

# 非均匀双向加肋圆柱壳非线性轴对称变形的精确解析法

叶开沅 纪振义

(兰州大学力学系) (安徽建筑工业学院)

(1988年7月18日收到)

## 摘 要

本文首次利用精确解析法分析了环向和纵向加肋非均匀圆柱壳在任意载荷和边界条件下非线性轴对称变形问题。导出了一致收敛于精确解的位移和内力解析表达式, 文中给出收敛性问题。问题最后归结为求解二元一次代数方程组, 计算既简便又迅速。文末给出四个数值算例表明, 本文提出的方法, 可以得到满意的结果。

## 一、引 言

加肋非均匀轴对称圆柱壳在航空, 宇航和船舶等工业有广泛的用途, 如输油和气的管道, 油罐和飞机等。计算其内力和位移有着重大的实际意义。

用解析法分析非均匀及加肋柱壳问题。H. Reissner 在1908年首次给出厚度  $t$  与纵向坐标  $x$  成线性变化的圆柱形水池位移和内力解<sup>[1]</sup>。随后, A. Cattin 在1939年给出厚度  $t$  与  $\sqrt{x}$  成比例的圆柱形水池的幂级数解<sup>[2]</sup>。K. Fedehner 则在1951年计算了厚度  $t$  与  $x^2$  成比例的圆柱形水池的问题<sup>[3]</sup>。在[4]中, 给出了均匀环向加肋圆柱壳的位移和内力公式, 但其只能计算离边界较远的位移和内力, 对于边界附近的位移和内力则是不精确的。纵向密肋加强的圆柱壳可以化为各向异性圆柱壳来处理。对最一般的各向异性情况, W. Flugge 1932年建立了平衡微分方程<sup>[5]</sup>。总的说来, 解析法求解非均匀圆柱壳问题是有限的。对一般情况下, 较复杂的非均匀加肋圆柱壳轴对称问题, 解析法是无能为力的, 只能求助于数值解。

Barougrand 和 Tottenham 用轴对称壳体有限元法计算轴对称非均匀圆柱壳强度问题<sup>[6]</sup>, 用有限元分析轴对称非均匀圆柱壳, 由于位移场是用多项式试探解组成, 且用能量法间接求解, 因此需要较多的计算时间。近年来, 开始用迁移矩阵的方法来计算圆柱壳<sup>[7,8]</sup>, 壳元的位移是用若干个矩阵的乘积来表示, 壳元的位移场是用均匀圆柱壳的解析解组成, 精度较高, 但其仍为数值解。

本文在阶梯析算法<sup>[11]</sup>的基础上首次采用精确解析法, 求解了带有均布载荷, 集中力和

集中力矩在任意边界条件下非均匀双向加肋圆柱壳非线性轴对称变形这一难以解决的问题, 得到了位移和内力的解析表达式, 它们均一致收敛于精确解。由于结果是解析表达式, 因此可对其任意参数微分求极值, 为优化带来方便, 缩短计算时间和提高精度。文末给出四个算例表明, 用精确解析法求解双向加肋非均匀圆柱壳可得到满意的结果。

## 二、非均匀双向加肋非线性轴对称变形的精确解析法

我们把非均匀环向和纵向加肋的圆柱壳分成 $N$ 个壳元, 设第 $i$ 个壳元的区间为 $[x_{i-1}, x_i]$ , 划分应使得方程(2.2)和(2.5)的系数在 $[x_{i-1}, x_i]$ 区间上是充分光滑的。其中第 $i_k$ 壳元( $k=1, \dots, N_1$ )带有纵肋, 第 $j_m$ 壳元( $m=1, \dots, N_2$ )带有环肋及 $N_1+N_2=N$ 。

纵向加肋圆柱壳如图1所示, 由[4]我们可以推出大变形时的弹性定理

$$\left. \begin{aligned} N_\phi &= \frac{D_\phi(x)}{r(x)} w + D_v(x) \left[ \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \\ N_z &= D_z(x) \left[ \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right] + \frac{D_v(x)}{r(x)} w - S_z(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \\ M_\phi &= -K_v(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \\ M_z &= -K_z(x) \frac{d^2 w}{dx^2} + S_z(x) \left[ \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \quad (x \in [x_{i_{k-1}}, x_{i_k}]) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

和平衡方程

$$\begin{aligned} A_w &= \frac{d^2}{dx^2} \left[ \left( K_z(x) - \frac{S_z^2(x)}{D_z(x)} \right) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \frac{S_z(x) D_v(x)}{D_z(x) r(x)} w(x) \right] + \left( \frac{S_z(x) D_v(x)}{D_z(x) r(x)} \right. \\ &\quad \left. - N_z \right) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \frac{w(x)}{r^2(x)} \left( D_\phi(x) - \frac{D_v^2(x)}{D_z(x)} \right) = q(x) - \frac{D_v(x)}{D_z(x) r(x)} N_z \\ &\quad + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{N_z S_z(x)}{D_z(x)} \right) \quad (x \in [x_{i_{k-1}}, x_{i_k}]) \end{aligned} \quad (2.2)$$

