

# 循环载荷下缺口板的弹塑性应变分析 ——塑性各向异性强化理论的应用

金永杰 李如锋 周春田 勾秋静

(上海交通大学)

(清华大学)

(潘立宙推荐, 1988年6月15日收到)

## 摘 要

为了估算承受低周疲劳时工程构件的寿命, 需要研究缺口件在低周交变负荷时的应变分布。由于循环载荷作用下材料的鲍兴效应不能忽略, 需要应用塑性各向异性强化模型。从本文的计算结果与实验结果的比较可以看出即使是线性随动强化模型对解决循环加载下的应变计算还是很有有效的。

## 一、前 言

工程中很多构件(如压力容器, 发动机的涡轮盘, 飞机起落架等), 常承受低周交变负荷。为了估算承受低周疲劳时构件的寿命, 必须研究缺口件在低周交变负荷时的应变分布。特别是缺口根部应力应变的变化规律是应变疲劳研究方面的迫切任务。

由于循环载荷作用下材料的鲍兴效应不能忽视, 因而应用等向强化模型就不再适合了, 而需要应用塑性各向异性强化模型。在各向异性强化理论中普拉格的线性随动强化模型要较混合强化模型<sup>[1]</sup>简单。模型的选择依赖于材料性质。本文中我们对具有圆孔的板件一方面用实验的方法精细地测定了在循环加载条件下孔边的最大应变以及削弱截上的应变分布, 同时还应用塑性的各向异性强化模型加以计算。这样做有双重目的, 我们既可进一步检验这些理论的正确性以及在实际运用中的有效性, 同时如用简单模型计算获得成功, 至少可在一定程度上减少部分的繁重的实验工作, 而这有着很大的实际意义。从本文所得结果是受鼓舞的, 计算结果令人满意地接近实验结果。这意味着尽管模型很简单但很有应用前景。这使我们相信在对构件循环载荷作用下的应力应变分析及进而对它的寿命估算方面<sup>[2]</sup>, 现有的塑性各向异性强化理论仍具有很大的生命力。

## 二、随动强化的本构关系

### 1. 加载条件

$$f(\sigma_{ij}, a_{ij}) = \left\{ \frac{3}{2} (S_{ij} - a_{ij})(S_{ij} - a_{ij}) \right\}^{\frac{1}{2}} - \sigma_s = 0 \quad (2.1)$$

### 2. 普拉格的随动规律

$$da_{ij} = C de_{ij}^p \quad (2.2)$$

式中  $C$  值与材料性质有关

$$C = \frac{2}{3} H' \quad (2.3)$$

式中  $H'$  是刚塑性模型线性强化时在单向应力应变曲线上的一斜率 (见图2)。

### 3. 相关的流动定律

### 4. 一致性条件

综合以上诸条件, 可得

$$de_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} - C \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \quad (2.4)$$

## 三、圆孔板在循环加载下的弹塑性应变分析

我们应用增量法进行弹塑性分析, 修改了欧文的程序<sup>[3]</sup>, 将等向强化模型改为线性随动强化模型。现在的问题是一个平面应力问题, 但为了提高计算精度, 我们仍从全应力空间出发而不是从二维的子应力空间出发来分析, 尽管这样做要较复杂一些。

为了便于矩阵表示, 我们令

$$\sigma_{11} = \sigma_1, \quad \sigma_{22} = \sigma_2, \quad \sigma_{12} = \sigma_3, \quad \sigma_{33} = \sigma_4 \quad (3.1a)$$

$$S_{11} = S_1, \quad S_{22} = S_2, \quad S_{12} = S_3, \quad S_{33} = S_4 \quad (3.1b)$$

式中  $\sigma$  表示应力,  $S$  表示应力偏量。

用密西斯屈服条件表示的加载条件为

$$f(\sigma_i - Ce_i^p) = \sqrt{3} [J_2'(\sigma_i - Ce_i^p)]^{\frac{1}{2}} - \sigma_s = 0$$

$$\text{式中 } J_2'(\sigma_i - Ce_i^p) = (S_3 - Ce_3^p)^2 + \frac{1}{2} [(S_1' - Ce_1^p)^2 + (S_2 - Ce_2^p)^2 + (S_4 - Ce_4^p)^2] \quad (3.2)$$

