\nu(n_kr_{,j}r_{,i}+n_jr_{,k}r_{,i})\\&+(1-2\nu)(\beta n_ir_{,k}r_{,j}+n_j\delta_{ki}+n_k\delta_{ji})-(1-4\nu)n_i\delta_{kj}\Big\}\end{aligned} \tag{3.13}$$

其中，ν，G分别为弹性材料的泊松比和剪切模量，n_i是边界外法线方向数。

对于二维问题$\alpha=1$，$\beta=2$，$\gamma=4$。

对于三维问题$\alpha=2$，$\beta=3$，$\gamma=5$。

$$r=(r_ir_i)^{1/2},\ \ r_i=x_i(z)-x_i(y),\ \ r_{,i}=\frac{\partial r}{\partial x_i(z)}=\frac{r_i}{r} \tag{3.14}$$

由(3.8)表示Γ_1上任意一点S的面力

$$\begin{aligned}P_j(S)=&\sigma_{kj}(S)n_k(S)\\=&\int_{\Gamma_2}n_k(S)u_{k\,j\,i}^{**}(S,\ Q)\mathscr{P}_i(Q)d\Gamma(Q)\\&-\int_{\Gamma_2}n_k(S)P_{k\,j\,i}^{**}(S,\ Q)\mathscr{U}_i(Q)d\Gamma(Q)\end{aligned} \tag{3.15}$$

将(3.7)及(3.15)代入(3.4)并注意(2.2)

$$\begin{aligned}C_{lj}(\phi)\bar{u}_j(\phi)=&\int_{\Gamma_{1\sigma}}u_{l\,j}^{*}(\phi,\ S)\bar{P}_j(S)d\Gamma(S)\\&+\int_{\Gamma_{1u}}u_{l\,j}^{*}(\phi,\ S)\int_{\Gamma_2}n_k(S)u_{k\,j\,i}^{**}(S,\ Q)\mathscr{P}_i(Q)d\Gamma(Q)d\Gamma(S)\\&-\int_{\Gamma_{1u}}u_{l\,j}^{*}(\phi,\ S)\int_{\Gamma_2}n_k(S)P_{k\,j\,i}^{**}(S,\ Q)\mathscr{U}_i(Q)d\Gamma(Q)d\Gamma(S)\\&-\int_{\Gamma_u}P_{l\,j}^{*}(\phi,\ S)\bar{u}_j(S)d\Gamma(S)\\&-\int_{\Gamma_{1\sigma}}P_{l\,j}^{*}(\phi,S)\int_{\Gamma_2}u_{j\,i}^{*}(S,\ Q)\mathscr{P}_i(Q)d\Gamma(Q)d\Gamma(S)\\&+\int_{\Gamma_{1\sigma}}P_{l\,j}^{*}(\phi,S)\int_{\Gamma_2}P_{j\,i}^{*}(S,\ Q)\mathscr{U}_i(Q)d\Gamma(Q)d\Gamma(S)\end{aligned} \tag{3.16a}$$

其中$\phi\in\Gamma_{1u}$

$$\begin{aligned}&C_{lj}(\phi)\int_{\Gamma_2}u_{j\,i}^{*}(\phi,\ Q)\mathscr{P}_i(Q)d\Gamma(Q)-C_{lj}(\phi)\int_{\Gamma_2}P_{j\,i}^{*}(\phi,\ Q)\mathscr{U}_i(Q)d\Gamma(Q)\\&=\int_{\Gamma_{1\sigma}}u_{l\,j}^{*}(\phi,\ S)\bar{P}_j(S)d\Gamma(S)\\&\quad+\int_{\Gamma_{1u}}u_{l\,j}^{*}(\phi,\ S)\int_{\Gamma_2}n_k(S)u_{k\,j\,i}^{**}(S,\ Q)\mathscr{P}_i(Q)d\Gamma(Q)d\Gamma(S)\\&\quad-\int_{\Gamma_{1u}}u_{l\,j}^{*}(\phi,\ S)\int_{\Gamma_2}n_k(S)P_{k\,j\,i}^{**}(S,\ Q)\mathscr{U}_i(Q)d\Gamma(Q)d\Gamma(S)\end{aligned}$$

