应用数学和力学，第10卷第9期（1989年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

斜向扰动的下可微稳定性*

陈嵩强　周焕文

（武汉大学数学系，1988年9月3日收到）

摘　要

Laurent和Rockafellar研究了凸极小化问题中的扰动和稳定性问题．Laurent分别就水平扰动和垂直扰动讨论了下可微稳定性条件．本文推广了Laurent的若干结果，给出了某些斜向扰动的下可微稳定性条件．

一、斜向扰动的一般情形

假定X和Y是关于双线性泛函$\langle x,y\rangle$，$x\in X$，$y\in Y$对偶的两个局部凸拓扑向量空间（以下简记为LCTVS）[1]。我们用w表示定义在$X\times\Omega$上、在$\bar{R}$上取值的一个函数，这里Ω是一个紧致集。（文中未说明的记号见[1]或[4]）。

我们考虑极小化问题

$$(P)\qquad \alpha=\operatorname*{Inf}_{x\in C} f_0(x) \tag{1.1}$$

其中$f_0\in\Gamma_0(X)$，C是由下式定义的一个闭凸集：

$$C=\{x\in X\,|\,w_t(x)\leqslant 0,\ t\in\Omega\} \tag{1.2}$$

作为扰动空间，我们取$U=U_1\times U_2$，其中$U_1=X$，$U_2=C(\Omega)$是Ω上的连续实函数。

C的斜向扰动为C_u[4]：

$$C_u=\{x\in X\,|\,w_t(x-u_1)\leqslant u_2(t),\ t\in\Omega\} \tag{1.3}$$

我们假定

$$\operatorname{dom}(f_0)=D_0,$$
$$\operatorname{dom}(w_t(x))\supset D_0,\ \operatorname{ir}(\operatorname{dom}(w_t(x)))\supset\operatorname{ir}(D_0)\qquad (t\in\Omega)$$

问题(P)的扰动问题为

$$(P_u)\qquad h(u)=\operatorname*{Inf}_{x\in X}\varphi(x,u) \tag{1.4}$$

$$=\operatorname*{Inf}_{x\in C_u} f_0(x) \tag{1.5}$$

其中

---

* 国家自然科学基金资助项目。

$$\varphi(x,u)=\begin{cases} f_0(x) & (\text{当} x\in C_u) \\ +\infty & (\text{在其余情形}) \end{cases} \tag{1.6}$$

通过计算，可以得到$\varphi(x,u)$的共轭泛函[4]：

$$\psi(y,v)=\begin{cases} \mathop{\mathrm{Sup}}\limits_{\substack{x\in X\\ u_1\in U_1}} \{\langle x,y\rangle+(u_1,v_1)+(w_t(x-u_1),v_2)-f_0(x)\} & (\text{当} v_2\in K^-) \\ +\infty & (\text{在其余情形}) \end{cases} \tag{1.7}$$

我们令

$$g(v)=\psi(0,v)=\begin{cases} \mathop{\mathrm{Sup}}\limits_{\substack{x\in X\\ u_1\in U_1}} \{(u_1,v_1)+(w_t(x-u_1),v_2)-f_0(x)\} & (v_2\in K^-) \\ +\infty & (\text{在其余情形}) \end{cases} \tag{1.8}$$

就得到(P)的对偶问题

(Q)
$$\beta=\mathop{\mathrm{Inf}}\limits_{v\in V} g(v) \tag{1.9}$$

$$=\mathop{\mathrm{Inf}}\limits_{\substack{v_1\in V_1\\ v_2\in K^-}} \mathop{\mathrm{Sup}}\limits_{\substack{x\in X\\ u_1\in U_1}} \{(u_1,v_1)+(w_t(x-u_1),v_2)-f_0(x)\} \tag{1.10}$$

