应用数学和力学，第10卷第9期（1989年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

不动泛系定理与Fuzzy特征集*

王　书　基

（武汉数字工程研究所，1985年9月26日收到）

摘　　要

本文利用不动泛系定理讨论了一个Fuzzy变换何时才有Fuzzy特征集的问题，得到了Fuzzy特征集存在的充分条件和必要条件，特别是当论域有限时得到了充分必要条件。同时，对Fuzzy特征集全体所作集合的性质进行了讨论。

一、引　　言

不动泛系理论是广义转化中有关不变与守恒等泛对称性的研究与应用。不动子集是它和某个二元关系的复合有局整关系的子集。文[1]、[2]、[3]对不动子集开展了一系列的研究，并给出了在经济、突变等方面的应用。

对一个给定的Fuzzy变换，它是否存在非零的Fuzzy特征的问题首先由文[4]进行研究，在论域有限的前提下得到一些充分条件。本文继续这一工作，利用不动泛系定理，在无穷论域上得到了充分条件和必要条件。特别当论域有限时，我们得到了充要条件，并且给出了求Fuzzy特征集的算法。而且我们还研究了极大、极小特征集的性质。

二、基　本　概　念

在本节，我们将给出本文要用到的一些记号、概念和性质，为全文做好准备工作。

设G是任意一个非空集合，无特殊声明，均假定无穷。$f\in P(G^2)$为G上的二元关系，对$x\in G$，$x\circ f=\{y\mid(x,y)\in f,y\in G\}$，$f\circ x=\{z\mid z\in G,(z,x)\in f\}$。如果存在$G_1\subset G$，$G_1\neq\phi$，使得$G_1\circ f=\bigcup\limits_{x\in G_1}x\circ f=G_1$，则称$f$有不动子集，且称$G_1$为$f$的一个不动子集。关于不动子集的泛系研究参见[1]、[2]、[3]。

$\mathscr{F}(G)=\{A\mid A:G\to[0,1]\}$，$A\in\mathscr{F}(G)$称为$G$上的Fuzzy子集。$0,1\in\mathscr{F}(G)$定义为$0(x)=0,1(x)=1$，对任意$x\in G$。对$\{a_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}\subset[0,1]$，记$\bigvee\limits_\lambda a_\lambda=\sup a_\lambda$，$\bigwedge\limits_\lambda a_\lambda=\inf a_\lambda$。显然下式

*吴学谋推荐。

成立：

$$\bigvee_\lambda \bigvee_\mu a_{\lambda\mu} = \bigvee_\mu \bigvee_\lambda a_{\lambda\mu},\ \ (\bigvee_\lambda a_\lambda) \wedge b = \bigvee_\lambda (a_\lambda \wedge b).$$

$R(G)=\{g|g:G^2\to[0,1]\}$，$g\in R(S)$称为G上的Fuzzy关系，$I\in R(G)$定义为

$$I(x,y)=\begin{cases}1 & (x=y)\\ 0 & (y\neq y)\end{cases}$$

$\mathscr{F}M(G,G)=\{T|T:\mathscr{F}(G)\to\mathscr{F}(G)\}$，$T\in\mathscr{F}M(G,G)$ 称为G到G的 Fuzzy 变换。对$g\in R(G)$，令$T_g(A)(x)=A\circ g(x)=\bigvee_z (A(z)\wedge g(z,x)$ $\forall g\in\mathscr{F}(G)$，$x\in G$。则有：

性质1 对任意$g\in R(G)$，有$T_g\in\mathscr{F}M(G,G)$，而且当$g_1\neq g_2$时，均有$T_{g_1}\neq T_{g_2}$。

一个Fuzzy变换称为线性的是指：任意 $\{a_\lambda|\lambda\in\Lambda\}\subset[0,1]$，$\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\}\subset\mathscr{F}(G)$，下式成立：$T(\bigvee_\lambda a_\lambda A_\lambda)=\bigvee_\lambda(a_\lambda T(A_\lambda))$，其中$a_\lambda A_\lambda(x)=a_\lambda\wedge A_\lambda(x)$。