注意(2.1)和(2.2)式只适用于密加肋情况, 并不考虑肋条的侧向弯曲刚度。(2.1)中的刚度参数定义为

$$\left. \begin{aligned} D_\phi(x) &= \frac{E(x)h(x)}{1-\nu^2(x)} \\ D_z(x) &= \frac{E(x)h(x)}{1-\nu^2(x)} + \frac{E_2(x)A_r(x)}{b_1(x)} \\ D_v(x) &= \frac{E(x)h(x)\nu(x)}{1-\nu^2(x)}, \quad S_z(x) = \frac{E_2(x)A_r(x)C_r(x)}{b_2(x)} \\ K_z(x) &= \frac{E(x)h^3(x)}{12(1-\nu^2(x))} + \frac{E_2(x)[I_r(x) + A_r(x)C_r^2(x)]}{b_2(x)} \\ K_v(x) &= \frac{E(x)h^3(x)\nu(x)}{12(1-\nu^2(x))} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

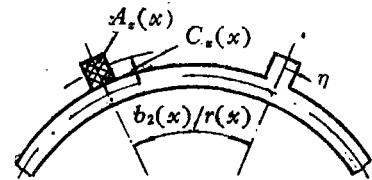


图1 带纵肋壳体截面  $x=\text{const}$

式中记号:

$u, w$ ——柱壳中面内各点的轴向和法向位移;  $q(x)$ ——均布法向载荷;  $M_x$ 和 $M_\phi$ ——柱壳纵向弯矩和环向弯矩;  $N_\phi, N_x$ ——环向膜力和轴向力;  $E(x)$ ——弹性模量;  $\nu(x)$ ——泊松比;  $h(x)$ ——壳体厚度;  $r(x)$ ——壳体半径;  $A_z(x)$ ——纵肋横截面积;  $C_z(x)$ ——纵肋截面形心到壳体中面的距离;  $b_{1jm}$ ——两肋相邻的弧长;  $I_z(x)$ ——纵横对其主形心轴  $\eta$  的惯性矩;  $E_2(x)$ ——纵肋的弹性模量。

环向加肋圆柱壳如图 2 所示。一般情况下可不计肋条侧面弯曲刚度的影响, 由 [4] 可推出非线性变形时的弹性定理。

$$\left. \begin{aligned} N_\phi &= \left[ \frac{E(x)h(x)}{1-\nu^2(x)} + \frac{E_1(x)A_\phi(x)}{b_{1jm}} \right] \frac{w(x)}{r(x)} \\ &\quad + \frac{E(x)h(x)\nu(x)}{1-\nu^2(x)} \left[ \frac{du(x)}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw(x)}{dx} \right)^2 \right] \\ N_x &= \frac{E(x)h(x)}{1-\nu^2(x)} \left[ \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 + \nu(x) \frac{w(x)}{r(x)} \right] \\ M_\phi &= -D(x)\nu(x) \frac{d^2w(x)}{dx^2} + \frac{E_1(x)A_\phi(x)C_\phi(x)}{b_{1jm}} w(x) \\ M_x &= -D(x) \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (x \in [x_{jm-1}, x_{jm}]) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

和平衡方程

$$\begin{aligned} Aw &= \frac{d^2}{dx^2} \left( D(x) \frac{d^2w}{dx^2} \right) - N_x \frac{d^2w(x)}{dx^2} \\ &\quad + \frac{1}{r^2(x)} \left( E(x)h(x) + \frac{E_1(x)A_\phi(x)}{b_{1jm}} \right) w(x) \\ &= q(x) - \frac{1}{r(x)} \nu(x) N_x \quad (x \in [x_{jm-1}, x_{jm}]) \end{aligned} \quad (2.5)$$

式中:

$A_\phi$ ——环肋的横截面积;  $C_\phi$ ——环肋截面形心到壳中面的距离;  $b_{1jm}$ ——第  $j_m$  壳元环肋的宽度;  $D(x)$ ——柱壳的抗弯刚度, 等于  $E(x)h^3(x)[1-\nu^2(x)]^{-1}$ ;  $E_1(x)$ ——环肋的弹性模量。

由(2.1)可得

$$\begin{aligned} M_x(x) &= \left( \frac{S_z^2(x)}{D_z(x)} - K_z(x) \right) \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{S_z(x)}{D_z(x)} \left( N_x - \frac{D_\nu(x)}{r(x)} w(x) \right) \\ Q_x(x) &= \frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{S_z^2(x)}{D_z(x)} - K_z(x) \right) \frac{d^2w}{dx^2} \right] + \frac{d}{dx} \left[ \frac{S_z(x)}{D_z(x)} \left( N_x - \frac{D_\nu(x)}{r(x)} w(x) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

式中  $Q_x(x)$  为柱壳的横向剪力。令  $A_z = I_z = 0$ , (2.6) 即可适用于环肋壳元。

利用精确解析法, (2.2) 和 (2.5) 可转化为求解常系数微分方程

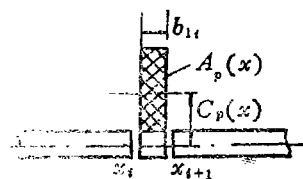


图2 带有环肋壳体的截面  $\phi = \text{const}$

$$\begin{aligned} \bar{A}\bar{w} = & \frac{d^2}{dx^2} \left[ \left( K_z(\bar{x}_{i_h}) - \frac{S_z^2(\bar{x}_{i_h})}{D_z(\bar{x}_{i_h})} \right) \frac{d^2\bar{w}(x)}{dx^2} + \frac{S_z(\bar{x}_{i_h})D_v(\bar{x}_{i_h})}{D_z(\bar{x}_{i_h})r(\bar{x}_{i_h})} \bar{w}(x) \right] \\ & + \left( \frac{S_z(\bar{x}_{i_h})D_v(\bar{x}_{i_h})}{D_z(\bar{x}_{i_h})r(\bar{x}_{i_h})} - N_z \right) \frac{d^2\bar{w}(x)}{dx^2} + \frac{\bar{w}(x)}{r^2(\bar{x}_{i_h})} \left( D_\phi(\bar{x}_{i_h}) \right. \\ & \left. - \frac{D_v^2(\bar{x}_{i_h})}{D_z(\bar{x}_{i_h})} \right) = \bar{q}(x) \quad (x \in [x_{i_{h-1}}, x_{i_h}]) \end{aligned} \quad (2.7)$$

