应用数学和力学，第10卷第9期（1989年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

SRLW方程的Fourier拟谱方法

郑家栋　张汝芬　郭本瑜

（上海计算技术研究所）　（上海科技大学）

（戴世强推荐，1988年8月24日收到）

摘　要

本文研究用带抑制算子的 Fouıier 拟谱方法求解 SRLW 方程，我们证明格式的稳定性，并给出最佳误差估计.

一、记号和问题

考虑周期初值问题:

$$\left(\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\beta\right)\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho+\frac{u^2}{2}\right)=f_1 \qquad (-\infty<x<\infty,\ t>0) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\gamma\frac{\partial u}{\partial x}=f_2 \qquad (-\infty<x<\infty,\ t>0) \tag{1.2}$$

$$u(x,t)=u(x+1,t) \qquad (-\infty<x<\infty,\ t\geqslant 0) \tag{1.3}$$

$$\rho(x,t)=\rho(x+1,t) \qquad (-\infty<x<\infty,\ t\geqslant 0) \tag{1.4}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ \rho(x,0)=\rho_0(x) \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{1.5}$$

这里α，β，γ为正的常数，而f_1，f_2是充分光滑的已知函数．方程组(1.1)～(1.5)描述了多种非线性波，称为SRLW 方程．文[6]讨论了它的守恒律并得到某些数值结果，最近文［3］讨论了方程解的规则性，得到了谱解法的误差估计．本文讨论一种带抑制算子的 Fourier 拟谱解法，证明了半离散格式和全离散格式的广义稳定性并给出最佳误差估计．

设$I=(0,1)$，$L^2(I)$的内积为$(\cdot,\cdot)$，范数为$\|\cdot\|$．对任何正整数n，$H^n(I)$的半范和范数分别用$|\cdot|_n$和$\|\cdot\|_n$表示，设$C_p^\infty(I)$是定义在R上的周期为1的无穷可微函数的集合，$H_p^n(I)$是$C_p^\infty(I)$在$H^n(I)$中的闭包．对任何实$\sigma>0$，定义$H_p^\sigma(I)$为$H_p^{[\sigma]}(I)$和$H_p^{[\sigma+1]}(I)$之间的复插值，这里$[\sigma]$表示小于σ的最大整数．

设A是Banach空间．$L^\infty(0,T;A)$是从$[0,T]$到A的强连续函数集合，其函数满足

$$\|u\|_{L^2(0,T;A)}=\left(\int_0^T \|u(t)\|_A^2 dt\right)^{1/2}<\infty$$

对任何正整数N，令

$$V_N=\text{span}\{\exp[2\pi ikx],\ |k|\leqslant N\}$$

且设$\dot{V}_N$为V_N中实值函数构成的子空间。

设$h=1/(2N+1)$是变元x的网格步长，$x_j=jh\quad(j=0,1,\cdots,2N)$，$V_N$的离散内积和范数定义为

$$(u,v)_N=h\sum_{j=0}^{2N}u(x_j)v(x_j)\ ,\quad \|u\|_N=(u,u)_N^{1/2}$$

设$P_N:L^2(I)\to V_N$是正交投影算子且$P_C:C(I)\to V_N$是插值算子，使得

$$P_Cu(x_j)=u(x_j)\qquad(0\leqslant j\leqslant 2N)$$

文[5]指出

$$P_Cu=\sum_{|k|\leqslant N}a_k\exp[2\pi ikx]$$

这里$(u(x_0),\ \cdots,\ u(x_{2N}))$和$(a_{-N},\ \cdots,\ a_0,\ \cdots,\ a_N)$是离散 Fourier 变换对。并有下列逼近误差估计：

$$\|P_Nu-u\|_\mu\leqslant cN^{\mu-\sigma}|u|_\sigma\qquad(0\leqslant\mu\leqslant\sigma;\ \forall u\in H_p^\sigma(I))\tag{1.6}$$

$$\|P_Cu-u\|_\mu\leqslant cN^{\mu-\sigma}|u|_\sigma\qquad\left(0\leqslant\mu\leqslant\sigma;\ \sigma>\frac{1}{2};\ \forall u\in H_p^\sigma(I)\right)\tag{1.7}$$

及反不等式：

$$\|u\|_\sigma\leqslant cN^{\mu-\sigma}\|u\|_\mu\qquad(0\leqslant\mu\leqslant\sigma;\ \forall u\in V_N)\tag{1.8}$$

今设

$$u=\sum_{|k|\leqslant N}\exp[2\pi ikx]$$

$$v=\sum_{|k|\leqslant N}\exp[2\pi ikx]$$

且定义循环卷积

$$u*v=\sum_{|k|\leqslant N}\ \sum_{|l|\leqslant N}a_lb_{k-l}\exp[2\pi ikx]$$

这里$a_{k+2N+1}=a_k$，$b_{k+2N+1}=b_k$，文[4]指出

$$P_C(u\cdot v)=u*v\qquad(\forall u,\ v\in V_N)$$

$$(u*w,v)=(u,w*v)\qquad(\forall u,v\in V_N;\ \forall w\in\dot{V}_N)$$

为了合理地逼近非线性项uu_x，我们定义算子$J_C:V_N\times V_N\to V_N$为

$$J_C(u,v)=\frac{1}{3}u_x*Rv+\frac{1}{3}(u*Rv)_x\qquad(\forall u,v\in\dot{V}_N)$$