$$-\int_{\Gamma_{1}} P^*_{ij}(\phi,\ S)\bar{u}_j(S)d\Gamma(S)$$

$$-\int_{\Gamma_{1\sigma}} P^*_{ij}(\phi,S)\int_{\Gamma_2} u^*_{ji}(S,Q)\mathscr{P}_i(Q)d\Gamma(Q)d\Gamma(S)$$

$$+\int_{\Gamma_{1\sigma}} P^*_{ij}(\phi,\ S)\int_{\Gamma_2} P^*_{ji}(S,\ Q)\mathscr{U}_i(Q)d\Gamma(S) \tag{3.16b}$$

其中$\phi\in\Gamma_{1\sigma}$。

(3.16)及(3.1)是在Γ_1，Γ_2上满足(2.2)的边界积分方程组，未知函数为$\mathscr{P}_j$和$\mathscr{U}_j$。如果适当选择映照φ使Γ_1远离Γ_2，那么$\mathscr{P}_j$和$\mathscr{U}_j$确定后可根据边界伸缩原理由 Somigliana 等式求得Ω_1内及边界Γ_1上任意一点t的位移和应力。

$$u_i(t)=\int_{\Gamma_2} u^*_{ij}(t,\ Q)\mathscr{P}_j(Q)d\Gamma(Q)-\int_{\Gamma_2} P^*_{ij}(t,\ Q)\mathscr{U}_j(Q)d\Gamma(Q) \tag{3.17}$$

$$\sigma_{ij}(t)=\int_{\Gamma_2} u^{**}_{ijk}(t,\ Q)\mathscr{P}_k(Q)d\Gamma(Q)-\int_{\Gamma_2} P^{**}_{ijk}(t,\ Q)\mathscr{U}_k(Q)d\Gamma(Q) \tag{3.18}$$

其中$t\in\Omega_1$，$Q\in\Gamma_2$。

四、边 界 伸 缩 法

由(3.1)及(3.16)组成的积分方程组是非线性积分方程组，一般不能求出$\mathscr{P}_j$和$\mathscr{U}_j$的分析解。为了求得$\mathscr{P}_j$和$\mathscr{U}_j$的数值解，将Γ_1离散为M个单元，N个结点ϕ_1，ϕ_2，…，ϕ_N，利用(2.1)式映射为Γ_2上的M个单元N个结点ψ_1，ψ_2，…，ψ_N。然后对每个单元的坐标、位移、面力进行插值。

对于Γ_1上的第m单元Γ_{1m}，

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{x}=\mathbf{N}\mathbf{x}^{\Gamma_{1m}}\\&\mathbf{P}=\mathbf{N}\bar{\mathbf{P}}^{\Gamma_{1m}} \qquad (\text{若}\Gamma_{1m}\in\Gamma_{1\sigma})\\&\mathbf{u}=\mathbf{N}\bar{\mathbf{u}}^{\Gamma_{1m}} \qquad (\text{若}\Gamma_{1m}\in\Gamma_{1u})\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

其中$\mathbf{x}^{\Gamma_{1m}}$是由Γ_1上第m单元结点坐标组成的坐标矢量。$\bar{\mathbf{P}}^{\Gamma_{1m}}$，$\bar{\mathbf{u}}^{\Gamma_{1m}}$分别是由$\Gamma_1$上第$m$单元结点面力和结点位移组成的面力矢量和位移矢量。$\mathbf{N}$是由自然坐标表示的形状函数矩阵。

同样对于Γ_2上的第m单元Γ_{2m}，

$$\mathbf{x}=\mathbf{N}\mathbf{x}^{\Gamma_{2m}},\quad \boldsymbol{\mathscr{P}}=\mathbf{N}\boldsymbol{\mathscr{P}}^{\Gamma_{2m}},\quad \boldsymbol{\mathscr{U}}=\mathbf{N}\boldsymbol{\mathscr{U}}^{\Gamma_{2m}} \tag{4.2}$$