我们可以得到斜向扰动的下可微稳定性的充分条件。

定理 1 如果$h(0)$是有限的，而且$\{0\}$和$\mathrm{dom}(h)$是联合的，那么问题(1.1)是下可微稳定的。

证明 由$w_t(x)\in\Gamma_0(X)$知$\mathrm{dom}(w_t(x))\neq\phi$，又已知$\Omega$的紧致性，于是$h$的有效区域是非空的，假定它张成仿射流形$L$。

因为凸泛函在其有效区域的相对内部是连续的，由C_u的构造(1.3)和$\varphi(x,u)$的定义(1.6)知，存在$x_0\in\mathrm{dom}(w_t)$，使得泛函

$$\varphi_{x_0}:\qquad u=[u_1,u_2]\longrightarrow\varphi(x_0,u)$$

在L上是d-连续的，因而φ_{x_0}是拟d-连续的。

由[1]的定理7.6.7知，问题(1.1)是下可微稳定的。

二、有限维的情形

我们具体考察当$X=R^n$，Ω为有限集的情形。这时，Ω由m个元素t_1，…，t_m组成，

$$f_i(x)=w(x,t_i)\qquad(i=1,\cdots,m)$$

这时原有问题为

(P)
$$\alpha=\mathop{\mathrm{Inf}}\limits_{x\in C} f_0(x) \tag{2.1}$$

其中

$$C=\{x\in R^n\,|\,f_i(x)\leqslant 0,\ i=1,\cdots,m\} \tag{2.2}$$

这里$f_i(x)\in\Gamma_0(R^n)$ $(i=1,\cdots,m)$ 而且

$$\mathrm{dom}(f_0)=D_0,$$
$$\mathrm{dom}(f_i)\supset D_0,\ \mathrm{ir}(\mathrm{dom}(f_i))\supset\mathrm{ir}(D_0)\qquad(i=1,\cdots,m)$$

我们取

$$\varphi(x,u)=\begin{cases} f_0(x-x_0) & (\text{当} f_i(x-x_i)\leqslant u_i,\ i=1,\cdots,m) \\ +\infty & (\text{在其余情形}) \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $u=[x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_m,\ u_1,\ \cdots,\ u_m]\in R^n\times R^n\times\cdots\times R^n\times R\times\cdots\times R=R^p$，$p=(m+1)n+m$。

通过计算，可以得到$\varphi(x,u)$的共轭泛函：

$$\psi(y,v)=\begin{cases} f_0^*(-y_0)+\sum_{i=1}^{m}(-v_i)f_i^*\left(\frac{y_i}{v_i}\right) \\ \qquad\qquad \left(\text{当} v_i\leqslant 0,\ i=1,\cdots,m, \text{且} y+\sum_{i=0}^{m} y_i=0\right) \\ +\infty \qquad (\text{在其余情形}) \end{cases} \tag{2.4}$$

这里$v=[y_0,\ y_1,\cdots,\ y_m,\ v_1,\cdots,v_m]\in R^p$。

于是，我们有

$$g(v)=\psi(0,v)=\begin{cases} f_0^*(-y_0)+\sum_{i=1}^{m}(-v_i)f_i^*\left(\frac{y_i}{v_i}\right) \\ \qquad\qquad \left(\text{当} v_i\leqslant 0,\ i=1,\cdots,m,\ \text{且}\sum_{i=0}^{m} y_i=0\right) \\ +\infty \qquad (\text{在其余情形}) \end{cases} \tag{2.5}$$

因此，问题(2.1)关于扰动$u\in R^p$的对偶问题为

$$(Q)\quad \beta=\operatorname*{Inf}_{\substack{v_i\leqslant 0,i=1,\cdots,m,\\ \sum_{i=0}^{m}y_i=0}}\left\{f_0^*(-y_0)+\sum_{i=1}^{m}(-v_i)f_i^*\left(\frac{y_i}{v_i}\right)\right\} \tag{2.6}$$