和

$$\begin{aligned} \bar{A}\bar{w} = & \frac{d^2}{dx^2} \left( D(\bar{x}_{j_m}) \frac{d^2\bar{w}}{dx^2} \right) - N_z \frac{d^2\bar{w}(x)}{dx^2} + \frac{1}{r^2(\bar{x}_{j_m})} \left( E(\bar{x}_{j_m})h(\bar{x}_{j_m}) \right. \\ & \left. + \frac{E_1(\bar{x}_{j_m})A_\phi(\bar{x}_{j_m})}{b_{1j_m}} \right) \bar{w} = \bar{q}(x) \quad (x \in [x_{j_{m-1}}, x_{j_m}]) \end{aligned} \quad (2.8)$$

这里

$$\bar{q}(x) = \begin{cases} q(x) - \frac{D_v(x)}{D_z(x)r(x)} N_z + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{N_z S_z(x)}{D_z(x)} \right) & (x \in [x_{i_{h-1}}, x_{i_h}]) \\ q(x) - \frac{N_z \nu(x)}{r(x)} & (x \in [x_{j_{m-1}}, x_{j_m}]) \end{cases} \quad (2.9)$$

(2.6)可转化为

$$\begin{aligned} \bar{M}_z(x) = & \left( \frac{S_z^2(\bar{x}_i)}{D_z(\bar{x}_i)} - K_z(\bar{x}_i) \right) \frac{d^2\bar{w}}{dx^2} - \frac{S_z(\bar{x}_i)D_v(\bar{x}_i)}{D_z(\bar{x}_i)r(\bar{x}_i)} \bar{w}(x) + \frac{S_z(x)}{D_z(x)} N_z \\ \bar{Q}_z(x) = & \left( \frac{S_z^2(\bar{x}_i)}{D_z(\bar{x}_i)} - K_z(\bar{x}_i) \right) \frac{d^3\bar{w}}{dx^3} - \frac{S_z(\bar{x}_i)D_v(x_i)}{D_z(\bar{x}_i)r(\bar{x}_i)} \frac{d\bar{w}(x)}{dx} \\ & + \frac{d}{dx} \left( \frac{S_z(x)}{D_z(x)} N_z \right) \quad (x \in [x_{i-1}, x_i]) \end{aligned} \quad (2.10)$$

式中  $\bar{x}_k = (x_{k-1} + x_k)/2$  ( $k=1, \dots, N$ )。

如果在单元交接处满足连续条件

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{w}(x_{i-1}-\varepsilon) = \bar{w}(x_{i-1}), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d\bar{w}}{dx}(x_{i-1}-\varepsilon) = \frac{d\bar{w}}{dx}(x_{i-1}) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{M}_z(x_{i-1}-\varepsilon) = \bar{M}_z(x_{i-1}), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{Q}_z(x_{i-1}-\varepsilon) = \bar{Q}_z(x_{i-1}) \end{aligned} \right\} \quad (i=2, \dots, N) \quad (2.11)$$

及在边界上, 八个边界条件

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}(x) = w(x), \quad \frac{d\bar{w}}{dx}(x) = \frac{dw}{dx}(x), \quad \bar{M}_z(x) = M_z(x) \\ \bar{Q}_z(x) + N_z \bar{w}'(x) = Q_z(x) + N_z w'(x) \quad (x = x_0 \text{ 或 } x_N) \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

中的任意四个已知, 并假定算子  $A$  在给定的边界条件下有逆算子存在, 则由(2.7)和(2.8)得到的位移  $\bar{w}$ ,  $d\bar{w}/dx$  和内力  $\bar{M}_z$ ,  $\bar{Q}_z$  一致收敛于精确解  $w$ ,  $dw/dx$  和  $M_z$ ,  $Q_z$ 。

这里我们假定柱壳的长度  $l = x_N$  和  $x_0 = 0$ 。由以上理论, 方程(2.7)和(2.8)的初参解为

$$\begin{aligned} \{\delta(x)\} &= [F_i(x-x_{i-1})]\{\delta(0)\} + \{P_i(x)\} \\ &+ \sum_{m=1}^{i-1} \{x-x_m\}^0 [F_i(x-x_m)]\{A_m\} \quad (x \in [x_{i-1}, x_i]) \end{aligned} \quad (2.13)$$

式中记号

$$\{x-x_m\}^0 = \begin{cases} 1 & (x \geq x_m) \\ 0 & (x < x_m) \end{cases}$$

为 Heaviside 函数。向量

$$\begin{aligned} \{\delta(x)\} &= \left\{ \bar{w}(x) \quad \frac{d\bar{w}(x)}{dx} \quad \bar{M}_z(x) - \frac{S_z(x)}{D_z(x)} N_z \quad \bar{Q}_z - N_z \frac{d}{dx} \left( \frac{S_z(x)}{D_z(x)} \right) \right\}^T \\ \{A_m\} &= \{A_{1m} \quad A_{2m} \quad A_{3m} \quad A_{4m}\}^T \end{aligned} \quad (2.14)$$