性质2 $T\in\mathscr{F}M(G,G)$，T是线性的充分与必要条件是有$g\in R(G)$，使得$T=T_g$。

对$g\in R(G)$，定义Fuzzy关系的复合为：

$$g^{(2)}(x,y)=g\circ g(x,y)=\bigvee_z(g(x,z)\wedge g(z,y))$$

$$g^{(n)}(x,y)=g^{(n-1)}\circ g(x,y)=\bigvee_z(g^{(n-1)}(x,z)\wedge g(z,y))$$

$$g^t(x,y)=\bigvee_{n=1}^{\infty} g^{(n)}(x,y)$$

$$g^{(0)}=I$$

$$g^{-1}(x,y)=g(y,x)$$

性质 3 $g\vee g^t\circ g=g^t$

推论 1 $g^t\geqslant g^t\circ g$

注 所谓$g_1\geqslant g_2$是指$g_1(x,y)\geqslant g_2(x,y)$对任意$(x,y)\in G^2$成立．如果$g_1\geqslant g_2$，且存在$x,y\in G$，使$g_1(x,y)\neq g_2(x,y)$，则记为$g_1>g_2$．对Fuzzy子集的大小可以类似地定义．

性质 4 对 g_1，$g_2\in R(G)$ $(x\in G)$，则有 $(x\circ g)\circ g_2=x\circ(g_1\circ g_2)$，其中 $x\circ g(y)=g(x,y)(\forall y\in G)$。

$T\in\mathscr{F}M(G,G)$，如果存在$A\in\mathscr{F}(G)$，使得$T(A)=A$，则称A为T的特征集。[4]对线性Fuzzy变换的Fuzzy特征集进行了研究，下面我们继续这一工作。

三、主要结果

从性质1、2，我们可视T_g和g恒同，因而我们把g看成是Fuzzy变换。本文主要研究g有Fuzzy特征集的条件。显然，$A=0$是g的特征集，是平凡的。因而，我们仅考虑g的非零特征集，且假定$g\neq0$，作

$$FG(g)=\{A|A\circ g=A,\ A\neq0,\ A\in\mathscr{F}(G)\}$$

性质5 $\phi\neq G_1\subset G$，$f\in P(G^2)$，则G_1是f的不动子集的充要条件是 $A\in FG(g)$，其中$A=y_{G_1}$，$g=x_f$，$x_{G'}$的定义为：

$$x_{G'}(x)=\begin{cases}1 & (x\in G')\\ 0 & (x\overline{\in} G')\end{cases}$$

所以，研究 $FG(g)$ 何时非空的问题，是泛系方法论中讨论一个二元关系何时有不动子集的问题的推广。

定理1 如果存在$G_1\subset G$，$G_1\neq\phi$满足对任意$x\in G_1$，有$y\in G_1$使得$g(y,x)\geqslant\bigvee\limits_{z}g(x,z)\neq 0$，则$FG(g)\neq\phi$，且$A=\bigvee\limits_{x\in G_1}x\circ g^t\in FG(g)$，这里$x\circ g(y)=g(x,y)\quad(\forall y\in G)$。

证明 对$x\in G_1$，有$y\in G_1$，使得

$$g(y,x)\geqslant\bigvee_{z}g(x,z)，则$$

$$A(x)=\bigvee_{z\in G_1}z\circ g^t(x)\geqslant y\circ g^t(x)\geqslant g(y,x)\neq 0$$

所以　$A\neq 0$

$$\begin{aligned}y\circ g^{(2)}(x)&=\bigvee_{t}(g(y,t)\wedge g(t,z))\\&\geqslant g(y,x)\wedge g(x,z)=g(x,z)\\&=x\circ g(z)\qquad(\forall z\in G)\end{aligned}$$

所以　$\bigvee\limits_{x\in G_1}x\circ g^{(2)}\geqslant\bigvee\limits_{x\in G_1}x\circ g$

根据性质3、4可得：

$$\begin{aligned}A\circ g(y)&=\bigvee_{z}((\bigvee_{x\in G_1}x\circ g^t(z))\wedge g(z,y))\\&=\bigvee(\bigvee_{x\in G_1}(g^t(x,z)\wedge g(z,y)))\\&=\bigvee_{x\in G_1}(\bigvee_{z}(g^t(x,z)\wedge g(z,y)))\\&=\bigvee_{x\in G_1}x\circ(g^t\circ g)(y)\\&=\bigvee_{x\in G_1}(\bigvee_{n=2}^{\infty}x\circ g^{(n)}(y))\\&=\bigvee_{x\in G_1}(\bigvee_{n=1}^{\infty}x\circ g^{(n)}(g))\\&=\bigvee_{x\in G_1}x\circ g^t(y)\\&=A(y).\end{aligned}$$

故　$A\in FG(g)$。

推论2 如果存在$x\in G$，$g(xx,)=\bigvee\limits_{y}g(x,y)\neq 0$，则$FG(g)\neq\phi$，且$A=x\circ g^t\in FG(g)$。