对应于扰动$y\in Y=R^n$的扰动对偶问题为

$$(Q_y)\quad k(y)=\operatorname*{Inf}_{\substack{v_i\leqslant 0,\ i=1,\cdots,m\\ y+\sum_{i=0}^{m}y_i=0}}\left\{f_0^*(-y_0)+\sum_{i=1}^{m}(-v_i)f_i^*\left(\frac{y_i}{v_i}\right)\right\} \tag{2.7}$$

对于上述有限维空间中的斜向扰动，我们可以得到在应用时比较方便的下可微稳定性条件。

定理 2 如果$\beta=k(0)$是有限的，且存在实数$\lambda\in R$，使得集合

$$K_\lambda=\Big\{ v\in R^p\,|\,v_i\leqslant 0,\ i=1,\cdots,m,\ \sum_{i=0}^{m}y_i=0,$$

$$f_0^*(-y_0)+\sum_{i=1}^{m}(-v_i)f_i^*\left(\frac{y_i}{v_i}\right)\leqslant\lambda\Big\} \tag{2.8}$$

非空且有界，那么问题(2.1)是下可微稳定的。

证明 因为$k(0)$是有限的，我们有 $0\in\mathrm{dom}(h^{**})$。由于

$$g(v)=\psi(0,v)=h^*(v)$$

我们有$0\in\mathrm{dom}(g^*)$。由[1]的7.7.4注(1)知，它等价于条件

$$g_\infty(v)\geqslant 0 \qquad (\forall v\in V)$$

这里$g_\infty(v)$表示$g(v)$的渐近泛函[1]。于是有：

$$\{v\in V\mid g_\infty(v)=0\}=\{v\in V\mid g_\infty(v)\leqslant 0\}$$

而集合$\{v\in V\mid g_\infty(v)\leqslant 0\}$等于所有集合$K_\lambda=\{v\in V\mid g(v)\leqslant\lambda\}$的渐近锥([1]P.377)。如果某个$K_\lambda$是有界的，那么它的渐近锥退化为$\{0\}$。由[1]的定理7.7.9知，问题(2.1)是下可微稳定的。

三、一 个 特 例

现在考虑$X=R^n$，$w(x,t)$为x的线性函数的情形。即假定

$$w(x,t)=\sum_{i=1}^{n}x_ic_i(t)-c_i(t) \qquad (t\in\Omega) \tag{3.1}$$

其中$c_i(i=0,1,\cdots,n)$是Ω上的连续函数。

原有极小化问题为

$$(P) \qquad \alpha=\operatorname*{Inf}_{x\in C}f_0(x)=\operatorname*{Inf}_{x\in R^n}f(x) \tag{3.2}$$

其中

$$f(x)=\begin{cases} f_0(x) & (\text{当 } x\in C)\\ +\infty & (\text{在其余情形})\end{cases} \tag{3.3}$$

$$C=\left\{x\in R^n\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n}x_ic_i(t)-c_0(t)\leqslant 0,\ t\in\Omega\right\} \tag{3.4}$$

扰动空间为$U=U_1\times U_2=R^n\times R$，扰动$u=[\tilde{u},\ u_0]\in U$，($\tilde{u}=(u_1,\cdots,\ u_n)\in U_1,u_0\in U_2$)。$C$的斜向扰动为

$$C_u=\left\{x\in R^n\mid\sum_{i=1}^{n}(x_i-u_i)c_i(t)-c_0(t)\leqslant u_0(t),t\in\Omega\right\} \tag{3.5}$$

$\varphi(x,u)$为(1.6)式所示，其中C_u由(3.5)式定义。通过计算，可以得到$\psi(y,v)$的表达式。记$v=[v_1,\cdots,\ v_n,\ v_0]\in V_1\times V_2=R^n\times R$，当$v_0\in K^-$时，

$$\psi(y,v)=\operatorname*{Sup}_{\substack{x\in R^n\\ \tilde{u}\in U_1}}\left\{\langle x,\ y\rangle+\sum_{i=1}^{n}u_iv_i+\sum_{i=1}^{n}((x_i-u_i)c_i-c_0,\ v_0)-f_0(x)\right\}$$

$$=\operatorname*{Sup}_{\substack{x\in R^n\\ \tilde{u}\in R^n}}\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i+(c_i,\ v_0))+\sum_{i=1}^{n}u_i(v_i-(c_i,\ v_0))-(c_0,\ v_0)-f_0(x)\right\}$$

