

圆孔外Stokes流中球形粒子的运动*

山慧贤

严宗毅

(北京大学分校)

(北京大学力学系)

(李家春推荐, 1988年6月10日收到)

摘 要

在研究悬浮液入孔问题时, 粒子在孔外任意位置所受的力和力矩是所需的最基本数据. 本文在严宗毅等(1987)算出的有限个离散数据的基础上, 首次给出了球在圆孔外的全部十二个力和力矩系数的近似解析表达式. 我们应用这些系数计算零雷诺数下球形粒子入孔时的轨道和旋转角速度, 结果与现有实验数据完全一致. 分析不同系数的相对重要性表明, 在孔口和孔壁附近不能忽略旋转效应, 在靠近孔口边缘的局部区域必须计及侧向力效应. 以往的理论结果在孔口附近与实验不符, 正是由于忽略了这些因素. 本文还详细讨论了粒子和孔口尺寸的相对大小以及重力和浮力对于粒子运动轨道、速度分布和旋转的影响, 指出用大粒子做中性悬浮实验时, 对其密度的要求特别严格. 本文所提供的力和力矩系数, 考虑因素全面、比较准确, 便于计算, 为进一步研究各种涉及粒子入口的问题提供了良好的前提.

一、引 言

考察悬浮液中粒子在孔入口附近的运动, 对于研究生物膜与合成膜的分子筛效应、渗透现象、核孔滤膜的收集效率以及血液循环的机理都有重要意义. 在这些问题中常遇到的气溶胶微滴、粉尘、红细胞和血小板等, 由于尺寸微小, 运动缓慢, 都可以忽略粒子与流体的惯性, 把流动看作雷诺数为零的 Stokes 流.

在六十年代和七十年代, 由于还不能算出粒子在复杂入口边界附近所受到的流体作用力, 通常假定粒子漂浮的速度与周围流体运动速度相同. 根据这一假定, 一开始位于某一极限流线以外区域中的粒子都不能入孔. 1982年, Dagan等^[1]证明, 孔的长度对于孔外Stokes流的影响局限于孔口附近半个孔半径范围之内, 从而建议, 在研究悬浮液入孔问题时不妨采用图1所示的简化几何形状, 即忽略孔的长度; 图中 a 是球形粒子的半径, c 是圆孔的半径. 1983年, Dagan等^[2]在忽略粒子旋转的前提下, 假定粒子在孔外流体中所受的阻力与粒子在无穷大平壁或大圆盘附近所受力相同, 计算了粒子的轨道. 他们发现, 在逼近孔时粒子轨道明显偏离于流线. 如果不计孔壁的分力吸附力, 那么不管粒子初始位置如何, 最终都能进入

* * 国家自然科学基金资助项目.

孔内。他们所做的实验证实了这一论断。但是由于忽略了粒子的旋转，又没能恰当地考虑孔的效应，对于图1中远处入射角 $\theta=45^\circ$ 的粒子，他们算出的轨道在孔口附近与实验有明显偏差(见图2)。他们认为自己的理论只适用于距孔口两倍孔半径以外的区域。1986年，王永安等^[3]根据粒子沿对称轴逼近孔的阻力结果和远场的渐近值，参照严宗毅等^[4]提出的插值方案，对于粒子沿不同方向平移或旋转时所受的力和力矩给出了估计值，在考虑或不考虑粒子惯性的条件下计算了粒子的轨道。

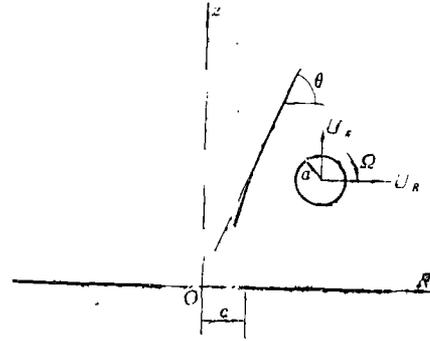


图1 问题的几何形状

在上述各个工作中，所以不得不做许多人为的假定，主要是由于：计算粒子在入口边界附近任意位置所受三维流体作用力这一问题太复杂了，当时还没有解决。1987年，严宗毅等^[5]采用多极子法与积分方程法相结合的流体动力强干扰理论，首次给出了 $a/c=0.5$ 的球形粒子在孔以外不太靠近壁面的近场区全部十二个流体作用力和力矩的数值解，并根据流场性态建议了适用于不同粒子大小并在整个流场中成立的插值公式(有些需要数值积分，大量数据用离散的表格形式给出)。本文的目的就是应用这些最新数据来研究粒子在孔外Stokes流中的运动规律，分析不同力和力矩分量以及旋转效应在流场不同区域对于描述粒子运动的相对重要性，同时也以这一应用为例来检验文献[5]的插值公式是否合理，对其加以部分地改进。

本文与以往工作的不同点在于：(1)在研究粒子运动时，首次考虑了全部十二个力和力矩分量(见下文(2.1)式)，其中有些是从未有人考虑过的，例如粒子沿某一方向平移时所受到的侧向力；(2)这些力与力矩是根据文献[5]准确数值解的有限个离散数据(以下称为原始数据)推广到全流场的，比以往粗糙的估计更有充分的理论依据；(3)这些力和力矩系数都用近似的解析式给出，完全避免了数值积分和查表，使用更为方便；(4)首次研究了粒子与孔口相对尺寸大小对粒子运动规律的影响；(5)首次考虑了重力和浮力对于粒子运动的影响。

在第二节中，我们将列出粒子运动的方程，并定义其中出现的力和力矩的不同分量。这些分量的近似解析表达式将在第三节给出。第四节将讨论计算的主要结果。第五节则从中得出几点结论。