从(2.4)式可得

$$d\epsilon^p = D_p^{-1} d\sigma \quad (3.3)$$

其中 
$$D_i^{-1} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^T}{C \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}} \quad (3.4a)$$

$$\mathbf{a} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \right\} \quad (3.4b)$$

于是 
$$d\epsilon = D_{e,i}^{-1} d\sigma \quad (3.5)$$

其中 
$$D_{e,i}^{-1} = D_e^{-1} + D_p^{-1} \quad (3.6)$$

$D_e$  是弹性系数矩阵

$D_p$  是塑性系数矩阵

$D_{e,p}$  是弹塑性系数矩阵

由通常的方法，可得单元的刚度矩阵

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{B}_i^{(e)})^T \mathbf{D}_{e,p}^{(e)} \mathbf{B}_j^{(e)} t^{(e)} |J^{(e)}| d\xi d\eta \quad (3.7)$$

式中  $\mathbf{B}_i^{(e)}$  是单元的位移应变矩阵

$t^{(e)}$  是单元的厚度

$J^{(e)}$  是坐标变换的雅可比矩阵

我们用通常的办法来进行应变分析，所以不再详述。

为了易于与试验结果进行比较，我们采取的加载路径如下：

$$\begin{aligned} \frac{p}{\sigma_{0.2}} = 0 \rightarrow 0.413 \rightarrow 0.58 \rightarrow 0 \rightarrow 0.58 \rightarrow 0.62 \rightarrow 0 \rightarrow 0.62 \rightarrow 0.65 \\ \rightarrow 0 \rightarrow 0.65 \rightarrow 0.68 \rightarrow 0 \rightarrow 0.68 \rightarrow 0.70 \rightarrow 0 \rightarrow 0.70 \end{aligned}$$

其中  $p$  是外加拉力的强度； $\sigma_{0.2}$  是屈服应力，它等于  $29.5 \text{ kg/mm}^2$

#### 四、计算结果与实验结果的比较

实验是在电子拉力试验机上进行的，采用应力控制循环加载。通过动态应变仪和 X-Y 记录仪记录某些点的载荷  $P$  和应变迹线。图 1 表示铝合金 CY-12CZ 在单调加载时单向拉伸曲线，图 2 表示简化的单向拉伸曲线。图 3 表示试件的尺寸和被测点的位置。图 4 表示点 1（圆孔的边界点）的载荷应变迹线和循环载荷的载荷谱。其他点的迹线从略未画出。