记

$$\delta_i=(c_i,\ v_0),\ \tilde{v}_i=v_i-\delta_i \qquad (i=1,\cdots,\ n)$$
$$\delta=(\delta_1,\ \cdots,\ \delta_n),\ \tilde{v}=(\tilde{v}_1,\ \cdots,\ \tilde{v}_n)$$

上式成为

$$\begin{aligned}\psi(y,v)&=\operatorname*{Sup}_{\substack{x\in R^n\\ \tilde{u}\in R^n}}\{-(c_0,v_0)+(\tilde{u},\tilde{v})+\langle x,y+\delta\rangle-f_0(x)\}\\ &=-(c_0,v_0)+f_0^*(y+\delta)+\operatorname*{Sup}_{\tilde{u}\in R^n}(\tilde{u},\tilde{v}) \qquad (\forall v_0\in K^-)\end{aligned}$$

于是，我们得到$\psi(y,v)$的表达式：

$$\psi(y,v)=\begin{cases}-(c_0,v_0)+f_0^*(y+\delta)+\operatorname*{Sup}_{\tilde{u}\in R^n}(\tilde{u},\tilde{v}) & (\text{当}v_0\in K^-)\\ +\infty\quad(\text{在其余情形}) & \end{cases} \tag{3.6}$$

对偶问题(Q)和扰动对偶问题(Q_y)可以写成：

(Q)
$$\beta=\operatorname*{Inf}_{v_0\in K^-}\operatorname*{Sup}_{\tilde{u}\in R^n}\{-(c_0,v_0)+(\tilde{u},\tilde{v})+f_0^*(\delta)\} \tag{3.7}$$

(Q_y)
$$k(y)=\operatorname*{Inf}_{v_0\in K^-}\operatorname*{Sup}_{\tilde{u}\in R^n}\{-(c_0,v_0)+(\tilde{u},\tilde{v})+f_0^*(y+\delta)\} \tag{3.8}$$

我们可以得到下可微稳定性条件。

定理 3 如果$\alpha=h(0)$是有限的，且集合

$$\left\{x\in R^n \mid (f_0)_\infty(x)=0,\ \sum_{i=1}^{n}x_ic_i(t)\leqslant 0,\ t\in\Omega\right\} \tag{3.9}$$

是一个向量子空间，那么对偶问题(3.7)是下可微稳定的。

这个定理的证明与[1]的命题7.9.8的证明类似，此处从略。

参 考 文 献

[1] Laurent, P. J., *Approximation at Optimisation*, Hermann (1972).

[2] Joly, J. L. and P. J. Laurent., Stability and duality in convex minimization problems, M. R. C. Techn. Report 1090, Univ. of Wisc. (1970); RIRO., (1971), 3—42.

[3] Rockafellar. R. T., *Convex Analysis*, Prinston Univ. Press (1970).

[4] Chen Song-qiang (陈嵩强), Un theoreme de stabilite des perturbation oblique dans le problème de minimisation comvexe, *Acta Mathematica Scientia*, **4**, 2 (1984), 243—258.

Inf-Dif-Stability of Oblique Perturbation

Chen Song-qiang Chou Huan-wen
(*Wuhan University, Wuhan*)

Abstract

Laurent and Rockafellar have studied certain problems of perturbation and of stability in convex minimization problems. Laurent has discussed inf-dif-stability conditions respectively for horizontal perturbation and for vertical perturbation. In this paper, we generalize some results of Laurent[1] by giving several inf-dif-stability conditions of oblique perturbation.