其中$\mathbf{x}^{\Gamma_{2m}}$表示由Γ_2上第m单元结点坐标组成的坐标矢量。$\boldsymbol{\mathscr{P}}^{\Gamma_{2m}}$ $\boldsymbol{\mathscr{U}}^{\Gamma_{2m}}$分别是由$\Gamma_2$上第$m$单元结点面力和结点位移组成的面力矢量和位移矢量。$\mathbf{N}$是由自然坐标表示的形状函数矩阵。

将(4.2)代入(3.1)得到

$$\mathbf{C}(\psi)\boldsymbol{\mathscr{U}}(\psi)+\sum_{m=1}^{M}\left[\int_{\Gamma_{2m}}\mathbf{P}^*\mathbf{N}|J_2|d\zeta_2\right]\boldsymbol{\mathscr{U}}^{\Gamma_{2m}}=\sum_{m=1}^{M}\left[\int_{\Gamma_{2m}}\mathbf{u}^*\mathbf{N}|J_2|d\zeta_2\right]\boldsymbol{\mathscr{P}}^{\Gamma_{2m}} \tag{4.3}$$

其中$d\zeta_2$为自然坐标表示的Γ_2上的边界微元。$|J_2|$是由笛卡尔坐标表示的Γ_2上的边界微元$d\Gamma$转换为自然坐标表示的边界微元$d\zeta_2$时的雅可比。

利用高斯积分，当ψ分别取ψ_1，ψ_2，…，ψ_N时得到一组线性方程组

$$(\mathbf{C}_2+\hat{\mathbf{A}}_2)\mathscr{U}=\mathbf{G}_2\mathscr{P} \tag{4.4}$$

其中$\mathbf{C}_2$，$\hat{\mathbf{A}}_2$，$\mathbf{G}_2$都是$\beta N\times\beta N$阶已知矩阵，$\mathscr{U}$，$\mathscr{P}$分别是由ψ_1，ψ_2，…，ψ_N上的未知位移和未知面力组成的βN维位移矢量和βN维面力矢量。

将拟对角矩阵$\mathbf{C}_2$迭加到$\hat{\mathbf{A}}_2$上得到矩阵$\mathbf{H}_2$。于是，

$$\mathbf{H}_2\mathscr{U}=\mathbf{G}_2\mathscr{P} \tag{4.5}$$

不失一般性，设在边界Γ_1上有M_1个应力给定的单元，有$M-M_1$个位移给定的单元。将(4.1)，(4.2)代入(3.16a，b)，

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_1(\phi)\bar{\mathbf{u}}(\phi)=&\sum_{m=1}^{M_1}\int_{\Gamma_{1\sigma m}}\mathbf{u}^*\mathbf{N}|J_1|d\xi_1\bar{\mathbf{P}}^{\Gamma_{1\sigma m}}\\&+\sum_{m=1}^{M-M_1}\int_{\Gamma_{1um}}\mathbf{u}^*\sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_{2m}}\mathbf{n}\mathbf{u}^{**}\mathbf{N}|J_2|d\xi_2|J_1|d\xi_1\mathscr{P}^{\Gamma_{2m}}\\&-\sum_{m=1}^{M-M_1}\int_{\Gamma_{1um}}\mathbf{u}^*\sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_{2m}}\mathbf{n}\mathbf{P}^{**}\mathbf{N}|J_2|d\xi_2|J_1|d\xi_1\mathscr{U}^{\Gamma_{2m}}\\&-\sum_{m=1}^{M-M_1}\int_{\Gamma_{1um}}\mathbf{P}^*\mathbf{N}|J_1|d\xi_1\bar{\mathbf{u}}^{\Gamma_{1um}}\\&-\sum_{m=1}^{M_1}\int_{\Gamma_{1\sigma m}}\mathbf{P}^*\sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_{2m}}\mathbf{u}^*\mathbf{N}|J_2|d\xi_2|J_1|d\xi_1\mathscr{P}^{\Gamma_{2m}}\\&+\sum_{m=1}^{M_1}\int_{\Gamma_{1\sigma m}}\mathbf{P}^*\sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_{2m}}\mathbf{P}^*\mathbf{N}|J_2|d\xi_2|J_1|d\xi_1\mathscr{U}^{\Gamma_{2m}}\end{aligned} \tag{4.6a}$$