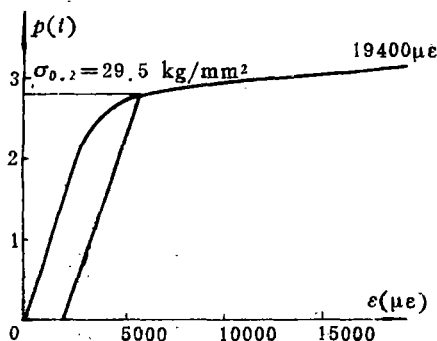


图 1

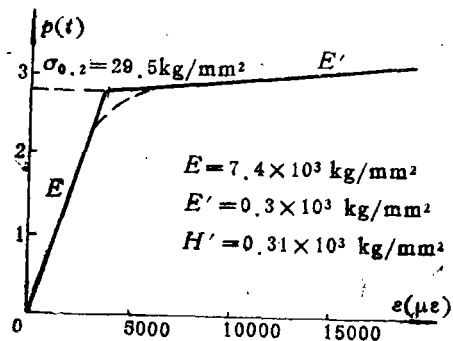


图 2

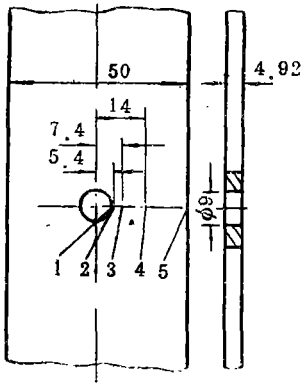


图 3

图5 中两条曲线表示当 $P=4500$  公斤在削弱截面上的应变分布，其中实线是试验结果而

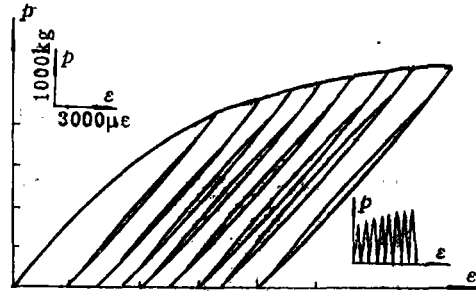


图 4

虚线是计算结果。比较结果清楚地表明用线性随动强化模型得到的计算结果具有一定的精度。

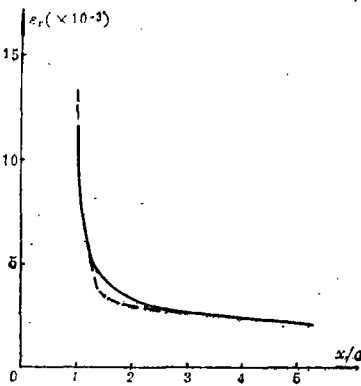


图 5

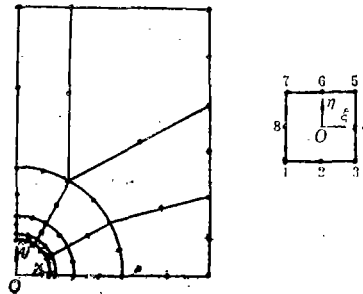


图 6

由于最大应变和最大剩余应变都发生在点1，载荷幅值的变化对此点的影响也较其他点为显著，所以点1（亦即应变集中点）是最关键的点。局部应变的大小及其在循环载荷下的变化规律将是影响切口构件疲劳裂纹起裂的重要参数。所以我们主要计算在点1的变化规律并与试验结果进行比较。某些主要的数据可见表1。

表 1 点 1 的应变  $\epsilon_v$  值

$P_{0.2}$	$P(\text{kg})$	$\epsilon_v(\mu\epsilon)$		
		实验结果	计算结果	相对误差
0.413	3000	5760	5750	-0.1%
0.58	4210	10000	11419	14.2%
0.62	4500	12100	13182	8.9%
0.65	4720	13800	14544	5.4%
0.68	4940	15000	17048	13.6%
0.70	5080	16500	17628	6.2%

## 五、结 语

从前面的分析讨论以及计算结果与实验结果的比较可看出即使是各向异性强化中较简单的一种模型,但对循环加载下的应变分析还是很有效的。当然更普遍的可以采用混合强化模型以便适应各种材料迥然不同的强化性能。从这里使我们得到启示:尽管经典的塑性理论需要进一步发展,但运用这些理论可以解决许多实际工程问题,在目前仍是有力的工具。

## 参 考 文 献

- [1] Axelsson, K. and A. Samuelsson, Finite element analysis of elasto-plastic materials displaying mixed hardening, *Inter. J. Num. Meth. Engng*, 14 (1978), 211—225.
- [2] Zenner, H., On life prediction in low cyclic fatigue, *Proceedings of the International Symposium on Low-Cyclic Fatigue Strength and Elasto-Plastic Behaviour of Materials* (1979).
- [3] Owen, D. R. J. and E. Hinton, *Finite Element in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press Limited, Swansea, U. K. (1980).

# The Elasto-Plastic Strain Analysis of Notched Plate under Cyclic Loading——An Application of Plastic Anisotropic Hardening Theory

Jin Yong-jie Li Ru-feng  
(Shanghai Jiaotong University, Shanghai)

Zhou Chun-tian Gou Qiu-jing  
(Qinghua University, Beijing)

## Abstract

In order to predict the life of engineering structures, it is necessary to investigate the strain distribution in notched members. In general, the Bauschinger Effect of materials under cyclic loading is not negligible, and so the anisotropic hardening model has been suggested. From the comparison between the calculated and experimental results in this paper, we can see that even the linear kinematic hardening model is quite suitable for strain analysis under cyclic loading.