二、问题的提法

由于Stokes方程的线性，图1中球形粒子在 (ROz) 平面上运动时所受的力 (F_R, F_z) 和力矩 T_θ 可以表示为下述四个问题中球所受力和力矩的叠加：(1)球在原静止流体中沿 R 方向平移(速度 U_R)；(2)球在原静止流体中沿 z 向平移(速度 U_z)；(3)球在原静止流体中旋转(角速度 Ω 垂直于 (ROz) 平面)；(4)球静止不动，周围流体在孔两侧压差作用下流过孔(孔中心 $R=0, z=0$ 处流速 V_{z0})。分别用上标 t, R, z, r 和 s 表示上述四个问题，我们有^[5]：

$$\left. \begin{aligned} F_R &= 6\pi\mu a(U_R F_R^{t,R} + U_z F_R^{t,z} + a\Omega F_R^r + V_{z0} \bar{F}_R^s) \\ F_z &= 6\pi\mu a(U_R F_z^{t,R} + U_z F_z^{t,z} + a\Omega F_z^r + V_{z0} \bar{F}_z^s) - (\rho_s - \rho) g \frac{4}{3} \pi a^3 \\ T_\phi &= 8\pi\mu a(U_R T_\phi^{t,R} + U_z T_\phi^{t,z} + a\Omega T_\phi^r + V_{z0} \bar{T}_\phi^s) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

式中 $F_R^{t,R}, \dots, \bar{T}_\phi^s$ 等十二个力和力矩系数描述由于粒子与孔入口边界相互干扰而使粒子所受力矩偏离无界流体中相应值的程度。 F_z 式中最后一项表示球所受的重力和浮力合力， ρ_s 和 ρ 分别是球和流体的密度， μ 是流体的粘度， g 是重力加速度。这里假设 z 轴是竖直向上的。在以往的模型中，从未考虑过侧向力 ($F_z^{t,R}$ 和 $F_R^{t,z}$)，对于问题(4)(上标 s) 中的力和力矩的描述也不够恰当 (如 [2], [3] 中都分别考虑当地流体速度 V_R 和 V_z 的影响，而事实上 V_R 和 V_z 并不是相互独立的，二者都取决于 V_{z0} ，见 (2.6) 式)。我们的 (2.1) 式是一种全面、准确的提法。

当忽略粒子惯性时，球所受合力和合力矩为零 $F_R = F_z = T_\phi = 0$ 。由此可以解出球的运动速度和角速度：

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_R}{V_{z0}} = \frac{1}{D} & \begin{pmatrix} \bar{F}_R^s & F_R^{t,z} & F_R^r \\ \bar{F}_z^s - \frac{V_z}{V_{z0}} & F_z^{t,z} & F_z^r \\ \bar{T}_\phi^s & T_\phi^{t,z} & T_\phi^r \\ F_R^{t,R} & \bar{F}_R^s & F_R^r \end{pmatrix} \\ \frac{U_z}{V_{z0}} = \frac{1}{D} & \begin{pmatrix} F_z^{t,R} & \bar{F}_z^s - \frac{V_z}{V_{z0}} & F_z^r \\ T_\phi^{t,R} & \bar{T}_\phi^s & T_\phi^r \\ F_R^{t,R} & F_R^{t,z} & \bar{F}_R^s \end{pmatrix} \\ \frac{\Omega a}{V_{z0}} = \frac{1}{D} & \begin{pmatrix} F_z^{t,R} & F_z^{t,z} & \bar{F}_z^s - \frac{V_z}{V_{z0}} \\ T_\phi^{t,R} & T_\phi^{t,z} & \bar{T}_\phi^s \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

式中

$$D = - \begin{pmatrix} F_R^{t,R} & F_R^{t,z} & F_R^r \\ F_z^{t,R} & F_z^{t,z} & F_z^r \\ T_\phi^{t,R} & T_\phi^{t,z} & T_\phi^r \end{pmatrix}$$

$$V_z = \frac{2}{9} \frac{a^2}{\mu} (\rho_s - \rho) g \quad (2.3)$$

这里 V_z 是球在无界流体中的定常沉降速度。

于是粒子运动的轨道可由下列微分方程求得：

$$\frac{dR}{dz} = \frac{U_R/V_{z0}}{U_z/V_{z0}} \quad (2.4)$$

为了便于比较, 还同时由下列微分方程求得未受粒子扰动的流线形状:

$$\frac{dR}{dz} = \frac{V_R/V_{z0}}{V_z/V_{z0}} \quad (2.5)$$

式中球心所在位置当粒子不存在时的流体的速度 (V_R, V_z) 由 Sampson 解^[6]给出:

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_R}{V_{z0}} &= -\frac{\xi}{4R} z(R_1 - R_2) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ \frac{V_z}{V_{z0}} &= \frac{\xi}{4R} (R_1 - R_2) \left(\frac{R-1}{R_1} - \frac{R+1}{R_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

此处

$$\xi = \left[1 - \frac{1}{4} (R_2 - R_1)^2 \right]^{1/2}, \quad R_1 = [z^2 + (R-1)^2]^{1/2}, \quad R_2 = [z^2 + (R+1)^2]^{1/2}.$$

在我们的工作中, (2.4) 和 (2.5) 式都用定步长四阶 Runge-Kutta 法数值求解。对于较小的 θ 角 (即靠近壁面情形), 为了减小计算误差, 改为对 dz/dR 求解。

三、力和力矩系数的近似解析表达式

在 (2.1) 式所涉及的十二个力和力矩系数中, 有三个可以通过互易定理^[6]计算:

$$F_z^{t,z} = F_R^{t,z}, \quad T_\phi^{t,z} = \frac{3}{4} F_z^r, \quad T_\phi^{t,R} = \frac{3}{4} F_R^r \quad (3.1)$$