定理2 如果存在$x\in G$，使得$g(x,x)\neq 0$，则$FG(g)\neq\phi$。

证明 记$G'=\{y|g(x,y)>g(x,x)\}$

当$G'=\phi$时，由推论2可知$FG(g)\neq\phi$。

当$G'\neq\phi$时，作

$$g_1(z,y)=\begin{cases} g(z,y) & (z\neq x) \\ g(x,y) & (z=x\text{且}y\bar{\in}G') \\ g(x,x) & (z=x\text{且}y\in G') \end{cases}$$

$$g_2(z,y)=\begin{cases} 0 & (y\bar{\in}G'\text{或}z\neq x) \\ g(x,y) & (z=x\text{且}y\in G') \end{cases}$$

可以验证g_1，$g_2\in R(G)$，$g=g_1\vee g_2$，$g_1(x,x)=\bigvee_z g_1(x,z)$。根据推论 2，$A_1=x\circ g^t\in FG(g_1)$.所以$A_1\circ g=A_1\circ g_1\vee A_1\circ g_2=x\circ g_1^t\vee x\circ g_1^t\circ g_2$

因为 $$g_1^{(n)}(x,x)=\bigvee_z(g_1(x,z)\wedge g_1^{(n-1)}(z,x))$$
$$\leqslant\bigvee_z g_1(x,z)=g_1(x,x)$$
$$x\circ g_1^{(n)}g_2(y)=\bigvee_z(g_1^{(n)}(x,z)\wedge g_2(z,y))$$
$$=g_1^{(n)}(x,x)\wedge g_2(x,y)$$
$$\leqslant g_1(x,x)\wedge g_2(x,y)$$
$$=\begin{cases} g(x,x) & (y\in G') \\ 0 & (y\bar{\in}G') \end{cases}$$
$$\leqslant x\circ g_1(y)\qquad(\forall y\in G)$$

所以 $$x\circ g_1^t\circ g_2(y)=\bigvee_n x\circ g_1^{(n)}\circ g_2(y)$$
$$\leqslant\vee x\circ g_1(y)=x\circ g_1(y)$$
$$\leqslant x\circ g_1^t(y)$$

从而 $A_1\circ g=A_1\in FG(g)$.

如果$A\in FG(g)$，且对任意$A'\in\mathscr{F}(G)$，只要$A'>A$就有$A'\bar{\in}FG(g)$，则称A为g的极大Fuzzy特征集。类似地定义g的极小Fuzzy特征集。

性质6 如果$FG(g)\neq\phi$，则g有唯一的极大Fuzzy特征集。

今后，用A^*表示g的极大Fuzzy特征集。

定理3 设(G,τ)是列紧的拓扑空间，A^*是连续的，对任意的y，$g(x,y)$ 是 x 的连续函数。如果$FG(g)\neq\phi$,则存在$G_1\subset G$，$G_1\neq\phi$，使得对任意$x\in G_1$，有$y\in G_1$，$g(x,y)\geqslant\alpha$，这里$\alpha=\bigvee_x A^*(x)$。

证明 首先证明，对任意$x\in G$，有$y\in G$，使得$A^*\circ g(x)=A^*(y)\wedge g(y,y)$。

记$\beta=A^*\circ g(x)$，对任意自然数n，按上确界定义有$z_n\in G$, $A^*(z_n)\wedge g(z_n,x)\geqslant\beta-1/n$，因为$G$为列紧的，则有$\{z_{n_k}\}\subset\{z_n\}$和$y\in G$，使$z_{n_k}\to y(k\to\infty)$。再根据连续性假定可得

$$A^*(y)\wedge g(y,x)\geqslant\beta$$

所以 $A^*(x)=A^*\circ g(x)=A^*(y)\wedge g(y,x)$.

同样可以证明有 $x_1\in G$，$A^*(x_1)=\alpha$.

因此，对$x_1\in G$，有$x_2\in G$，使$A^*(x_1)=A^*(x_2)\wedge g(x_2,x_1)$，但$A^*(x_1)=\alpha\geqslant A^*(x_2)$，

所以 $A^*(x_1)=A^*(x_2)\leqslant g(x_2,x_1)$.