其中$\phi\in\Gamma_{1u}$

$$\begin{aligned}&\mathbf{C}_1(\phi)\sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_{2m}}\mathbf{u}^*\mathbf{N}|J_2|d\xi_2\mathscr{P}^{\Gamma_{2m}}-\mathbf{C}_1(\phi)\sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_{2m}}\mathbf{P}^*\mathbf{N}|J_2|d\xi_2\mathscr{U}^{l}\\&=\sum_{m=1}^{M_1}\int_{\Gamma_{1\sigma m}}\mathbf{u}^*\mathbf{N}|J_1|d\xi_1\bar{\mathbf{P}}^{\Gamma_{1\sigma m}}\\&\quad+\sum_{m=1}^{M-M_1}\int_{\Gamma_{1um}}\mathbf{u}^*\sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_{2m}}\mathbf{n}\mathbf{u}^{**}\mathbf{N}|J_2|d\xi_2|J_1|d\xi_1\mathscr{P}^{\Gamma_{2m}}\\&\quad-\sum_{m=1}^{M-M_1}\int_{\Gamma_{1um}}\mathbf{u}^*\sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_{2m}}\mathbf{n}\mathbf{P}^{**}\mathbf{N}|J_2|d\xi_2|J_1|d\xi_1\mathscr{U}^{\Gamma_{2m}}\\&\quad-\sum_{m=1}^{M-M_1}\int_{\Gamma_{1um}}\mathbf{P}^*\mathbf{N}|J_1|d\xi_1\bar{\mathbf{u}}^{\Gamma_{1um}}\end{aligned}$$

$$-\sum_{m=1}^{M_1}\int_{\Gamma_{1\sigma m}}\mathbf{P}^*\sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_{2m}}\mathbf{u}^*\mathbf{N}|J_2|d\zeta_2|J_1|d\zeta_1\mathscr{P}^{\Gamma_{2m}}$$

$$+\sum_{m=1}^{M_1}\int_{\Gamma_{1\sigma m}}\mathbf{P}^*\sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_{2m}}\mathbf{P}^*\mathbf{N}|J_2|d\zeta_2|J_1|d\zeta_1\mathscr{U}^{\Gamma_{2m}}\tag{4.6b}$$

其中$\phi\in\Gamma_{1\sigma}$。

在(4.6a，b)中，$d\zeta_1$为自然坐标表示的Γ_1上的边界微元。$|J_1|$是由笛卡尔坐标表示的Γ_1上的边界微元$d\Gamma$转换为自然坐标表示的边界微元$d\zeta_1$时的雅可比。

当ϕ取ϕ_1，ϕ_2，…，ϕ_N时，利用高斯积分将(4.6a，b)化简得到，

$$\mathbf{H}_1\mathscr{U}+\mathbf{G}_1\mathscr{P}=\mathbf{F}\tag{4.7}$$

其中$\mathbf{H}_1$，$\mathbf{G}_1$分别为$\beta N\times\beta N$阶已知矩阵，$\mathbf{F}$为βN维已知向量，$\mathscr{U}$，$\mathscr{P}$分别是由ψ_1，ψ_2，…，ψ_N上的未知位移和未知面力组成的βN维位移矢量和βN维面力矢量。

求解(4.5)，(4.7)得到$\mathscr{U}$，$\mathscr{P}$的数值解。此后，根据(3.17)，(3.18)利用高斯积分求得区域Ω_1内包括Γ_1上的任意点的位移和应力。