这里

$$Rv=\sum_{|k|\leqslant N}\left(1-\left(\frac{|k|}{N}\right)^\nu\right)b_k\exp[2\pi ikx]\qquad(\nu\geqslant 1)$$

称为抑制算子。文[4]已证明下述引理：

引理 1 若 $u,v\in V_N$ 且 $w\in\hat{V}$，则

$$(J_C(u,v),w)+(J_C(w,v),u)=0 \tag{1.9}$$

引理 2 对任何 $0\leqslant\mu\leqslant\sigma\leqslant\nu$ 成立

$$\|Ru-u\|_\mu\leqslant cN^{\mu-\sigma}|u|_\sigma \qquad (\forall u\in V_N) \tag{1.10}$$

$$\|RP_Nu-u\|_\mu\leqslant cN^{\mu-\sigma}|u|_\sigma \qquad (\forall u\in H_p^\sigma(I)) \tag{1.11}$$

引理 3 对任何 $\varepsilon>0$，若 $w\in H_p^{3/2+\varepsilon}(I)$，则

$$|(u_x*Ru,w)|\leqslant c_\varepsilon\nu\|w\|_{3/2+\varepsilon}\|u\|^2 \qquad (\forall u\in V_N) \tag{1.12}$$

二、格式和主要理论结果

方程(1.1)～(1.5)的半离散拟谱方法是求u_C，$\rho_C\in\hat{V}_N$使满足

$$\partial_t(\alpha u_{Cxx}-\beta u_C)-\rho_{Cx}-J_C(u_C,u_C)=\hat{f}_1 \qquad (-\infty<x<\infty,\ t>0) \tag{2.1}$$

$$\partial_t\rho_C+\gamma u_{Cx}=\hat{f}_2 \qquad (-\infty<x<\infty,\ t>0) \tag{2.2}$$

$$u_C(x,0)=P_Cu_0(x) \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{2.3}$$

$$\rho_C(x,0)=P_C\rho_0(x) \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{2.4}$$

这里 $\partial_t=\dfrac{d}{dt}$，$u_{Cx}=\dfrac{\partial u_C}{\partial x}$，$\hat{f}_1=P_Cf_1$，$\hat{f}_2=P_Cf_2$。

方程(1.1)～(1.5) 的全离散拟谱方法是求 u_C^k，$\rho_C^k\in\hat{V}_N$ $(1\leqslant k\leqslant[T/\tau])$使满足

$$\begin{aligned}&\alpha u_{Cxxt}^k-\beta u_{Ct}^k-\rho_{Cx}^k-\delta_1\tau\rho_{Cxt}^k\\&\qquad -J_C(u_C^k+\delta_2\tau u_{Ct}^k,u_C^k)=f_1^k \qquad (-\infty<x<\infty,\ 1\leqslant k<[T/\tau])\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\rho_{Ct}^k+\gamma u_{Cx}^k+\gamma\delta_3\tau u_{Cxt}^k=f_2^k \qquad (-\infty<x<\infty,\ 1\leqslant k\leqslant[T/\tau]) \tag{2.6}$$

$$u_C^0=P_Cu_0 \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{2.7}$$

$$\rho_C^0=P_C\rho_0 \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{2.8}$$

这里δ_1，δ_2，δ_3是正的常数，$f_i^k=P_Cf_i(x,k\tau)$ $(i=1,2)$，τ 是变元 t 的网格步长，而

$$u_{Ct}^k=\frac{1}{\tau}(u_C^{k+1}-u_C^k)$$

现在陈述本文主要理论结果，首先，考虑格式(2.1)～(2.3)的广义稳定性[2]。若 u_C 和 ρ_C分别有误差$\tilde{u}$和$\tilde{\rho}\in V_N$，而(2.1)，(2.2)右端的误差分别为$\tilde{f}_1$，$\tilde{f}_2$，则$\tilde{u}$，$\tilde{\rho}$满足

$$\partial_t(\alpha\tilde{u}_{xx}-\beta\tilde{u})-\tilde{\rho}_x-J_C(\tilde{u},u_C+\tilde{u})-J_C(u_C,\tilde{u})=\tilde{f}_1 \tag{2.9}$$

$$\partial_t\tilde{\rho}+\gamma\tilde{u}_x=\tilde{f}_2 \tag{2.10}$$

定理 1 若 $\varepsilon>0$，则存在依赖于 α，β，ε，ν 和 $\|u_C\|_{L^\infty(0,T;H^{3/2+\varepsilon})}$ 的常数 $c>0$ 使对任何 $t\leqslant T$ 有

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}\|_1^2+\|\tilde{\rho}\|^2\leqslant\exp[ct]\{&\|\tilde{u}(0)\|_1^2+\|\tilde{\rho}(0)\|^2\\&+\int_0^T(\|\tilde{f}_1(s)\|^2+\|\tilde{f}_2(s)\|^2)ds\}\end{aligned} \tag{2.11}$$