其余九个系数中, 有五个直接用严宗毅等^[5]给出的插值公式:

$$F_R^{t,R} = (F_{R_\infty}^{t,R} - F_{R_0}^{t,R}) \left[1 - \operatorname{sech} \left(0.6 \frac{R/c}{(z/a)^{1/3}} \right) \right] + F_{R_0}^{t,R} \quad (3.2)$$

$$T_\phi^r = (T_{\phi_\infty}^r - T_{\phi_0}^r) \left[1 - \operatorname{sech} \left(0.8 \frac{R/c}{(z/a)^{1/4}} \right) \right] + T_{\phi_0}^r \quad (3.3)$$

$$F_R^r = \frac{0.3(z/a)^{-2.5}(R/c)^3 + F_{R_0}^r - F_{R_\infty}^r}{(R/c)^4 + 1} + F_{R_\infty}^r \quad (3.4)$$

$$F_R^{t,z} = \frac{4[0.473(z/a) + 0.0172](R/c)}{(R/c)^4 + 0.43(z/a)} F_{R_{0.25}}^{t,z} \quad (3.5)$$

$$F_z^r = \frac{[49.536(z/a)^{-4.5} + 0.0225](R/c)^3}{(R/c)^5 + 2.15(z/a)^{-4.5}} F_{z_{0.25}}^r \quad (3.6)$$

(注意文献[5]中遗漏了(3.5)式中的因子4)。这些公式中的下标0, 0.25和 ∞ 分别表示 $R=0$, 0.25和 $R \rightarrow \infty$ 时的值, 一般随 z 与 a 而变, 将在下面(3.15)~(3.25)式给出。这些公式是根据 $a/c=0.5$ 时的近场数值解^[5]和远场渐近值^[7]拟合出来的。因为对于其余的 a/c 还没有任何数据, 我们假定只要把 $F_{R_0}^{t,R}$, $T_{\phi_0}^r$, $F_{R_0}^r$, $F_{R_{0.25}}^{t,z}$ 和 $F_{z_{0.25}}^r$ 换成相应的 a/c 下的值 (见 (3.25) 式

和表1~4), 上述各式对任意 a/c 近似成立。

对于(2.1)式中两个最重要的系数 $F_{z_0}^{i,z}$ 和 \bar{F}_z^i , 文献[5]所给的近似算法涉及数值积分, 不便应用, 而且与 $a/c=0.5$ 的原始数据符合的程度也不够满意。我们改由这些原始数据出发拟合为:

$$F_{z_0}^{i,z} = (F_{z_\infty}^{i,z} - F_{z_0}^{i,z}) \frac{(R/c)^{1.3}}{(R/c)^{1.3} + 0.335(z/a)^2} \cdot \left[1 - \operatorname{sech} \left(0.472 \frac{R}{c} \left(\frac{z}{a} \right)^{2.61} \right) \right] + F_{z_0}^{i,z} \quad (3.7)$$

$$\bar{F}_z^i = \frac{V_z}{V_{z_0}} F_z^i \quad (3.8)$$

$$F_z^i = (F_{z_\infty}^i - F_{z_0}^i) \frac{(R/c)^{3.5}}{(R/c)^{3.5} + 1.08(z/a)^{0.5}} \cdot \left[1 - \operatorname{sech} \left(3 \frac{R}{c} \left(\frac{z}{a} \right)^{2.6} \right) \right] + F_{z_0}^i \quad (3.9)$$

这里所以要对 F_z^i 拟合(而不对 \bar{F}_z^i 直接拟合), 是因为 $R \rightarrow \infty$ 时 $\bar{F}_z^i \rightarrow 0$ 而 F_z^i 趋近于 Dagan 等^[2]对于大圆盘情形所给出的有限值, 因而对 F_z^i 拟合更易于控制该力随 R 变化的快慢。在文献[5]中原来对 \bar{F}_z^i 和 \bar{T}_ϕ^i 是直接拟合的, 因为当 $R \rightarrow \infty$ 时 $\bar{F}_z^i = \bar{T}_\phi^i = 0$, 也有不易控制随 R 衰减快慢的缺点。在本文中, 我们参照球心处未扰动流体速度 V_R 定义

$$\bar{F}_z^i = \frac{V_R}{V_{z_0}} F_z^i \quad (3.10)$$

$$\bar{T}_\phi^i = \frac{V_R}{V_{z_0}} T_\phi^i \quad (3.11)$$

然后改对 F_z^i 和 T_ϕ^i 拟合。这样改写之后, 问题(4)中粒子受力 $F_R = 6\pi\mu V_R a F_z^i$ 。很显然, 在无界流体中应该有 $F_z^i = 1$ 。文献[5]的原始数据按(3.10)式换算后, 发现孔口附近的 F_z^i 值竟然小于1, 即 R 向受的力比无界流体中还小, 这在物理上是不合理的。造成这一误差的可能原因是: 在所取配点数目限制之下, 尽管大多数力和力矩系数均已收敛到准确值, 但在相互干扰很强的孔口附近, 自身数值很小的 \bar{F}_z^i 尚未收敛到准确值。为此, 我们根据物理上的考虑, 假设在对称轴上 $F_z^i = 1.0$, 而当 $R \rightarrow \infty$ 时 F_z^i 趋近于 Goldman 等^[7]关于球在平行于一平板的剪切流中的解(见下文(3.20)式), 参照文献[5]中原始数据的变化趋势, 引入如下的近似公式:

$$F_z^i = (F_{z_\infty}^i - 1.0) (1 - \exp[-(R/c)^2]) + 1.0 \quad (3.12)$$

对于 \bar{T}_ϕ^i , 在 $0 \leq R/c \leq 0.5$ 时采用文献[5]的公式(其中系数12.2原为12):

$$\bar{T}_\phi^i = \frac{[12.2(z/a)^{-0.5} + 0.0625](R/c)}{(R/c)^3 + 3(z/a)^{-0.5}} \bar{T}_{\phi,0.25}^i \quad (3.13)$$

用此式算出 $R/c=0.5$ 处的 \bar{T}_ϕ^i 值后, 按(3.11)式换算成 $T_{\phi,0.5}^i$, 用下式计算 $0.5 < R/c < \infty$ 的 T_ϕ^i 值:

$$T_{\phi}^{\ddagger} = (T_{\phi 0.5}^{\ddagger} - T_{\phi \infty}^{\ddagger}) \frac{0.25 + 0.5A + B}{(R/c)^2 + A(R/c) + B} + T_{\phi \infty}^{\ddagger} \quad (3.14)$$