$A_{im} (i=1, \dots, 4)$  为待定常数, 由单元交接处的连续条件而定。由(2.10)可以推出

$$[F_i(x)] = \left[ \begin{array}{cc} f_{1i}(x) & f_{2i}(x) \\ f'_{1i}(x) & f'_{2i}(x) \\ -K_{si} f''_{1i}(x) - D_{si} f_{1i}(x) & -K_{si} f''_{2i}(x) - D_{si} f_{2i}(x) \\ -K_{si} f'''_{1i}(x) - D_{si} f'_{1i}(x) & -K_{si} f'''_{2i}(x) - D_{si} f'_{2i}(x) \\ -f_{3i}(x) & -f_{4i}(x) \\ -f'_{3i}(x) & -f'_{4i}(x) \\ \frac{1}{D_i} (K_{si} f''_{3i}(x) + D_{si} f_{3i}(x)) & \frac{1}{D_i} (K_{si} f''_{4i}(x) + D_{si} f_{4i}(x)) \\ \frac{1}{D_i} (K_{si} f'''_{3i}(x) + D_{si} f'_{3i}(x)) & \frac{1}{D_i} (K_{si} f'''_{4i}(x) + D_{si} f'_{4i}(x)) \end{array} \right] \quad (2.15)$$

(2.15)式中的记号:

$$\left. \begin{aligned} K_{si} &= K_z(\bar{x}_i) - \frac{S_z^2(\bar{x}_i)}{D_z(\bar{x}_i)}, & D_{si} &= \frac{S_z(\bar{x}_i) D_v(\bar{x}_i)}{r(\bar{x}_i) D_z(\bar{x}_i)} \\ D_i &= D(\bar{x}_i) \end{aligned} \right\} \quad (x \in [x_{i-1}, x_i]) \quad (2.16)$$

当第  $i$  个壳元带纵肋时,  $f_{ki}(x) (k=1, \dots, 4)$  是方程(2.7)的齐次解。

令

$$\left. \begin{aligned} m_i &= \left( \frac{2S_z(\bar{x}_i) D_v(\bar{x}_i)}{r(\bar{x}_i) D_z(\bar{x}_i)} - N_z \right) / 2 \left( K_z(\bar{x}_i) - \frac{S_z^2(\bar{x}_i)}{D_z(\bar{x}_i)} \right) \\ n_i &= \frac{1}{r(\bar{x}_i)} \sqrt{\left( D_\phi(\bar{x}_i) - \frac{D_v^2(\bar{x}_i)}{D_z(\bar{x}_i)} \right) / \left( K_z(\bar{x}_i) - \frac{S_z^2(\bar{x}_i)}{D_z(\bar{x}_i)} \right)} \\ A &= -\frac{D_{si}}{K_{si}} & B &= \frac{D_i}{K_{si}} \end{aligned} \right\} \quad (x \in [x_{i-1}, x_i]) \quad (2.17)$$

一般情况下有  $n_i^2 > m_i^2$ , 这时可求出  $f_{1i} \sim f_{4i}$  及其导数见表1。

我们也不难推出载荷向量

表 1.  $n_i^2 > m_i^2$  时,  $f_{ki}(x)$  ( $k=1, \dots, 4$ ) 及其导数表达式

$k$	$f_{ki}(x)$	$f'_{ki}(x)$	$f''_{ki}(x)$	$f'''_{ki}(x)$	备 注
1	$F_1 + \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{2\lambda_1\lambda_2} F_4$ $+ \frac{AF}{2\lambda_1\lambda_2}$	$\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{2} \left( \frac{F_3}{\lambda_1} - \frac{F_2}{\lambda_2} \right) + \frac{A}{2} \left( \frac{F_3}{\lambda_1} + \frac{F_2}{\lambda_2} \right)$	$-\frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2}{2\lambda_1\lambda_2} F_4$ $+ A \left[ \frac{F_4}{2} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \right] + AF_1$	$-(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2 \left( \frac{F_2}{\lambda_2} + \frac{F_3}{\lambda_1} \right) + \frac{A}{2} \left[ \left( \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} - 3\lambda_2 \right) F_2 - \left( \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} - 3\lambda_1 \right) F_3 \right]$	$\lambda_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(n_i - m_i)}$ $\lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(n_i + m_i)}$ $F_1 = \text{ch}\lambda_1 x \cos\lambda_2 x$ $F_2 = \text{ch}\lambda_2 x \sin\lambda_1 x$ $F_3 = \text{sh}\lambda_1 x \cos\lambda_2 x$ $F_4 = \text{sh}\lambda_2 x \sin\lambda_1 x$
2	$\frac{1}{2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} \left( \frac{3\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{\lambda_2} F_1 + \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{2\lambda_1\lambda_2} F_4 \right)$ $+ A \left( \frac{F_2}{\lambda_2} - \frac{F_3}{\lambda_1} \right)$	$F_1 + \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{2\lambda_1\lambda_2} F_4 + \frac{AF_4}{2\lambda_1\lambda_2}$	$-\frac{F_2}{\lambda_2} + \frac{A}{2} \left( \frac{F_3}{\lambda_1} + \frac{F_2}{\lambda_2} \right)$	$-\frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2}{2\lambda_1\lambda_2} F_4 + A \left[ \frac{F_4}{2} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) + F_1 \right]$	
3	$\frac{BF_4}{2\lambda_1\lambda_2}$	$\frac{B}{2} \left( \frac{F_2}{\lambda_2} + \frac{F_3}{\lambda_1} \right)$	$B \left( F_1 + \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{2\lambda_1\lambda_2} F_4 \right)$	$B \left[ \frac{3\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{2\lambda_1} F_3 - \frac{3\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{2\lambda_2} F_2 \right]$	
4	$B \left( \frac{F_2}{2\lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} - \frac{F_3}{2\lambda_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} \right)$	$\frac{B}{2\lambda_1\lambda_2} F_4$	$\frac{B}{2} \left( \frac{F_2}{\lambda_2} + \frac{F_3}{\lambda_1} \right)$	$B \left( F_1 + \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{2\lambda_1\lambda_2} F_4 \right)$	