下面考虑半离散拟谱方法的收敛性。

定理 2 若$u_0\in H_p^\sigma(I)$且$\rho_0\in H_p^{\sigma-1}(I)$，$\nu\geqslant\sigma>2$，则存在与$\alpha$，$\beta$，$\sigma$，$\nu$及$\|u\|_{L^\infty(0,T;H^\sigma)}$有关的常数$c>0$使对任何$t\leqslant T$

$$\|u_C(t)-u(t)\|_1+\|\rho_c(t)-\rho(t)\|\leqslant cN^{1-\sigma} \tag{2.12}$$

现在考虑格式(2.5)～(2.8)的广义稳定性。设u_C^k和ρ_C^k分别有误差$\tilde{u}_C^k$和$\tilde{\rho}_C^k$，而(2.5)，(2.6)右端的误差分别为$\tilde{f}_1$，$\tilde{f}_2$，则我们有

$$\alpha\tilde{u}_{\bar{x}xt}^k-\beta\tilde{u}_t^k-\tilde{\rho}_x^k-\delta_1\tau\tilde{\rho}_{xt}^k-J_C(\tilde{u}^k+\delta_2\tau\tilde{u}_t^k,\ u_C^k+\tilde{u}^k)$$
$$-J_C(u_C^k+\delta_2\tau u_{Ct}^k,\ \tilde{u}^k)=\tilde{f}_1^k \tag{2.13}$$
$$\tilde{\rho}_t^k+\gamma\tilde{u}_x^k+\gamma\delta_3\tau\tilde{u}_{xt}^k=\tilde{f}_2^k \tag{2.14}$$

设

$$\rho^n=c(\|\tilde{u}^0\|_1^2+\|\tilde{\rho}^0\|^2+\tau\sum_{k=0}^{n-1}(\|\tilde{f}_1\|^2+\|\tilde{f}_2\|^2))$$

$$E^n=\|\tilde{u}^n\|_1^2+\|\tilde{\rho}^n\|^2+\alpha_0\tau^2\sum_{k=0}^{n-1}(\|\tilde{u}_t^k\|_1^2+\|\tilde{\rho}_t^k\|^2)$$

这里c，α_0是正的常数。

定理 3 考虑方程(2.5)～(2.6)，若$\delta_1=\gamma\delta_3$，$\delta_2>1/2$和$\varepsilon>0$，则存在依赖于α，β，ε，ν和$u_C\ {}_{3/2+\varepsilon}=\max\limits_k\|u_C^k\|_{3/2+\varepsilon}$的常数$c>0$使对任何$n\tau\leqslant T$有

$$E^n\leqslant\rho^n\exp[cT]$$

下述定理表述了全离散拟谱方法的收敛性。

定理 4 若$u_0\in H_p^\sigma(I)$和$\rho_0\in H_p^{\sigma-1}(I)(\nu\geqslant\sigma\geqslant2)$，则存在与$\alpha$，$\beta$，$\sigma$，$\nu$和$u$有关的常数$c>0$使当$\delta_1=\gamma\delta_3$，$\delta_2>1/2$时有估计

$$\|u_C^n-u(n\tau)\|\leqslant c\{\tau+N^{1-\sigma}\}$$

三、数值例子

现在讨论全离散拟谱格式的计算方面。设

$$u_C^k(x)=\sum_{|m|\leqslant N}a_m\exp[2\pi imx],\quad u_C^{k+1}(x)=\sum_{|m|\leqslant N}\tilde{a}_m\exp[2\pi imx]$$

$$\rho_C^k(x)=\sum_{|m|\leqslant N}b_m\exp[2\pi imx],\quad \rho_C^{k+1}(x)=\sum_{|m|\leqslant N}\tilde{b}_m\exp[2\pi imx]$$

则

$$J_C(u_C^{k+1},u_C^k)=\frac{1}{3}\sum_{|m|\leqslant N}\sum_{|m|\leqslant N}2\pi i(2m-n)a_n\tilde{a}_{m-n}\left(1-\left(\frac{|n|}{N}\right)^{\gamma_1}\right)\exp[2\pi imx]$$

将(2.5)～(2.6)与$\exp[2\pi imx]$作内积，得到

$$\frac{\delta_2\tau}{3}\sum_{|n|\leqslant N}2\pi i(2m-n)a_n\tilde{a}_{m-n}\left(1-\left(\frac{|n|}{N}\right)^{\gamma_1}\right)+(\beta+4\pi^2\alpha m^2)\tilde{a}_m+2\pi im\delta_1\tilde{b}_m$$

$$=(\beta+4\pi^2 am^2)a_m-\frac{(1-\delta_2)\tau}{3}\sum_{|n|<N}2\pi i(2m-n)a_n a_{m-n}\left(1-\left(\frac{|n|}{N}\right)^{\gamma_1}\right)$$

$$-2\pi\tau im(1-\delta_1)b_m-\tau f^k_{1m}\qquad(-N\leqslant m\leqslant N)\tag{3.1}$$

$$2\pi im\beta\gamma\delta_3\tau\tilde{a}_m+\tilde{b}_m=b_m-2\pi im\beta\gamma\tau(1-\delta_3)a_m+\tau f^k_{2m}\qquad(-N\leqslant m\leqslant N)\tag{3.2}$$