式中

$$A = -3.65 \left(\frac{z}{a}\right)^{-1.07}, \quad B = 0.85 \left|\frac{z}{a} - 2.43\right|^{2.4} + 1.5$$

此式近场是根据文献[5]原始数据化为 T_{ϕ}^{\ddagger} 后拟合的, 远场渐近值 $T_{\phi \infty}^{\ddagger}$ 由文献[7]关于球在平行于一平板的剪切流中的解算出(原文定义的系数与此不同, 需换算, 结果见(3.21)式)。与文献[5]对比发现, 文献[5]所给 \bar{F}_R^{\ddagger} 和 $\bar{T}_{\phi}^{\ddagger}$ 随 R 衰减过慢, 用于粒子轨道计算会导致非常明显的反常偏差。

在(3.2)~(3.14)各式中出现的各系数远场渐近值, 分别取自球在无穷大平壁或大圆盘附近的精确解, 都是用级数解或数值表给出的^{[2][7][8]}。为便于计算, 我们全部用代数公式加以拟合如下:

$$F_{R \infty}^{\ddagger} = \begin{cases} f_1(-0.53543, 0.11213, 1.065) - 1.0, & (z/a > 1.5) \\ f_1(14.32435, -14.68726, 0.025) - 1.0, & (1 < z/a \leq 1.5) \end{cases} \quad (3.15)$$

$$T_{\phi \infty}^{\ddagger} = \begin{cases} f_1(0.01974, -0.07655, 0.53) - 1.0, & (z/a > 1.5) \\ f_1(2.40187, -2.40932, 0.068) - 1.0, & (1 < z/a \leq 1.5) \end{cases} \quad (3.16)$$

$$F_{R \infty}^{\ddagger} = \begin{cases} 0, & (z/a > 4) \\ f_1(-0.01321, 0.02243, 0.43), & (1.1 \leq z/a \leq 4) \\ f_1(-0.67253, 0.65597, 0.075), & (1 < z/a < 1.1) \end{cases} \quad (3.17)$$

$$F_{R \infty}^{\ddagger} = f_2(-1.14 + 0.975) - 1.0, \quad (z/a > 1) \quad (3.18)$$

$$F_{R \infty}^{\ddagger} = f_3(0.044446, 0.476457, -0.164958) + 1.0, \quad (z/a > 1) \quad (3.19)$$

$$F_{R \infty}^{\ddagger} = f_2(0.701, 1.08) + 1.0, \quad (z/a > 1) \quad (3.20)$$

$$T_{\phi \infty}^{\ddagger} = [f_1(0.01047, -0.06733, 0.85) + 1.0] / \left(2 \frac{z}{a}\right), \quad (z/a > 1) \quad (3.21)$$

式中所用函数有三种形式:

$$f_1(a, b, c) = \frac{a}{\left(\frac{z}{a} - 1\right)^a} + \frac{b}{\left(\frac{z}{a} - 1\right)^{2a}} \quad (3.22)$$

$$f_2(a, b) = \frac{a}{\left(\frac{z}{a} - 1\right)^b} \quad (3.23)$$

$$f_3(a, b, c) = \left[a \left(\frac{z}{a}\right)^2 + b \left(\frac{z}{a}\right) + c \right]^{-1} \quad (3.24)$$

这里 z 是球心距平板(或大圆盘)的距离。这些拟合公式的精度较高, 在有实用意义的 z/a 范围内相对误差一般不超过1%, 偶然达到3%, 而(3.20), (3.21)式的相对误差都在0.1%以内。

在(3.2)~(3.13)式中所出现的下标为0或0.25的各系数值都取自严宗毅等^[5]的计算结

果。为了计算方便, 本文分别对于 $a/c=0.1, 0.5$ 和 5.0 拟合成下列形式:

$$F_i = f_s(a_i, b_i, c_i) + d_i \quad (3.25)$$

这里 F_i 和 d_i 的含义见表1, 对不同 a/c 给出的 a_i, b_i, c_i 值分别见表2至表4。这些拟合公式在有实用意义的 z/a 范围内相对误差都小于1%, 其中不少公式的误差小于0.1%, 甚至0.01%。用本节的全部近似公式所算出的(2.1)式中十二个系数, 对 $a/c=0.5$ 的情形与文献[5]的原始数据相比, 最大误差一般不超过5%。(3.25)式是对 $z/a < 10$ 拟合的, 当 $z/a > 15$ 时, 不再用拟合公式计算, 可直接令(3.25)式中 $f_s(a_i, b_i, c_i) = 0$ 。

表1 (3.25)式中 F_i 和 d_i 的含义

i	1	2	3	4	5	6	7	8
F_i	$F_{R0}^{1,r}$	$T_{\phi 0}^r$	F_{R0}^r	$F_{z_0}^{1,z}$	$F_{z_0}^s$	$F_{R0,25}^{1,z}$	$F_{z_0,25}^r$	$T_{\phi 0,25}^s$
d_i	-1.0	-1.0	0	-1.0	1.0	0	0	0

表2 $a/c=0.5$ 时(3.25)式中的 a_i, b_i, c_i 值

i	z/a	a_i	b_i	c_i
1	$z/a > 1.5$	-0.089174	-1.384825	-0.345129
	$0 \leq z/a \leq 1.5$	-0.631300	0.066646	-1.299852
2	$z/a > 2.0$	0	0	0
	$1.0 < z/a \leq 2.0$	0	0	-100.000
3	$z/a > 1.0$	8.641935	-10.437434	20.438071
	$0 \leq z/a < 1.0$	199949.578	-299931.026	100000.000
4	$z/a > 1.1$	-0.088260	0.283129	-2.851112
	$0 \leq z/a < 1.1$	0.040360	0.473943	-3.221236
5	$z/a \geq 2.0$	0.111174	-0.77921	5.04228
	$0 \leq z/a < 2.0$	1.613128	-7.020789	11.522982
6	$z/a \geq 1.5$	85.63075	-236.00669	198.93484
	$1.0 < z/a < 1.5$	33.87522	-54.97763	43.76569
	$0 \leq z/a \leq 1.0$	199946.689	-299923.962	100000.000
7	$z/a \geq 1.5$	512.09995	-1548.79008	1334.89467
	$1.0 < z/a < 1.0$	-231.05259	738.83366	-424.44773
	$0 \leq z/a < 1.0$	84.59597	-35.98486	34.72222
8	$z/a \geq 1.1$	15.38796	-25.92461	31.59229
	$0 \leq z/a < 1.1$	7.26059	2.23109	10.71629