$$\{p_i(x)\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{D_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(\xi) f_{4i}(x-\xi) d\xi \\ \frac{1}{D_i} \int_{x_{i-1}}^x q(\xi) f'_{4i}(x-\xi) d\xi \\ - \frac{1}{D_i} \left[ K_{0i} \int_{x_{i-1}}^x q(\xi) f''_{4i}(x-\xi) d\xi + D_{0i} \int_{x_{i-1}}^x q(\xi) f_{4i}(x-\xi) d\xi \right] \\ - \frac{1}{D_i} \left[ K_{0i} \int_{x_{i-1}}^x q(\xi) f'''_{4i}(x-\xi) d\xi + D_{0i} \int_{x_{i-1}}^x q(\xi) f_{4i}(x-\xi) d\xi \right] \end{array} \right. \quad (2.18)$$

若载荷还有轴对称集中力  $P$  和集中力矩  $M$  分别作用在纵向坐标  $x_p$  和  $x_m$  处, 这里  $x_p$  和  $x_m$  均在区间  $[x_{i-1}, x_i]$  内, 注意其与法向轴对称载荷

$$q_p = P\delta(x-x_p), \quad q_m = -M\delta'(x-x_m) \quad (2.19)$$

等价, 代入(2.18)得到对应载荷的向量

$$\{p_i(x)\}_p = \left\{ \begin{array}{l} \frac{P}{D_i} f_{4i}(x-x_p) \{x-x_p\}^0 \\ \frac{P}{D_i} f'_{4i}(x-x_p) \{x-x_p\}^0 \\ - \frac{P}{D_i} [K_{0i} f''_{4i}(x-x_p) + D_{0i} f_{4i}(x-x_p)] \{x-x_p\}^0 \\ - \frac{P}{D_i} [K_{0i} f'''_{4i}(x-x_p) + D_{0i} f'_{4i}(x-x_p)] \{x-x_p\}^0 \end{array} \right. \quad (2.20)$$

$$\{p_i(x)\}_m = \left. \begin{aligned} & -\frac{M}{D_i} f'_{i1}(x-x_m) \{x-x_m\}^\circ \\ & -\frac{M}{D_i} f''_{i1}(x-x_m) \{x-x_m\}^\circ \\ & \frac{M}{D_i} [K_{s1} f''_{i1}(x-x_m) + D_{s1} f'_{i1}(x-x_m)] \{x-x_m\}^\circ \\ & \frac{M}{D_i} [K_{s1} f'_{i1}(x-x_m) + D_{s1} f''_{i1}(x-x_m)] \{x-x_m\}^\circ \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

这里  $\delta(x)$  为狄拉克函数。

当第  $i$  个壳元为带环肋的壳元时,  $f_{i1}(x)$  是方程(2.8)的齐次解。一般情况下有

$$N_s^2 < \frac{4D_i}{r(\bar{x}_i)} \left( E(\bar{x}_i) h(\bar{x}_i) + \frac{E_1(\bar{x}_i) A_\phi(\bar{x}_i)}{b_{1i}} \right)$$

我们可求得特征根

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{1}{r(\bar{x}_i) D_i} \left( E(\bar{x}_i) h(\bar{x}_i) + \frac{E_1(\bar{x}_i) A_\phi(\bar{x}_i)}{b_{1i}} \right) + \frac{N_s}{D(\bar{x}_i)}} \right)} \\ \lambda_2 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{1}{r(\bar{x}_i) D_i} \left( E(\bar{x}_i) h(\bar{x}_i) + \frac{E_1(\bar{x}_i) A_\phi(\bar{x}_i)}{b_{1i}} \right) - \frac{N_s}{D(\bar{x}_i)}} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

把(2.22)代入表1, 替换原表1中的  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ , 并令  $A_s = I_s = 0$ , (2.13)式即可满足(2.8)。

不难验证, (2.13)式满足初始边界条件  $\{\delta(0)\}$ 。由连续条件(2.11), 我们可以得到

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{\delta(x_{i-1} - \epsilon)\} = \{\delta(x_{i-1})\} + \{\alpha_{i-1}\} \quad (2.23)$$

式中  $\epsilon$  为一任意小的正数, 向量

$$\{\alpha_{i-1}\} = \left\{ 0 \quad 0 \quad N_s \frac{S_s(x)}{D_s(x)} \quad \frac{d}{dx} \left( N_s \frac{S_s(x)}{D_s(x)} \right) \right\}^T \Big|_{x_{i-1}-0}^{x_{i-1}} \quad (2.24)$$

把(2.13)代入(2.23), 即可得

$$\begin{aligned} \{A_{i-1}\} &= ([F_{i-1}(x_{i-1} - x_{i-2})] - [I]) \{\delta(0)\} + \{p_{i-1}(x_{i-1})\} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{i-2} \{x-x_m\}^0 ([F_{i-1}(x_{i-1} - x_{i-2})] - [I]) \{A_m\} - \{\alpha_{i-1}\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