这里$f^k_{jm}=(f^k_j,\ \exp[2\pi im\cdot])$ $(j=1,2)$。设 f_{1m}，f_{2m} 分别表示(3.1) 和 (3.2) 的右端，则(3.1)和(3.2)可改写为

$$\frac{\delta_2\tau}{3}\sum_{|n|<N}2\pi i(2m-n)a_n\tilde{a}_{m-n}\left(1-\left(\frac{|n|}{N}\right)^{\gamma_1}\right)$$

$$+(\beta+4\pi^2 am^2+4\pi^2\tau^2 m^2\beta\delta_1\delta_3)\tilde{a}_m=f_{1m}-2\pi i\tau m\delta_1 f_{2m}$$

$$(-N\leqslant m\leqslant N)\tag{3.3}$$

$$\tilde{b}_m=f_{1m}-2\pi im\beta\gamma\delta_3\tau\tilde{a}_m\qquad(-N\leqslant m\leqslant N)\tag{3.4}$$

我们可由(3.3)得到$\tilde{a}_m$，然后由(3.4)得到$\tilde{b}_m$。

例 取

$$f_1=A[(4\beta+\alpha)\pi^2A^2\cos^2 2\pi x-(4\beta+\alpha)2\pi^2 A\sin 2\pi x-0.5\beta$$
$$-2A^2\pi\cos 2\pi x\exp(A\sin 2\pi x+0.5t)]\exp(A\sin 2\pi x+0.5t)$$

$$f_2=0$$

$$u_0=A\exp(A\sin 2\pi x)$$

$$\rho_0=-4\beta A^2\pi\cos 2\pi x\exp(A\sin 2\pi x)$$

方程(1.1)～(1.2)的解为

$$u=A\exp(A\sin 2\pi x+0.5t)$$

$$\rho=-4\pi\beta A^2\cos 2\pi x\exp(A\sin 2\pi x+0.5t)$$

计算在IBMPC/XT上进行，当$\alpha=\beta=1$时结果是满意的(见表1～3)，若α或β很小，则误差较大，当$\alpha=0.1\times10^{-6}$，误差曲线表示在图1中；对$\beta=0.1\times10^{-6}$，情况是类似的。

表 1　　在 T 时刻的 L^2 和 L^∞ 误差

$\tau=0.001$，$h=1/32$，$\alpha=\beta=\gamma=1$，$\gamma_1=5$，$A=1$，$\delta_1=\delta_2=\delta_3=0.5$

	T	L^2-误差	L^∞-误差
u	0.05	0.1562×10^{-3}	0.5397×10^{-4}
	0.25	0.8165×10^{-3}	0.2544×10^{-3}
	0.50	0.1697×10^{-2}	0.4623×10^{-3}
	0.75	0.2611×10^{-2}	0.6149×10^{-3}
	1.00	0.3523×10^{-2}	0.7094×10^{-3}
ρ	0.05	0.2543×10^{-4}	0.1400×10^{-5}
	0.25	0.6543×10^{-3}	0.3175×10^{-4}
	0.50	0.2694×10^{-2}	0.1116×10^{-3}
	0.75	0.6191×10^{-2}	0.2180×10^{-3}
	1.00	0.1115×10^{-1}	0.3326×10^{-3}

表 2　　在时刻 T 的 L^2 和 L^∞ 误差

$\tau=0.0025$, $h=1/16$, $\alpha=\beta=\gamma=1$, $\gamma_1=5$, $A=1$, $\delta_1=\delta_2=\delta_3=0.5$

	T	L^2-误差	L^∞-误差
u	0.05	0.2764×10^{-3}	0.1308×10^{-3}
	0.25	0.1443×10^{-2}	0.6188×10^{-3}
	0.50	0.3003×10^{-2}	0.1129×10^{-2}
	0.75	0.4620×10^{-2}	0.1508×10^{-2}
	1.00	0.6236×10^{-2}	0.1747×10^{-2}
ρ	0.05	0.4514×10^{-4}	0.2130×10^{-5}
	0.25	0.1160×10^{-2}	0.4836×10^{-4}
	0.50	0.4777×10^{-2}	0.1709×10^{-3}
	0.75	0.1098×10^{-1}	0.3362×10^{-3}
	1.00	0.1976×10^{-1}	0.5170×10^{-3}

表 3　　时刻 T 的 L^2 和 L^∞ 误差

$\tau=0.001$, $h=1/16$, $\alpha=\beta=\gamma=1$, $\gamma_1=5$, $A=1$, $\delta_1=\delta_2=\delta_3=0$