表3 $a/c=0.1$ 时(3.25)式中的 a_i, b_i, c_i 值

i	z/a	a_i	b_i	c_i
1	$z/a \geq 1.1$	-0.12367	0.24411	-10.07665
2	$z/a \geq 1.1$	0	0	0
3	$z/a \geq 2.0$	40.42179	-485.41498	2083.26307
	$1.1 \leq z/a < 2.0$	54.72151	-656.76795	2463.92874
4	$z/a \geq 1.1$	0.02295	0.09694	-20.04138
5	$z/a \geq 1.1$	-0.03195	-0.22683	23.34843
6	$z/a \geq 2.0$	9.94392	-97.02385	410.75974
	$1.1 \leq z/a < 2.0$	57.92040	-348.22209	722.43563
7	$z/a \geq 1.1$	111.92040	-352.74175	1434.83948
8	$z/a \geq 1.1$	1.51441	-2.88066	43.94205

表 4

 $a/c=5.0$ 时(3.25)式中的 a_i, b_i, c_i 值

i	z/a	a_i	b_i	c_i
1	$z/a \geq 1.1$	0.01752	-2.29503	1.19888
2	$z/a \geq 1.1$	-46.29633	95.37041	-55.55556
3	$z/a \geq 1.1$	8.22419	-5.22776	-0.34873
4	$z/a \geq 1.1$	-0.00320	-0.84109	0.80328
5	$z/a \geq 2.0$	0.00570	0.93783	-1.09788
	$1.1 \leq z/a < 2.0$	0.61041	-1.22919	0.81449
6	$z/a \geq 1.1$	40522.876	-98496.733	59901.962
7	$z/a \geq 1.1$	-78571.431	215000.005	-140714.289
8	$z/a \geq 1.1$	1000.0	0	0

四、结果与讨论

我们采用上述力和力矩系数,对于 $0.1 \leq a/c \leq 5.0$ 计算了中性悬浮在流体中的粒子由远处以不同入射角 θ 逼近孔口时的轨道。假设粒子浓度不高,粒子与粒子间的相互干扰可忽略不计。

为了验证上节各系数公式的可靠性,我们首先与 Dagan 等^[2]的实验结果对比。他们的实验装置是一个 $18 \times 18 \times 82$ 吋的玻璃容器,中间一块平板把其中流体分成上下两部分,通过一小圆孔相通。圆孔直径 $1 \frac{1}{8}$ 吋,长2吋。实验用的小球与流体密度相近,球直径 $\frac{1}{2}$ 吋。打

开容器下方的阀门,使小球从孔上方不同位置开始下落,用摄影机跟踪拍摄下它的位置,就得到图2中的实验点。受光学误差的限制,摄影只能跟踪到 $z/a > 1$ 。图2中的实线是我们算出的 $a/c=0.444$ 的粒子轨道,虚线表示未受粒子扰动的流线。图中 $z=0, 0 \leq R/c \leq 1$ 是孔口, $z=0, R/c > 1$ 是壁面。可以看到,除非粒子很靠近壁面,轨道与流线几乎重合。当粒子靠近物面时,由于 F_z^* 迅速增大而使粒子轨道急剧向轴方面偏转,转向平行于壁面的方向。对入射角 θ 较大的情形,直到 $z/a \rightarrow 1$ 时粒子轨道始终与流线接近。图中我们算出的理论轨道与实验点完全一致,而 Dagan 等^[2]算出的 $\theta=45^\circ$ 的轨道(图中用点划线表示)在 $z/a < 2$ 的区域与实验观测有明显偏差。这是因为在他们的理论计算中忽略了旋转效应和孔口影响的缘故。我们所采用的完整的力和力矩系数使我们的解克服了上述缺陷,在孔口附近也能算出正确的轨道。

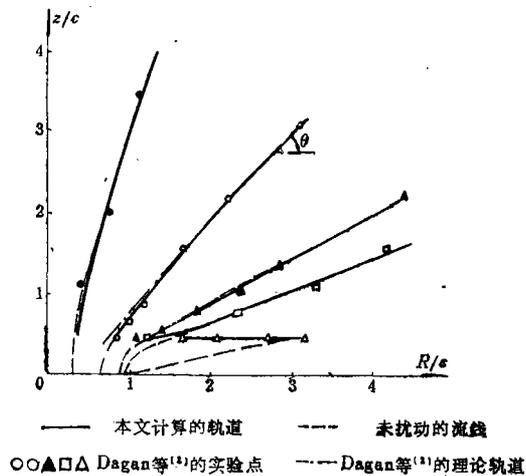
图 2 $a/c=0.444$ 的粒子轨道

图3~5画出了我们对不同大小粒子算出的轨道(实线)和相应的未扰流线。当粒子尺寸比孔小得多时,只有对非常小的入射角 θ ,粒子轨道才偏离未扰流线,而当粒子尺寸比孔大得多时,甚至以 $\theta=70^\circ$ 的大入射角逼近孔,在 $z/a < 2$ 时轨道也显著偏离未扰流线。在这三幅

图中还画出了 $V_x/V_{z0}=0.001$ 和 -0.001 的情形, 分别相当于球的密度 ρ_s 略大或略小于流体密度 ρ 时重力与浮力合力的影响。在 Dagan 等^[2]的实验中, 为了消除这一影响, 曾事先测过小球的定常沉降速度 V_s , 只选用 $V_s < 1\text{mm/min}$ 的小球。整个实验进行时间控制在3分钟以内。