(2.13)和(2.25)式即为带集中力和集中力矩及一般分布载荷的非均匀双向肋圆柱壳在任意边界下轴对称大变形的解析解。用(2.13)式也可求解一般无肋非均匀圆柱壳, 这时可把柱壳作为  $A_s = I_s = 0$  纵向加肋的特例。

把端点坐标  $x_N$  代入(2.13)和(2.25)式, 即可得如下的代数方程

$$\{\delta(x_N)\} = [K] \{\delta(0)\} + \{K_f\} \quad (2.26)$$

当边界条件是

$$\text{夹紧时 } \bar{w} = \bar{w}' = 0$$

$$\text{简支时 } \bar{w} = \bar{M}_s = 0$$

$$\text{悬空时 } \bar{M}_s = 0, \bar{Q}_s + N_s \bar{w}' = 0$$

$$(2.27)$$

把已知的边界条件代入(2.26), 即可归结为求解二元一次代数方程组, 求出未知的初参数

$\{\delta(x_0)\}$ , 再利用(2.13)式即可求出壳体上任一点的位移和内力。

### 三、收敛性证明

注意(2.2), (2.5), (2.7)和(2.8)中的微分算子 $A$ 和 $\bar{A}$ 均为线性算子, 因此内积

$$(\varphi, Aw - \bar{A}\bar{w}) = 0 \quad (3.1)$$

这里 $\varphi \in w_1^{(2)}$ , 利用分部积分, 当 $N \rightarrow \infty$ 时

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (\varphi, Aw - \bar{A}\bar{w}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} (A^*\varphi, w - \bar{w}) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \left( -\varphi [(Q_i + N_i w') \right. \\ &\quad \left. - (\bar{Q}_i + N_i \bar{w}')] + \frac{d\varphi}{dx} (M_i - \bar{M}_i) - M_i^* \left( \frac{dw}{dx} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{d\bar{w}}{dx} \right) + (Q_i^* + N_i \varphi') (w - \bar{w}) \right) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = 0 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} M_i^*(x) &= \left( \frac{S_i^2(x)}{D_i(x)} - K_i(x) \right) \frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{S_i(x) D_v(x)}{D_i(x) r(x)} \varphi \\ Q_i^*(x) &= \frac{dM_i^*}{dx}, \quad A^* = A \end{aligned} \quad (3.2)$$

当满足连续条件(2.11)和已知边界条件(2.27)时, 并令其余4个未知边界条件对应的共轭边界条件为零, 则可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (A^*\varphi, w - \bar{w}) = 0 \quad (3.3)$$

这里已假定 $M_i^*(x)$ 和 $Q_i^*(x)$ 在 $[x_0, x_N]$ 上连续。由微分算子理论<sup>[9]</sup>, 可以得到 $A$ 在给定边界条件有逆算子时, 其共轭算子 $A^*$ 在零共轭边界条件下也有逆算子存在。特别地, 当

$$A^*\varphi = w - \bar{w}$$

时, 有唯一解 $\varphi \in w_1^{(2)}$ , 可使 $M_i^*$ 和 $Q_i^*$ 在区间 $[x_0, x_N]$ 上连续。因此可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{x_0}^{x_N} (w - \bar{w})^2 dx = 0 \quad (3.4)$$

因为 $w - \bar{w}$ ,  $dw/dx - d\bar{w}/dx$ ,  $M_i - \bar{M}_i$ 和 $Q_i - \bar{Q}_i$ 在 $[x_0, x_N]$ 上连续, 因此有界, 通过(3.4)很容易证明 $\bar{w}$ ,  $d\bar{w}/dx$ ,  $\bar{M}_i$ 和 $\bar{Q}_i$ 一致收敛于 $w$ ,  $dw/dx$ ,  $M_i$ 和 $Q_i$ 。

### 四、算 例

**算例1** 一个注满水的水池, 如图3所示。 $r=914.4\text{cm}$ ,  $\delta_i=8.89\text{cm}$ ,  $\delta_b=35.56\text{cm}$ ,  $t=792.4\text{cm}$ , 材料的弹性模量 $E=2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ , 泊松比 $\nu=0.25$ , 水的容重 $\rho=0.001 \text{kg/cm}^3$ 。将水池分成 $N$ 个壳元, 在每个壳元上, 载荷取实际压力的平均值。表2给出 $N$ 分别等于5, 10, 25和45时与精确解的比较结果。精确解取自文献[9], 本文已将英制单位换算成公制单位。



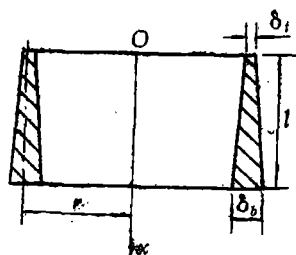


图3 注满水的水池

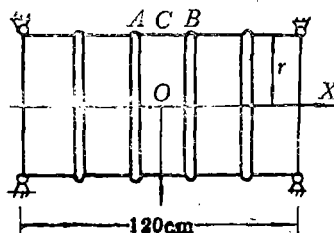


图4 环向加肋圆柱壳

表2 水池的径向位移 $w$ 和纵向弯矩 $M_x$ 计算结果

$x$	$w \times 10^{-2}(\text{cm})$					$M_x(\text{kg}\cdot\text{cm}/\text{cm})$				
	$N=5$	$N=10$	$N=25$	$N=45$	精确解	$N=5$	$N=10$	$N=25$	$N=45$	精确解
0	0.2134	0.1057	0.06638	0.06100	0.06104	0	0	0	0	0
304.8	0.6605	0.6641	0.6650	0.6652	0.6660	37.92	45.94	48.12	48.30	48.39
701.0	0.2385	0.2262	0.2217	0.2210	0.2280	-477.4	-631.6	-670.8	-676.8	-681.4
746.8	0.0760	0.0715	0.0684	0.0679	0.0679	-2629	-2840	-2914	-2923	-2928
792.5	0	0	0	0	0	-6122	-6470	-6577	-6592	-6605