	T	L^2-误差	L^∞-误差
u	0.05	0.1908×10^{-3}	0.1116×10^{-3}
	0.25	0.1015×10^{-2}	0.5409×10^{-3}
	0.50	0.2160×10^{-2}	0.1020×10^{-2}
	0.75	0.3389×10^{-2}	0.1413×10^{-2}
	1.00	0.4658×10^{-2}	0.1706×10^{-2}
ρ	0.05	0.2531×10^{-3}	0.6120×10^{-5}
	0.25	0.6933×10^{-3}	0.2732×10^{-4}
	0.50	0.6429×10^{-3}	0.4270×10^{-4}
	0.75	0.3200×10^{-2}	0.1235×10^{-3}
	1.00	0.7759×10^{-2}	0.2092×10^{-3}

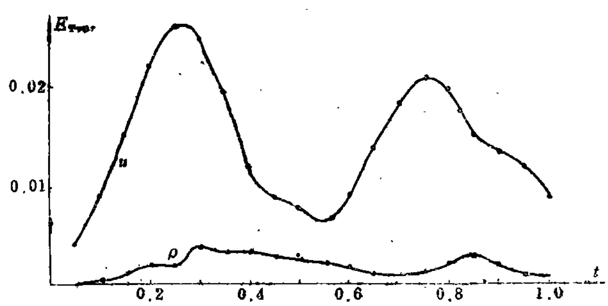

图1　L^∞误差曲线

$\tau=0.0025$, $h=1/16$, $\alpha=0.1\times10^{-6}$, $\beta=\gamma=A=1$, $\gamma_1=5$, $\delta_1=\delta_2=\delta_3=0.5$

四、定理的证明

现在证明第二节中的定理

定理1的证明：将(2.9)与$\tilde{u}$作内积，得到

$$-\alpha\partial_t\|\tilde{u}_x\|^2-\beta\partial_t\|\tilde{u}\|^2=2(\tilde{\rho}_x,\tilde{u})+2(J_G(u_G,\tilde{u}),\tilde{u})+2(\tilde{f}_1,\tilde{u})$$

因而由引理 3 得到

$$\partial_t\|\tilde{u}\|_1^2\leqslant c_1(\|\tilde{\rho}\|^2+\|\tilde{u}\|_1^2+c_s\gamma\|u_C\|_{3/2+\varepsilon}\|\tilde{u}\|^2+\|\tilde{f}_1\|^2) \tag{4.1}$$

将(2.10)与$\tilde{\rho}$作内积得到

$$\partial_t\|\tilde{\rho}\|^2\leqslant c_2(|\tilde{u}|_1^2+\|\tilde{\rho}\|^2+\|\tilde{f}_2\|^2) \tag{4.2}$$

由(4.1)，(4.2)得

$$\partial_t(\|\tilde{u}\|_1+\|\tilde{\rho}\|^2)\leqslant c(\|\tilde{u}\|_1^2+\|\tilde{\rho}\|^2+\|\tilde{f}_1\|^2+\|\tilde{f}_2\|^2)$$

这里常数c与α，β，ε，ν，$\|u_C\|_{3/2+\varepsilon}$有关。利用Gronwall不等式得到

$$\|\tilde{u}(t)\|_1^2+\|\tilde{\rho}(t)\|^2\leqslant\exp[ct]\{\|\tilde{u}(0)\|_1^2+\|\tilde{\rho}(0)\|^2$$
$$+\int_0^T(\|\tilde{f}_1(s)\|^2+\|\tilde{f}_2(s)\|^2)ds\}$$

于是定理1得证。

定理2的证明：根据[2]，若$u_0\in H_p^\sigma(I)$，$\rho_0\in H_p^{\sigma-1}(I)$，则

$$u,u_t\in L^\infty(0,T,H^\sigma),\quad \rho,\rho_t\in L^\infty(0,T;H^{\sigma-1})$$

设$w_1=P_Nu$，$w_2=P_N\rho$，$\tilde{e}_1=u_C-w_1$而$\tilde{e}_2=\rho_C-w_2$。将P_N作用于方程(1.1)～(1.2)并分别和(2.1)～(2.2)相减，则

$$\partial_t(\alpha\tilde{e}_{1xx}-\beta\tilde{e}_1)=\tilde{e}_{2x}+J_C(\tilde{e}_1,w_1+\tilde{e}_1)+J_C(w_1,\tilde{e}_1)+\tilde{f}_1$$
$$\partial_t\tilde{e}_2+\gamma\tilde{e}_{1x}=\tilde{f}_2$$

这里

$$\tilde{f}_1=J_C(w_1,w_1)-\frac{1}{2}P_N(u^2)_x+P_Cf_1-P_Nf_1$$
$$\tilde{f}_2=P_Cf_2-P_Nf_2$$

因而由定理 1

$$\|\tilde{e}_1(t)\|_1^2+\|\tilde{e}_2(t)\|^2\leqslant\exp[ct]\{\|\tilde{e}_1(0)\|_1^2+\|\tilde{e}_2(0)\|^2$$
$$+\int_0^T(\|\tilde{f}_1(s)\|^2+\|\tilde{f}_2(s)\|^2ds\}$$