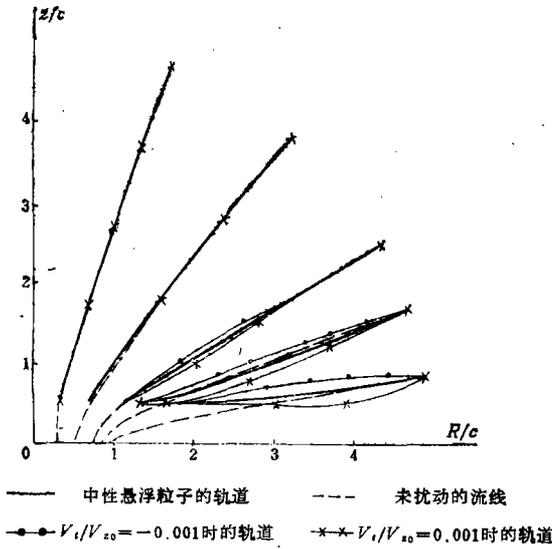


图3 $a/c=0.5$ 的粒子轨道

他们认为这时忽略重力的影响可不致带来显著误差。按上述数据估算, 大约相当 $V_s/V_{z0} < 0.001$ 。如图3和图4所示, 当 $a/c \leq 0.5$ 时, 除了非常靠近壁面处 $\rho_s < \rho$ 时略有影响之外, 在上述密度偏差范围内, 确可忽略重力/浮力的影响, 但对于大粒子(图5), 同样的 V_s/V_{z0} 却可能导致轨道显著的偏差, 尤其当 $\rho_s < \rho$ 时和粒子靠近壁面时影响更大。注意(2.3)式, V_s 正比于 a^2 , 对于大粒子而言, 细微的密度偏差 $\rho_s - \rho$ 就可能引起相当大的 V_s/V_{z0} 。因此, 如果选用大粒子做中性悬浮实验, 务必对粒子密度提出很高的要求。一般说来, 如果

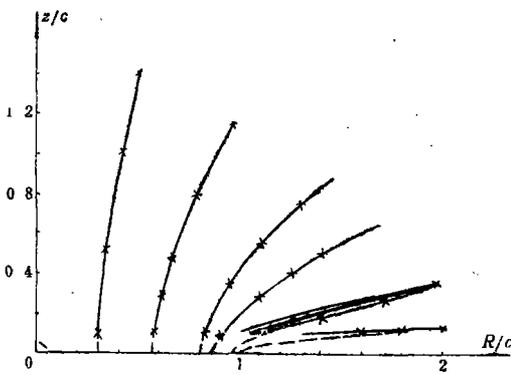


图4 $a/c=0.1$ 的粒子轨道(符号同图3)

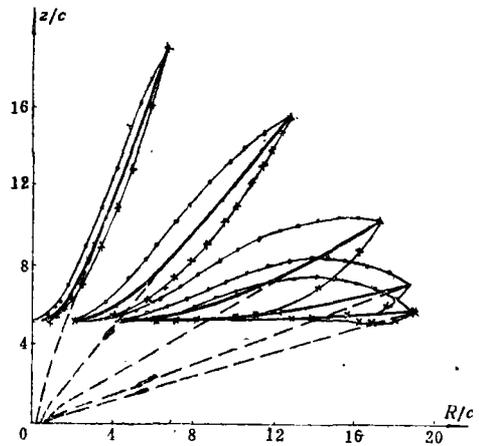


图5 $a/c=5.0$ 的粒子轨道(符号同图3)

ρ_s 不能控制得很准的话, 宁可让 ρ_s 略大于 ρ , 这时引起轨道的偏差较 $\rho_s < \rho$ 时小些。

图6和图7对于中等大小粒子分别画出了粒子速度 U_R, U_x 和流体速度 V_R, V_x 随 z/a 和 R 的变化。当粒子向孔口运动时, 由 $z/a=2$ 开始, $|U_x|$ 已变得小于 $|V_x|$; 而直到 $z/a=1.1$ 处, U_R 仍与 V_R 相差无几。只有 z/a 继续减小时, U_x 和 U_R 才都显著偏离 V_x, V_R 。但是靠近壁面远离孔口的地方($R/c > 1.5$), 粒子速度与流体速度相差不大。在图7上还画出了粒子的旋转角速度 Ω 。由图看出, Ω 的大小与 z/a 关系很大, 在 $z/a=1.1$ 左右旋转效应最强。最大角速度产生在孔口边缘附近。靠近壁面而离孔口较远的地方($R/c > 1.5$), 有 $\Omega a/U_R \rightarrow 1$, 说明该处粒子几乎无滑移地沿壁面滚动。对于孔口附近, 旋转效应也不可忽略。图8和图9分别画出了小粒子和大粒子的 U_R, V_R 和 Ω 。在 $z/a=1.1$ 处, 孔口附近小粒子的 $U_R > V_R$, 而大粒子的 $U_R < V_R$, 都与图7中等粒子的情形不同。对于大粒子, 在壁面附近远离孔口处(例如对 $a/c=$