算例2 为一加环肋圆柱壳，受均布载荷作用， $q=420\text{kg}/\text{cm}^2$ ，轴压 $N_x=0$ 。两端铰支，见图4。其尺寸为，壳体的半径 $r=150\text{cm}$ ，厚度 $h=1.1875\text{cm}$ 。环肋间距 $t=24\text{cm}$ 。截面积 $A_b=17.1\text{cm}^2$ 。壳体和环肋的弹性模量为 $E=E_1=10^7\text{kg}/\text{cm}^2$ ，泊松比 $\nu=0.3$ ，肋与壳体的附连宽度 $b_1=1\text{cm}$ 。表3给出B和C点的弯矩及挠度与解析解比较的结果。这里解析解是由文献[10]中公式计算的。C和B点位置见图4。图5给出不带肋，带环肋和同时带环肋及纵肋圆柱壳挠度分布曲线。纵肋的尺寸为， $A_z=20\text{cm}$ ， $C_z=5.594\text{cm}$ ， $I_z=41.667\text{cm}^4$ ， $b_2=11.78\text{cm}$ ， $E_2=10^7\text{kg}/\text{cm}^2$ 。图6给出不带肋和带环肋柱壳 $M_x$ 的分布曲线，图7则给出

表3 受 $q$ 作用， $r=150\text{cm}$  加肋圆柱壳计算结果

带环肋		$M_{xc}$	$w_c$	$M_{xB}$	$w_B$	备注
		( $\text{kg}\cdot\text{cm}/\text{cm}$ )	( $\text{cm}$ )	( $\text{kg}\cdot\text{cm}/\text{cm}$ )	( $\text{cm}$ )	
带环肋	本文解	3295	0.5483	-6951	0.4700	B和C点位置 见图4
	解析解[10]	3229	0.5508	-6972	0.4706	
本文解 (带环肋及纵肋)		3149	0.5182	-5429	0.5019	

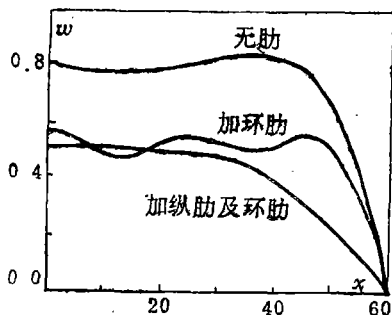


图5 圆柱壳 $w$ 分布

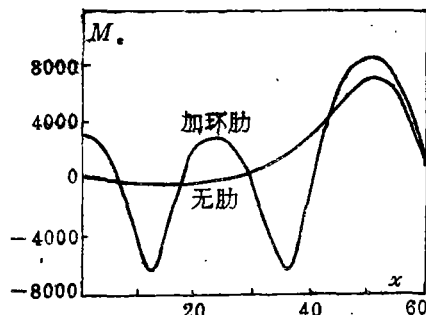


图6 圆柱壳 $M_x$ 分布

了同时带环肋和纵肋分布曲线。

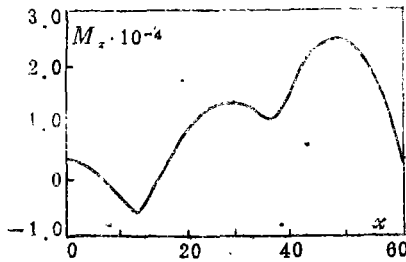


图7 带环肋及纵肋柱壳  $M_x$  分布曲线

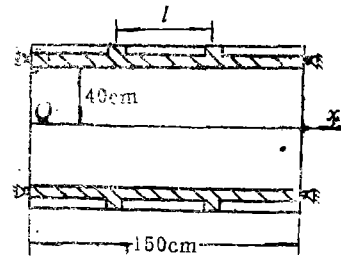


图8 环向和纵向加肋圆柱壳

算例3 为一受外压和轴压联合作用环向加肋圆柱壳,选自[10]中的算例。 $q = -10 \text{ kg/cm}$ ,  $N_x = qr/2 = -1000 \text{ kg/cm}$ 。壳体的尺寸为,  $r = 200 \text{ cm}$ ,  $h = 1.5 \text{ cm}$ 。环肋的间距  $t = 50 \text{ cm}$ ,  $A_r = 20 \text{ cm}^2$ 。原例中不考虑  $b_1$  的大小, 本文取  $b_1 = 0.5 \text{ cm}$ 。弹性模量  $E = E_1 = 2.2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ 。表4给出本文解与解析解<sup>[10]</sup>  $w$  和  $M_x$  的比较结果。

表4 受  $q$  和  $N_x$  作用环向加肋圆柱壳计算结果

	$M_{xc}$ ( $\text{kg}\cdot\text{cm}/\text{cm}$ )	$w_c$ ( $\text{cm}$ )	$M_{xB}$ ( $\text{kg}\cdot\text{cm}/\text{cm}$ )	$w_c$ ( $\text{cm}$ )	备注
本文解	-107.3	-0.097	260.4	-0.0687	B, C 点位置
解析解 <sup>[10]</sup>	-105	-0.096	267.5	-0.070	见图4