五、改善精度迭代

边界伸缩法不但可以求得边界附近区域包括边界上的解，而且当单元划分较稀疏时可以利用迭代过程改善求解精度。其迭代步骤如下。

设$\mathscr{U}^n$，$\mathscr{P}^n$分别为迭代过程第n步求得的Γ_2上的ψ_1，ψ_2，…，ψ_N的位移矢量和面力矢量。因为Γ_1上的ϕ_1，ϕ_2，…，ϕ_N可以看作Ω_2的内点，所以利用(3.17)，(3.18)可以求得它们的第n步位移或面力。

$$\mathbf{u}^n(\phi_i)=\sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_{2m}}\mathbf{u}^*\mathbf{N}|J_2|d\zeta_2\mathscr{P}^{n\Gamma_{2m}}-\sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_{2m}}\mathbf{P}^*\mathbf{N}|J_2|d\zeta_2\mathscr{U}^{n\Gamma_{2m}}\tag{5.1}$$

其中$\phi_i\in\Gamma_{1u}$。

$$\mathbf{P}^n(\phi_i)=\mathbf{n}(\phi_i)\sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_{2m}}\mathbf{u}^{**}\mathbf{N}|J_2|d\zeta_2\mathscr{P}^{n\Gamma_{2m}}-\mathbf{n}(\phi_i)\sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_{2m}}\mathbf{P}^{**}\mathbf{N}|J_2|d\zeta_2\mathscr{U}^{n\Gamma_{2m}}\tag{5.2}$$

其中$\phi_i\in\Gamma_{1\sigma}$。

(5.1)，(5.2)中$\mathscr{U}^{n\Gamma_{2m}}$，$\mathscr{P}^{n\Gamma_{2m}}$分别表示第$n$步求得的$\Gamma_2$上第$m$单元结点的位移矢量和面力矢量。

记

$$\left.\begin{aligned}\Delta\bar{\mathbf{u}}^n&=\mathbf{u}^n-\bar{\mathbf{u}}\qquad(\text{在}\Gamma_{1u}\text{上})\\ \Delta\bar{\mathbf{P}}^n&=\mathbf{P}^n-\bar{\mathbf{P}}\qquad(\text{在}\Gamma_{1\sigma}\text{上})\end{aligned}\right\}\tag{5.3}$$

若$\|\Delta\bar{\mathbf{u}}^n\|>\varepsilon_1$或$\|\Delta\bar{\mathbf{P}}^n\|>\varepsilon_2$，则将(5.3)中$\Delta\bar{\mathbf{u}}^n$，$\Delta\bar{\mathbf{P}}^n$分别代替(4.6a，b)中有关项的$\bar{\mathbf{u}}$，$\bar{\mathbf{P}}$可得到$\Delta\mathbf{F}^n$，并由(4.5)及(4.7)得到，

$$\mathbf{H}_2\Delta\mathscr{U}^n=\mathbf{G}_2\Delta\mathscr{P}^n\tag{5.4}$$

$$\mathbf{H}_1\Delta\mathscr{U}^n+\mathbf{G}_1\Delta\mathscr{P}^n=\Delta\mathbf{F}^n\tag{5.5}$$

其中ε_1，ε_2分别为精度控制参数。

由(5.4)，(5.5)求得$\Delta\mathscr{U}^n$及$\Delta^n\mathscr{P}$，于是第$(n+1)$步的位移矢量$\mathscr{U}^{n+1}$及面力矢量$\mathscr{P}^{n+1}$为

$$\mathscr{U}^{n+1}=\mathscr{U}^n+\Delta\mathscr{U}^n \tag{5.6}$$

$$\mathscr{P}^{n+1}=\mathscr{P}^n+\Delta\mathscr{P}^n \tag{5.7}$$

当$\mathscr{U}$及$\mathscr{P}$满足求解精度要求时，即使得$\|\Delta\bar{u}\|<\varepsilon_1$及$\|\Delta\boldsymbol{P}\|<\varepsilon_2$时，即可用来求解$\Omega_1$内任意一点的解。