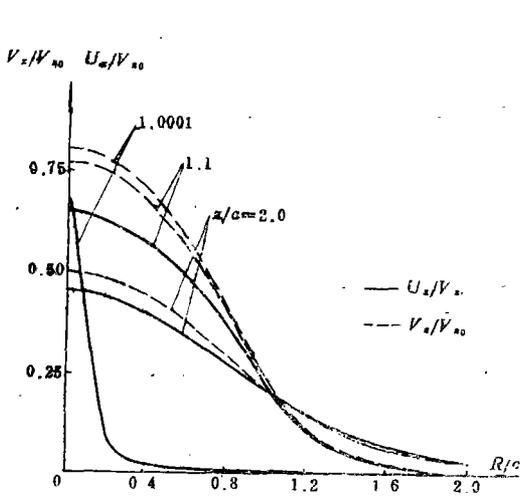


图 6 $a/c=0.5$ 时的粒子和流体 z 向速度

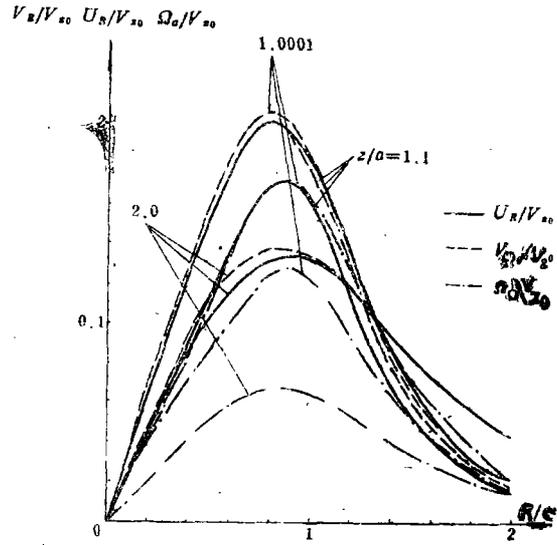


图 7 $a/c=0.5$ 时的粒子和流体 R 向速度

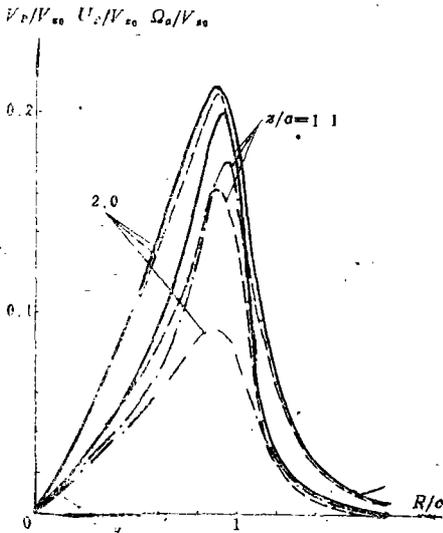


图 8 $a/c=0.1$ 时的粒子和流体 R 向速度
(符号同图7)

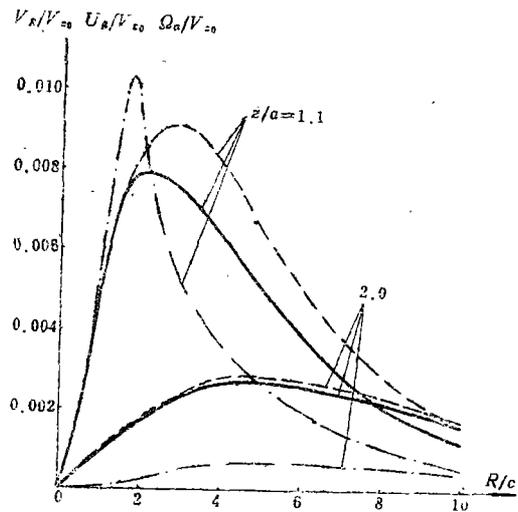


图 9 $a/c=5.0$ 时的粒子和流体 R 向速度
(符号同图7)

5.0, 当 $R/c=40$ 时), Ωa 只能达到 U_R 的一半左右, 说明大粒子除了沿壁面滚动之外, 还有相当明显的滑移。

将流场中不同位置上各力和力矩系数的数值代入(2.2)式的各行列式, 舍弃不重要的项, 并利用(2.4)式, 我们得到下列近似公式:

$$\frac{dR}{dz} = \frac{U_R}{U_z} \approx \frac{F_R^{1'2} \bar{F}_R^2}{F_R^{1'R} \bar{F}_R^2} - \frac{F_R^{1'z} F_R^z T_\phi^z}{F_R^{1'R} \bar{F}_R^2 T_\phi^z} - \frac{F_R^{1'z}}{F_R^{1'R}} \quad (4.1)$$

$$\frac{\Omega a}{U_R} \approx -\frac{T_\phi^z}{T_\phi^z} + \frac{\bar{F}_R^z T_\phi^{1'R}}{F_R^{1'R} T_\phi^z} + \frac{\bar{F}_R^z T_\phi^{1'z}}{F_R^{1'z} T_\phi^z} \quad (4.2)$$

据估算, 对于流场中任意位置, 舍弃的项的贡献一般不足1%, 在(4.1)式中, 第一项表示流体的流动带动粒子运动, 第二项表示粒子的旋转引起它在 R 方向漂移, 第三项表示粒子沿 z

方向运动时受到 R 向的侧向力所引起的漂移。对于整个流场, 第一项是最主要的。利用(3.8)和(3.10)式, 第一项可改写为 $\left(\frac{F_{z,z}^{1,2} F_{R,z}^{1,2}}{F_{R,z}^{1,2} F_{z,z}^{1,2}}\right) \frac{V_R}{V_z}$, 当粒子远离孔口和壁面时, 括号中因子趋近于1, 所以 $U_R/U_z \rightarrow V_R/V_z$, 粒子轨道变得与未扰流线一致。第三项仅当粒子靠近孔口边缘时才需要计入, 对 $a/c=0.5$ 时它对 U_R/U_z 的贡献最大可达4%, 而对 $a/c=5.0$ 而言此项可在全流场忽略不计。第二项在靠近孔壁的区域以及孔口附近都需加以考虑(注意 $z/a \rightarrow 1$ 时 $F_{z,z}^{1,2} \rightarrow \infty$), 对于 $a/c=0.5$ 和 5.0 时, 它对 U_R/U_z 的最大贡献分别达9%和17%。在(4.2)式中, 第一项表示流体的剪切引起粒子旋转, 第二项表示由于粒子沿 R 向平移引起的旋转, 第三项则表示由于粒子沿 z 向平移而引起的旋转。除了靠近孔轴的区域外, 第一项的贡献是主要的。但对于大粒子在孔轴附近(例如 $a/c=5.0$, $R/c=0.5$ 时), 旋转主要由粒子沿 R 向平移引起(注意这时 Ω 本身很小)。在靠近壁面的区域, 第二项的贡献最大可达百分之十几。在孔边缘附近的局部区域, 第三项的贡献最大也可达百分之十几。