由估计式(1.6)，(1.7)及文[4]中定理 2 的证明，可知

$$\|\tilde{f}_1\|\leqslant c\|u\|_{L^\infty(0,T;H^\sigma)}N^{1-\sigma}+\|P_Cf_1-f_1\|+\|f_1-P_Nf_1\|$$
$$\leqslant c(\|u\|_{L^\infty(0,T;H^\sigma)}+\|f_1\|_{\sigma-1})N^{1-\sigma}$$
$$\|\tilde{f}_2\|\leqslant\|P_Cf_2-f_2\|+\|f_2-P_Nf_2\|\leqslant cN^{1-\sigma}\|f_2\|_{\sigma-1}$$

同样由(1.6)，(1.7)得

$$\|\tilde{e}_1(0)\|_1\leqslant cN^{1-\sigma}\|u_0\|_\sigma,\quad \|\tilde{e}_2(0)\|\leqslant cN^{1-\sigma}\|\rho_0\|_{\sigma-1}$$

因此

$$\|\tilde{e}_1(t)\|_1^2+\|\tilde{e}_2(t)\|^2\leqslant cN^{1-\sigma}$$

于是由三角不等式即得定理2结论。

定理3的证明：将(2.13)分别与$\tilde{u}^k$、$m\tau\tilde{u}_t^k(m>0)$作内积得到

$$\alpha|\tilde{u}^k|_{1t}^2-\alpha\tau|\tilde{u}_t^k|_1^2+\beta\|\tilde{u}^k\|_t^2-\beta\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2+2(\tilde{\rho}_x^k,\tilde{u}^k)+2\delta_1\tau(\tilde{\rho}_{xt}^k,\tilde{u}^k)$$
$$+2\delta_2\tau(J_C(\tilde{u}_t^k,u_C^k+\tilde{u}^k),\tilde{u}^k)+2(J_C(u_C^k+\delta_2\tau u_{Ct}^k,\tilde{u}^k),\tilde{u}^k)=-2(\tilde{f}_1^k,\tilde{u}^k) \tag{4.3}$$

$$\alpha m\tau|\tilde{u}_t^k|_1^2+\beta m\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2+m\tau(\tilde{\rho}_x^k,\tilde{u}_t^k)+m\tau^2\delta_1(\tilde{\rho}_{xt}^k,u_t^k)+m\tau(J_C(\tilde{u}^k,u_C^k+\tilde{u}^k),\tilde{u}_t^k)$$
$$+m\tau(J_C(u_C^k+\delta_2\tau u_{Ct}^k,\tilde{u}^k),\tilde{u}_t^k)=-m\tau(f_1^k,\tilde{u}_t^k) \tag{4.4}$$

将(2.14)分别同$\tilde{\rho}^k$及$m\tau\tilde{\rho}_t^k(m>0)$作内积，得

$$\|\tilde{\rho}^k\|_t^2-\tau\|\tilde{\rho}_t^k\|^2+2\gamma(\tilde{u}_x^k,\tilde{\rho}^k)+2\gamma\delta_3\tau(\tilde{u}_{xt}^k,\tilde{\rho}^k)=2(\tilde{f}_1^k,\tilde{\rho}^k) \tag{4.5}$$

$$m\tau\|\tilde{\rho}_t^k\|^2+\gamma m\tau(\tilde{u}_x^k,\tilde{\rho}_t^k)+\gamma\delta_3 m\tau^2(\tilde{u}_{xt}^k,\tilde{\rho}_t^k)=m\tau(\tilde{f}_2^k,\tilde{\rho}_t^k) \tag{4.6}$$

设$\varepsilon_1>0$，组合(4.3)～(4.6)式得到

$$\begin{aligned}&(\alpha|\tilde{u}^k|_1^2+\beta\|\tilde{u}^k\|^2)_t+(m-1-\varepsilon_1)\tau(\alpha|\tilde{u}_t^k|_1^2+\beta\|\tilde{u}_t^k\|^2)+\|\tilde{\rho}^k\|_t^2\\&\quad+(m-1-\varepsilon_1)\tau\|\tilde{\rho}_t^k\|+\tau(m\gamma-2\delta_1)(\tilde{\rho}_t^k,\tilde{u}_x^k)+m\tau^2(\gamma\delta_3-\delta_1)(\tilde{\rho}_t^k,\tilde{u}_{xt}^k)\\&\quad+2(\gamma-1)(\tilde{u}_x^k,\tilde{\rho}^k)+\tau(2\gamma\delta_3-m)(\tilde{u}_{xt}^k,\tilde{\rho}^k)+\sum_{i=1}^{3}F_i\\&\leqslant\beta\|\tilde{u}^k\|^2+\|\tilde{\rho}^k\|^2+\left(1+\frac{\tau m^2}{4\varepsilon_1}\right)\left(\frac{1}{\beta}\|\tilde{f}_1^k\|^2+\|\tilde{f}_2^k\|^2\right)\end{aligned} \tag{4.7}$$