一般，若$x_1,\cdots,x_n$满足$A^*(x_k)=A(x_{k+1})\leqslant g(x_{k+1},x_k)$ $(k=1,\cdots,n-1)$。对$x_n\in G$，根据前面的讨论，有$x_{n+1}\in G$，$A^*(x_n)=A^*(x_{n+1})\wedge g(x_{n+1},x_n)$，但$A^*(x_n)=a\geqslant A^*(x_{n+1})$，因而

$$A^*(x_n)=A^*(x_{n+1})\leqslant g(x_{n+1},x_n)$$

令$G_1=\{x_n|n=1,2,\cdots\}$可知G_1为所要求者，从而定理为真。

推论3　$|G|<\infty$，如果$FG(g)\neq\phi$，则存在$G_1\neq\phi$使对任意$x\in G_1$，有$y\in G_1$，$g(y,x)\geqslant a$，其中$a=\bigvee\limits_{x}A^*(x)$。

由定理1、3和性质5有

推论4[3]　$f\in P(G^2)$，f有不动子集的充要条件是存在$(x_1,x_2,\cdots)\in G^\infty$，其中

$$x_{j+1}\in f\circ x_j$$

因此，本文的结果推广了不动泛系定理中的一些结论。

从某种意义来说，定理1和3构成了$FG(g)$不为空的充要条件。上面的结果都是在论域为有穷时给出的。下面对论域有穷时进行讨论。

引理1　$|G|<\infty$，则存在整数i，N，使得$g^{(N+i)}=g^{(N)}$。

定理4　设$|G|<\infty$，如果有$x\in G$，使得$g^i(x,x)=\bigvee\limits_{y}\bigvee\limits_{z}g^i(y,z)\neq 0$，则$FG(g)\neq\phi$。

证明　由引理1知$g^{(n)}(x,x)=\bigvee\limits_{y}\bigvee\limits_{z}\bigvee\limits_{m=1}^{N+i}g^{(m)}(y,z)$其中$1\leqslant n\leqslant N+i$。当$n=1$时，由定理2知该定理成立，如果$n\geqslant 2$，则$g^{(n)}(x,x)\geqslant g^{(k)}(y,z)$　$(1\leqslant k\leqslant n)$，这样有$x_1\in G$

$$g^{(n)}(x,x)=\bigvee_{y}(g(x,y)\wedge g^{(n-1)}(y,x))$$

$$=g(x,x_1)\wedge g^{(n-1)}(x_1,x)$$

所以　$$g^{(n)}(x,x)=g^{(n-1)}(x_1,x)=g(x,x_1)。$$

如果继续可得存在$x,x_1,\cdots,x_{n-1}$满足如下性质

$$g^{(n)}(x,x)=g(x_i,x_{i+1})=g(x,x_1)=g(x_{n-1},x)$$

令$G_1=\{x_i|i=1,\cdots,n-1\}$。由定理1得$FG(g)\neq\phi$。

利用引理1还有

定理5　$|G|<\infty$，若存在$g^{(N+k)}\neq 0$，则$FG(g)\neq\phi$，且$A=\bigvee\limits_{x}\bigvee\limits_{k=0}^{i-1}x\circ g^{(N+k)}\in FG(g)$。

对$G_1\subset G$，定义$G_1(0)=\{(x,y)|g(x,y)>0,\ (x,y)\in G_1^2\}$。

定理6　如果$|G|<\infty$，则$FG(g)\neq\phi$的充要条件是存在$G_1\neq\phi$，$G_1\subset G$使对任意$x\in G_1$，$G_1(0)\circ x\neq\phi$。

证明　必要性：设$A\neq 0$，$A\circ g=A$。

作集合$G_1=\{x|A(x)\neq 0\}$可知$G_1\neq\phi$。下面证明G_1满足要求。对$x\in G_1$，

$$A\circ g(x)=\bigvee_{z}(A(z)\wedge g(z,x))$$

$$=\bigvee_{z\in G_1}(A(z)\wedge g(z,x))=A(z_1)\wedge g(z_1,x)$$

$$=A(x)\neq 0$$

所以　$z_1\in G_1(0)\circ x$。

充分性 令G'是满足如下条件的G的子集：$G'(0)\circ x\neq\phi$对任意$x\in G'$。又对$y\overline{\in}G'$，则$(G'\cup\{y\})\circ y=\phi$。按题中假定，这样的$G'$是存在的。再令$\beta=\wedge g(x,y)(x,y\in G'$，且$g(x,y)\neq 0)$，显然$\beta>0$。作

$$A(x)=\begin{cases}0 & (x\overline{\in}G')\\ \beta & (x\in G)\end{cases}$$

则$A\neq 0$且$A\in\mathscr{F}(G)$。下证$A\circ g=A$。

当$x\in G'$时：

$$A\circ g(x)=\bigvee_{z\in G'}(\beta\wedge g(z,x))$$
$$=\beta=A(x)$$

当$x\overline{\in}G'$时：

$$A\circ g(x)=\bigvee_{z\in G'}(\beta\wedge 0)=0$$
$$=A(x)$$

所以 $A\in\mathscr{F}G(g)$。

根据定理6，我们有如下算法：

第一步：令$G_1=\{x|G(0)\circ x=\phi\}$，$G_1'=G-G_1$，如果$G_1=\phi$，则有非零Fuzzy特征集，且$A=\beta$（见定理6）。否则