算例4 为一带环肋及纵肋的圆柱壳,如图8,壳体的尺寸为  $r = 40 \text{ cm}$ ,  $h = 4 \text{ cm}$ 。环肋的间距  $t = 50 \text{ cm}$ ,  $A_r = 16 \text{ cm}^2$ ,  $b_1 = 4 \text{ cm}$ 。纵肋的尺寸为,  $A_s = 16 \text{ cm}^2$ ,  $C_s = 3 \text{ cm}$ ,  $I_s = 21.333 \text{ cm}^4$ ,  $b_2 = 31.416 \text{ cm}$ 。材料的弹性模量  $E = E_1 = E_2 = 1000$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ 。图9给出在  $x = 75 \text{ cm}$  处受一集中力矩  $M_x = 50 \text{ kg}\cdot\text{cm}/\text{cm}$  作用的挠度和弯矩分布。图10给出了在  $x = 75 \text{ cm}$  处受一集中力  $P_x = 50 \text{ kg/cm}$  作用的挠度和弯矩分布。这里给出的解均为精确解。

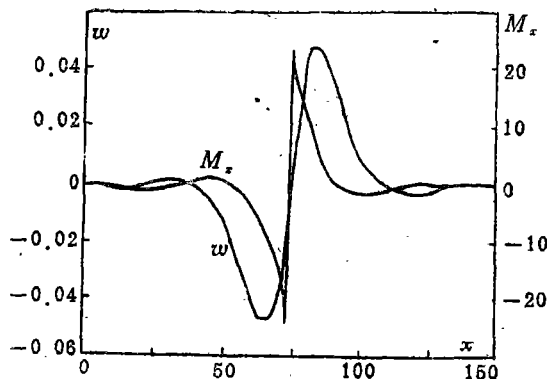


图9 受集中力矩作用双向加肋圆柱壳  $w$  和  $M_x$  分布

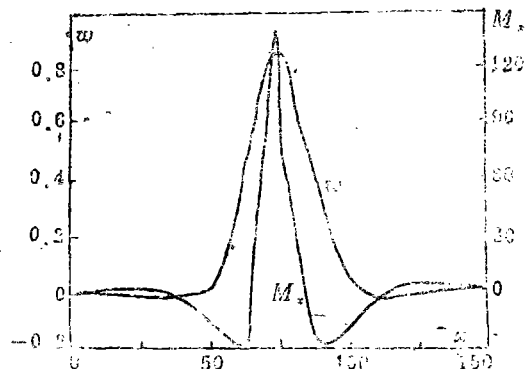


图10 受集中力作用双向加肋圆柱壳  $w$  和  $M_x$  分布

从以上四个算例表明, 本文提出的方法, 对解决非均匀环向和纵向加肋的圆柱壳静力问题, 可以得出较好的结果。

## 参 考 文 献

- [1] Reissner, H., Über die spannungsverteilung in zylindrischen behälterwänden, *Beton U. Eisen*, 7 (1908), 150—155.
- [2] Cattin, A., Serbatoio cilindrico a sezione meridiana di spessore variabile, *Ric. Ing.*, 7 (1939), 80—87.
- [3] Federhofer, K., Berechnung der kreiszylindrischen flüssigkeit sbehälter mit quadratisch veränderlicher wandstärke, *österr Ing. -Arch.*, 6 (1951), 43—64.
- [4] Flügge, W., 《壳体中的应力》, 中国工业出版社 (1965).
- [5] Flügge, W., Die stabilität der kreiszylinderschale, *Ing. -Arch.*, 3 (1932), 463—506.
- [6] Barogand, Y., and H. Tottenham, The Analysis of rotational shells using a curved ring element and mixed variational formulation, *Int. J. Num. Engng.*, 10 (1976).
- [7] 舒恒煜, 迁移矩阵法在旋转壳结构应力分析中的应用, 华中工学院学报, 船舶结构力学专辑 (1980), 59—68.
- [8] 黄玉盈、梁广基, 变厚度圆柱壳的轴对称变形, 上海力学, 1 (1983).
- [9] 纳依玛克, M. A., 《线性微分算子》, 科学出版社, 北京 (1964).
- [10] 斯曼斯基(苏), 《船舶结构力学手册》, 第二卷, 上海科技出版社 (1966), 332.
- [11] 叶开沅, 非均匀变厚度弹性力学的若干问题的一般解, 非均匀变厚度梁的弯曲, 稳定和自由振动, 兰州大学学报, 1 (1979), 133—157.

## An Exact Analytic Method Applied to Nonhomogeneous Ring- and Stringer-Stiffened Cylindrical Shells

Yeh Kai-yuan

(Lanzhou University, Lanzhou)

Ji Zhen-yi

(Anhui Architectural Industrial Institute, Hefei)

### Abstract

In this paper, the nonlinear axial symmetric deformation problem of nonhomogeneous ring- and stringer-stiffened shells is first solved by the exact analytic method. An analytic expression of displacements and stress resultants is obtained and its convergence is proved. Displacements and stress resultants converge to exact solution uniformly. Finally, it is only necessary to solve a system of linear algebraic equations with two unknowns. Four numerical examples are given at the end of the paper which indicate that satisfactory results can be obtained by the exact analytic method.