由以上的分析可知, 对于计算粒子轨道而言, 最重要的数据是 $F_{z,z}^{1,2}$, $F_{R,z}^{1,2}$, \bar{F}_z 和 \bar{F}_R (表示流体带动), 在壁面和孔口附近还需要知道 $F_{R,z}^{1,2}$, \bar{T}_z 和 T_z (旋转), 在靠近孔口边缘的局部区域需要知道 $F_{z,z}^{1,2}$ (侧向力)。对于计算粒子的旋转角速度而言, 最重要的是 \bar{T}_z 和 T_z (流体剪切), 在壁面和孔口附近还需要知道 \bar{F}_R , $F_{R,z}^{1,2}$, $T_z^{1,2}$ (R 向平移), 在靠近孔口边缘的局部区域需要知道 \bar{F}_z , $F_{z,z}^{1,2}$, $T_z^{1,2}$ (z 向平移)。系数 $F_{R,z}^{1,2}$ 和 $F_{z,z}^{1,2}$ 在全流场是不重要的。

五、结 束 语

本文以严宗毅等^[5]对 $a/c=0.5$ 算得的力和力矩系数的有限个离散数据为基础, 给出了适用于不同粒子大小的全部十二个系数的近似解析表达式, 其中 $F_{z,z}^{1,2}$, \bar{F}_z , \bar{F}_R , \bar{T}_z 等都是重新拟合的, 比文献[5]建议的更为方便准确。这些系数用于计算粒子入孔运动, 得到了与实验结果一致的轨道。本文还根据各系数在不同区域的相对重要性, 建议了计算轨道和旋转角速度的简化公式(4.1)和(4.2), 指出: 在靠近孔口和壁面之处, 必须计及粒子的旋转运动, 在靠近孔口边缘的局部区域, 必须考虑侧向力效应。

本文还讨论了不同大小粒子入孔时轨道、速度和旋转角速度的差异, 指出大粒子的重力和浮力影响远比小粒子重要。

本文所给出的力和力矩系数公式可为任何涉及粒子入孔的问题提供必不可少的输入数据。在本文以前, Dagan 等^[2]分析过悬浮液入孔时溶质粒子向孔边缘集中的现象, 解释了血液微循环的 Fåhræus 效应; 严宗毅等^[4]分析过生物膜孔内外溶质的对流和扩散, 揭示了跨膜渗透现象的细微结构; 王永安等^[3]分析了多孔滤膜对于溶质分子的收集效率。这些工作所用的力和力矩系数都是远比本文粗糙的近似值, 有的因素(如旋转、侧向力)未加考虑或考虑得不充分。这些问题中的某些定量结果(如滤膜的收集效率)对于孔口附近力和力矩系数的精度要求颇高。毫无疑问, 本文的公式为更细致地研究这些问题和其它类似问题提供了良好的前提。

本文的力和力矩系数是在文献[5]有限个离散数据基础上推广的, 其中 \bar{F}_z 的原始数据尚嫌精度不够高, 对于小粒子、大粒子以及中远场的推广方式也有待于进一步的实验或理论结果来检验。尽管如此, 我们相信, 在没有更完善的数据之前, 本文的公式应能满足一般工程计算的需要。

参 考 文 献

- [1] Dagan, Z., S. Weinbaum and R. Pfeffer, *J. Fluid Mech.*, **122** (1982), 273.
 [2] Dagan, Z., S. Weinbaum and R. Pfeffer, *Chem. Eng. Sci.*, **38** (1983), 4.
 [3] Wang, Y., (王安) J. Kao (高如南), S. Weinbaum and R. Pfeffer, *Chem. Eng. Sci.*, **41** (1986), 2845.
 [4] Yan, Z. (严宗毅), S. Weinbaum and R. Pfeffer, *J. Fluid Mech.*, **162** (1987), 415.
 [5] Yan, Z. (严宗毅), S. Weinbaum G. Ganatos and R. Pfeffer, *J. Fluid Mech.*, **174** (1987), 39.
 [6] Happel, J. and H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, 2nd ed., Noordhoff (1973).
 [7] Goldman, A. J., R. G. Cox and H. Brenner, *Chem. Eng. Sci.*, **22** (1967), 637.
 [8] Brenner, H., *Chem. Eng. Sci.*, **16** (1961), 242.

The Motion of a Spherical Particle in the Stokes Flow Outside a Circular Orifice

Shan Hui-xian

(Department of Mathematics, The Affiliated College of Peking University, Beijing)

Yan Zong-yi

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)

Abstract

For any study of a suspension entering a pore, the knowledge of the force and moment exerted on a solute particle in an arbitrary position outside the pore is essential. This paper for the first time presents approximate analytical expressions (in closed form) of all the twelve force and moment coefficients for a sphere outside a circular orifice, on the basis of a number of discrete data computed by Yan *et al.* (1987). These coefficients are then applied to calculate the trajectory and angular velocity of a spherical particle approaching the pore at zero Reynolds number. The trajectory is in excellent agreement with the available experimental results. An analysis of the relative importance of the coefficients shows that the rotation effect cannot be neglected near the pore opening or near the wall, and that the lateral force effect must be taken into account in the neighborhood of the edge of the pore opening. It is due to neglecting these factors that previous theoretical results deviate from the experimental ones near the pore opening. The effects of the ratio of the particle to pore radii as well as the influences of the gravity/buoyance on the particle trajectory, velocity distribution and rotation are discussed in detail. It is pointed out that in the experiments of neutrally-buoyant suspensions, the restriction on the density of the particle is most demanding for a large particle size. The expressions of forces and moments presented herein are complete, relatively accurate and convenient, thus providing a good prerequisite for further studies of any problems involving the entrance of particles to a pore.