这里

$$F_1=\tau(m-2\delta_2)(J_C(\tilde{u}^k,u_C^k+\tilde{u}^k),\tilde{u}_t^k)$$
$$F_2=2(J_C(u_C^k+\delta_2\tau u_{Ct}^k,\tilde{u}^k),\tilde{u}^k)$$
$$F_3=m\tau(J_C(u_C^k+\delta_2\tau u_{Ct}^k,\tilde{u}^k),u_t^k)$$

由[4]，我们有

$$|F_2|\leqslant c_\varepsilon\|\tilde{u}^k\|^2\ u_{C,3/2+\varepsilon}\qquad(\varepsilon>0)$$
$$|F_3|\leqslant\beta\tau\varepsilon_1\|\tilde{u}_t^k\|^2+\beta^{-1}\varepsilon^{-1}m^2\tau ec(u_{C,1})\|\tilde{u}^k\|_1^2$$

这里 $u_{C,1}=\max\limits_k\|u_C^k\|_1$。若$m=2\delta_2$，则$F_1=0$。利用估计式

$$|(m\gamma-2\delta_2)\tau(\tilde{\rho}_t^k,\tilde{u}_x^k)|\leqslant\tau\varepsilon_1\|\tilde{\rho}_t^k\|^2+\varepsilon_1^{-1}(m\gamma-2\delta_1)^2\tau|\tilde{u}^k|_1^2$$
$$|(m-2\gamma\delta_3)\tau(u_{tx}^k,\rho^k)|\leqslant\tau\alpha\varepsilon_1|\tilde{u}_t^k|_1^2+\alpha^{-1}\varepsilon_1^{-1}(2\gamma\delta_3-m)^2\tau\|\tilde{\rho}^k\|^2$$

取$\gamma\delta_3=\delta_1$，由(4.7)易得

$$\begin{aligned}&(\alpha|\tilde{u}^k|_1^2+\beta|\tilde{u}^k|^2)_t+(m-1-3\varepsilon_1)\tau(\alpha|\tilde{u}_t^k|_1+\beta\|\tilde{u}_t^k\|^2)+\|\tilde{\rho}^k\|_t^2\\&\quad+(m-1-2\varepsilon_1)\tau\|\tilde{\rho}_t^k\|^2\leqslant c_1(\|\tilde{u}^k\|_1^2+\|\tilde{\rho}^k\|^2+\|\tilde{f}_1^k\|^2+\|\tilde{f}_2^k\|^2)\end{aligned}$$

将上式对k从0到$n-1$求和得

$$\begin{aligned}&\|\tilde{u}^n\|_1^2+(m-1-3\varepsilon_1)\tau^2\sum_{k=0}^{n-1}\|\tilde{u}_t^k\|_1^2+\|\tilde{\rho}^n\|^2+(m-1-2\varepsilon_1)\tau^2\sum_{k=0}^{n-1}\|\tilde{\rho}_t^k\|^2\\&\leqslant c(\|\tilde{u}^0\|_1^2+\|\tilde{\rho}^0\|^2+\tau\sum_{k=0}^{n-1}(\tilde{u}^k\|_1^2+\|\tilde{\rho}^k\|^2)+\tau\sum_{k=0}^{n-1}(\|\tilde{f}_1^k\|^2+\|\tilde{f}_2^k\|^2))\end{aligned} \tag{4.8}$$

选取$\delta_2>1/2$，及ε_1适当小使得$\alpha_0=m-1-3\varepsilon_1=2\delta_2-1-3\varepsilon_1>0$，由(4.8)得估计式

$$E^n\leqslant\rho^n+c\tau\sum_{k=0}^{n-1}E^k$$

最后，由离散Gronwall不等式即得定理3结论。

定理4的证明：由[2]若，$u_0\in H_\rho^\sigma(I)$，$\rho_0\in H_\rho^{\sigma-1}(I)$，则

$$u,u_t\in L^\infty(0,T;H^\sigma),\quad \rho,\rho_t\in L^\infty(0,T;H^{\sigma-1})$$

令$u^k=u(k\tau)$，$\rho^k=\rho(k\tau)$，$f_1^k=P_Nf_1(k\tau)$，$f_2^k=P_Nf_2(k\tau)$，$w_1^k=P_Nu^k$，$w_2^k=P_N\rho^k$，$\tilde{e}_1^k=u_C^k-w_1^k$ 及 $\tilde{e}_2^k=\rho_C^k-w_2^k$。若对方程(1.1)～(1.2)作用$P_N$并分别与方程(2.5)～(2.6)相减，则

$$\alpha\tilde{e}_{1xxt}^k-\beta\tilde{e}_{1t}^k=\tilde{e}_{2x}^k+\delta_1\tau\tilde{e}_{2xt}^k+J_C(\tilde{e}_1^k+\delta_2\tau\tilde{e}_{1t}^k,w_1^k+\tilde{e}_1^k)$$
$$+J_C(w_1^k+\delta_2\tau_{1t}^k,\tilde{e}_1^k)+\tilde{f}_1^k$$
$$\tilde{e}_{2t}^k+\gamma\tilde{e}_{1x}^k+\gamma\delta_3\tau\tilde{e}_{1xt}^k=\tilde{f}_2^k$$