第二步：对k，$G_k=\{x|G_{k-1}'(0)\circ x=\phi，x\in G_{k-1}'\}$，$G_{k-1}'=G-\bigcup_{i=1}^{k-1}G_i$，如果对某个$k$，$G_k=\phi$，$G_{k-1}'\neq\phi$，则有非零Fuzzy特征集，且

$$A(x)=\begin{cases}0 & (x\overline{\in}G_k')\\ \beta & (x\in G_k')\end{cases}$$

否则 $FG(g)=\phi$。

推论5 设$|G|<\infty$，$g_i\in R(G)$ $(i=1,\cdots,m)$，如果$\bigcup_{i=1}^{m}FG(g_i)\neq\phi$，则$FG(\bigvee_{i=1}^{m}g_i)\neq\phi$。

定理7 如果$g=g^{-1}$，则$FG(g)\neq\phi$，且$A(x)=\bigvee_y g(y,x)$ $(A\in FG(g))$。

下面我们继续讨论$FG(g)$的极大元和极小元的性质。

定理8 $|G|<\infty$，$FG(g)\neq\phi$，则$FG(g)$中不存在极小元。

证明 不然，A为g的极小非零Fuzzy特征集。令$G_1=\{x|A(x)\neq 0，x\in G\}$，$\beta=\wedge g(x,y)$ $((x,y)\in G_1^2，g(x,y)>0)$，$\alpha=\bigwedge_{x\in G_1}A(x)$，$\alpha'=\min\{\alpha,\beta\}/2$，作

$$A_1(x)=\begin{cases}0 & (x\overline{\in}G_1)\\ \alpha' & (x\in G_1)\end{cases}$$

则$A_1<A$，且$A_1\in FG(g)$。矛盾。

定理9 设(G,τ)是列紧拓扑空间，$g(x,y)$是x的连续泛函。$g(x,x)=\bigvee_y g(x,y)$ 对任意$x\in G$成立。$A=\bigvee_{x\in G}x\circ g^t$，则$A$是$FG(g)$的极大元。

证明 由推论2，有$A\in FG(g)$。现在对任意$B\geqslant A$，且$B\in FG(g)$，有

$$B(z)\geqslant A(z)\geqslant z\circ g^t(z)\geqslant g(z,z)$$
$$=\bigvee_y g(z,y)\geqslant g(z,y)$$

$$B\circ g(z)=\bigvee_y g(y,z)$$

根据g的连续性和G是列紧拓扑空间，有$z_1\in G$，使 $B\circ g(z)=g(z_1,z)\leqslant z_1\circ g^t(z)\leqslant A(z)$ 即$A\geqslant B$，故$A=B$。

从定理9我们有如下猜想：

在定理1中的$A=\bigvee_{x\in G_1} x\circ g^t$是$FG(g)$的极大元。

在一定条件下该猜想成立。

定理10 $|G|<\infty$，且定理1中的$G_1=G$，则该猜想成立。

证明 不然，有$B(y)>A(y)$，且$B\in FG(g)$。

$$B(y)=B(z)\wedge g(z,y)>\bigvee_x x\circ g^t(y)\geqslant z\circ g^t(y)$$

所以 $\dot{g}(z,y)>g(z,y)$ 矛盾。

参 考 文 献

[1] Wu Xue-mou, Fixed pansystems theorems and pansystems catastrophe analysis of panweighted network, 数学研究与评论, 2 (1984).

[2] 高隆颖、王书基，泛对称与不动泛系定理，应用数学和力学，5,5 (1984),743—748.

[3] 李贵华，不动泛系定理的数量和结构的特征描述，应用数学和力学，5,6 (1984),887—894.

[4] 林履端，对角占优的Fuzzy变换及其Fuzzy特征集，模糊数学，3 (1983).

[5] Sims, B. T., *Fundamental of Topology*, New York (1976).

[6] 张石生，Fuzzy映射的不动点定理，应用数学和力学，5, 2 (1984),297—304.

Fixed Pansystems Theorems and Eigen-Fuzzy Sets

Wang Shu-ji

(*Wuhan Digital Engineering Institute, Wuhan*)

Abstract

In this paper, we apply fixed pansystems theorems to study when a fuzzy transformation has a nonzero eigenfuzzy set. Many necessary conditions and sufficient conditions are obtained. Furthermore, the properties of nonzero eigen-fuzzy sets are investigated, and the results presented in Ref. [4]are extended.