值得说明的是，一般边界元方法(BEM)由于边界上解的奇异性无法使用该迭代过程。

六、应 用 举 例

选择受均匀内压的二维厚壁圆筒，内半径为$a=50$mm，外半径$b=100$mm，内压$P=40$ kg/mm^2，高斯点数$K=4$，单元取一次插值，内部边界在一象限划分4个单元，外部边界在一象限划分6个单元。在Γ_1上的映射取，

$$x_i^{\Gamma_1}+n_i^{\Gamma_1}R=x_i^{\Gamma_2} \tag{6.1}$$

其中$R=30$mm。

分别用普通边界元方法(BEM)和边界伸缩法(BECM)进行计算。计算结果与精确解的比较列于表1。

表1　　BEM及BECM解与精确解的比较

半 径 r		50	52	55	58	60	65
精确解	σ_r	−40.0000	−35.9763	−30.7438	−26.3020	−23.7037	−18.2248
	σ_θ	66.6667	62.6430	57.4105	52.9687	50.3704	44.8915
BEM解	σ_r	507.102	337.291	26.1693	−17.9230	−20.7064	−17.5415
	σ_θ	307.777	−86.090	19.0968	45.7171	46.9471	43.1884
BECM解	σ_r	−43.8358	−39.6265	−34.1524	−29.5056	−26.7875	−21.0558
	σ_θ	67.7540	63.5447	58.0707	53.4238	50.7056	44.9739
BECM解*	σ_r	−41.5462	−37.2894	−31.7923	−27.1638	−24.4740	−18.8492
	σ_θ	65.1064	61.0222	55.7283	51.2554	48.6507	43.1965

半 径 r		75	85	90	93	95	98	100
精确解	σ_r	−10.3703	−5.1211	−3.1275	−2.0827	−1.4404	−0.5498	0.0000
	σ_θ	37.0370	31.7878	29.7942	28.7494	28.1071	27.2164	26.6667
BEM解	σ_r	−10.1907	−6.0279	−15.2547	−62.4740	−156.533	−250.219	−234.090
	σ_θ	35.7629	31.3871	37.2378	64.1125	96.0611	−103.565	−162.535
BECM解	σ_r	−12.8388	−7.3479	−5.2636	−4.1725	−3.5029	−2.5778	−2.0116
	σ_θ	36.7569	31.2658	29.1813	28.0897	27.4197	26.4933	25.9252
BECM解	σ_r	−10.9157	−5.7233	−3.7823	−2.7741	−2.1582	−1.3113	−0.7954
	σ_θ	35.5162	30.5426	28.7084	27.7630	27.1884	26.4012	25.9229

* 经3步迭代结果。

计算结果表明，普通边界元方法(BEM)在远离边界的区域内部虽然有较高精度，但在边界附近区域的应力解失败。而边界伸缩法(BECM)不但在远离边界的区域内部，而且在边界附近区域包括边界上的解仍然有较高的精度。

参考文献

[1] Brebbia, C. A. and S. Walker, *Boundary Techniques in Engineering*, Newnes-Butterworth, London (1980).

[2] 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社 (1956).

[3] 米赫林, C. T.,《积分方程及其应用》，商务印书馆 (1955).

The Boundary Expanding-Contracting Method

Song Shun-cheng

(*Inner Mongolia Institute of Metallic Materials, Baotou*)

Abstract

The boundary element method (BEM) which is used to solve the elastic problems has more advantages than other numerical methods. Especially, it can resolve rapidly varying internal stress and strain fields more accurately. However, it often fails in the region near the boundary because of the singularity of the solutions.

Though we can increase the boundary meshes more and more, the solutions of stress on the boundary can't be given directly, which has obstructed the applications of the BEM to some extent.

In this paper we proposed the boundary expanding-contracting principle and the boundary expanding-contracting method (BECM) based on the principle. With this method, not only the solutions in the region near or on the boundary can be obtained directly, but the iterative processes can also be used conveniently to improve the accuracy of the solutions.