这里

$$\tilde{f}_1^k=\delta_1\tau w_{2xt}^k+J_C(w_1^k+\delta_2\tau w_{1t}^k,w_1^k)-P_N(u^ku_x^k)+\partial_t(\alpha w_{1xx}^k-\beta w_1^k)$$
$$-(\alpha w_{1xxt}^k-\beta m_{1t}^k)-(P_N-P_C)f_1^k$$
$$\tilde{f}_2^k=-\gamma\delta_3\tau w_{1xt}^k+\partial_t w_2^k-w_{2t}^k-(P_N-P_C)f_2^k$$

但
$$\tau\sum_{k=0}^{n-1}\|\delta_1\tau w_{2xt}^k\|^2=\tau\sum_{k=0}^{n-1}\|\delta_2\tau P_N\rho_{xt}^k\|^2\leqslant\tau\sum_{k=0}^{n-1}\|\delta_2\tau\rho_t^k\|_1^2$$
$$\leqslant c\tau^2\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\|\partial_t\rho\|_1^2ds$$
$$\leqslant c\tau^2\|\partial_t\rho\|_{L^2(0,T;H^1)}^2$$
$$\|P_N(u^ku_x^k)-J_C(w_1^k,w_1^k)\|\leqslant c(\|u\|_{L^\infty(0,T;H^\sigma)})N^{1-\sigma}$$
$$\|\delta_2\tau J_C(w_{1t}^k,w_1^k)\|\leqslant c(\|u\|_{L^\infty(0,T;H^1)})\tau$$
$$\tau\sum_{k=0}^{n-1}\|\partial_t w_1^k-w_{1t}^k\|^2\leqslant c\tau^2\|\partial_t^2 u\|_{L^2(0,T;L^2)}^2$$
$$\tau\sum_{k=0}^{n-1}\|\partial_t w_{1xx}^k-w_{1xxt}^k\|^2\leqslant c\tau^2\|\partial_t^2 u\|_{L^2(0,T;H^2)}^2$$
$$\tau\sum_{k=0}^{n-1}\|\partial_t w_2^k-w_{2t}^k\|^2\leqslant c\tau^2\|\partial_t^2\rho\|_{L^2(0,T;L^2)}^2$$
$$\tau\sum_{k=0}^{n-1}\|\delta_3\tau w_{1xt}^k\|^2\leqslant c\tau^2\|\partial_t u\|_{L^2(0,T;H^1)}^2$$
$$\tau\sum_{k=0}^{n-1}\|(P_N-P_C)f_i^k\|^2\leqslant cN^{2(1-\sigma)}(\|f_1\|_{L^\infty(0,T;H^{\sigma-1})}+\|f_2\|_{L^\infty(0,L;H^{\sigma-1})})\,(i=1,2)$$

因此

$$\tau\sum_{k=0}^{n-1}(\|\tilde{f}_1^k\|^2+\|\tilde{f}_2^k\|^2)\leqslant c(\tau^2+N^{2(1-\sigma)})$$

此外

$$\|\tilde{e}_1^0\|_1=\|P_Cu_0-P_Nu_0\|_1\leqslant cN^{1-\sigma}\|u_0\|_\sigma$$
$$\|\tilde{e}_2^0\|=\|P_Cu_0-P_Nu_0\|\leqslant cN^{1-\sigma}\|u_0\|_{\sigma-1}$$

因而由定理 3

$$\|\tilde{e}_2^n\|_1+\|\tilde{e}_2^n\|\leqslant c(\tau+N^{1-\sigma})$$

最后由三角不等式得定理4结论。

参考文献

[1] Berg, J. and J. Lofstrom, *Interpolation Spaces: An Introduction*, *Springer-Verlag* (1976).

[2] Guo Ben-yu, Weak stability of nonlinear discretization, *Kexue Tongbao*, 30 (1985), 143—147.

[3] Guo Bo-ling, The spectral method for a symmetric regularized wave equations. (to appear)

[4] Ma He-ping and Guo Ben-yu, The Fourier pseudo-spectral method with a restraint operator for the Korteweg-de Vries equation, *J. Comput. Phys.*, 65 (1986), 120—137.

[5] Pasciak, J. E., Spectral and pseudo-spectral methods for advection equation, *Math. Comp.*, 35 (1980), 1081—1092.

[6] Seyler, C. E. and D. C, Faustermacler, A symmetric regularized long wave equation, *Phys. Fluids*, 27 (1984), 4—7.

[7] Ma He-ping and Guo Ben-yu, The Fourier pseudo-spectral method for two-dimensional vorticity equations, *IMA J. Num. Anal.*, 7 (1987), 47—60.

The Fourier Pseudo-Spectral Method for the SRLW Equation

Zheng Jia-dong   Zhang Ru-fen

(*Shanghai Institute of Computer Technology, Shanghai*)

Guo Ben-yu

(*Department of Mathematics, Shanghai University of Science and Technology, Shanghai*)

Abstract

In this paper we present a Fourier pseudo-spectral method with a restraint operator for the SRLW equation. We prove the stability of the schemes and give optimum error estimates.