

文章编号: 1000-0887(2004) 07-0701-10

矩形截面梁中波传播的精确分析^{*}

孙卫明^{1,2}, 杨光松³, 李东旭⁴

- (1. 北京交通大学 工程力学研究所, 北京 100044;
2. 海军工程大学 核能科学与工程系, 武汉 430033;
3. 第二炮兵装备研究院 第三研究所, 北京 100085;
4. 国防科技大学 航天与材料工程学院, 长沙 410073)

(马兴瑞推荐)

摘要: 将傅立叶级数方法推广应用于矩形截面梁中波传播的精确分析。不仅试着直接从三维弹性动力学方程出发, 导出了矩形截面梁中波传播的一般解析解, 而且给出了弹性波在自由矩形截面梁中的传播特性。波传播精确模型的提出, 为实现梁波的耦合控制奠定了坚实基础。

关键词: 矩形截面梁; 波传播; 精确分析; 傅立叶级数; 行波; 主动控制

中图分类号: O347; O342 **文献标识码:** A

引 言

二十世纪八十年代中期以来, 大型化、低刚度、柔性化已成为各类航天结构的一个重要趋势。无疑轻型结构可以增加有效载荷的重量, 提高运载工具的效率; 大型结构可以扩展空间结构的功能。但这同时也给结构的设计、制造和使用带来了一系列新的问题, 其中大型空间结构的振动控制被摆到了十分突出的地位^[1~3]。由此, 行波主动控制技术作为一种全新的结构控制方法, 得到了迅速的认同和发展^[4~6]。与经典的模态控制, 即基于模态分析思想, 并采用现代控制理论的方法完全不同, 行波控制的基础是波动方程的行波解分析, 即将连续体的运动用行波描述, 而控制器的设计准则是减小行波的幅值或尽可能多地吸收行波载体携带的能量。相应地, 行波控制技术具有两大明显的优点^[7,8]: 一是可用波动方程描述的基本连续体(如一维连续体弦、杆、梁等)的控制律设计与边界条件无关, 因而可将大型复杂结构分解成若干个基本连续体, 并在控制设计的第一阶段不考虑边界条件和各连续体之间的衔接关系; 这使得行波控制法特别适用于大型复杂结构的振动主动控制。另外, 采用行波控制法, 不必对结构进行离散, 这就避免了经典模态控制中控制精度的高阶模态泄漏; 对于具有大量弹性模态需要控制的大型柔性结构, 这一优点尤为可贵。

结构的行波主动控制技术从提出到现在才二十年左右的时间。其间虽有不少成果问世,

* 收稿日期: 2002_06_05; 修订日期: 2004_01_15

基金项目: 国家八六三高技术发展计划资助项目

作者简介: 孙卫明(1974—), 男, 讲师, 博士(联系人, Tel: + 86_10_51680373, + 86_27_83443364; Fax: + 86_10_51682094; E_mail: weimingsun_1974@263.net);

杨光松(1956—), 男, 研究员, 博士生导师, 国家有突出贡献的博士学位获得者。

但研究的重点仍集中在基本连续体的控制律设计、稳定性分析以及测量方法研究等理论问题上^[9~16]。相比之下,处于基础地位的波导结构行波解分析则有些随意和过于简单。如在考察梁中多类行波的耦合控制时,所有的研究者均以波运动的简单分解和可独立控制为前提^[17~19],而未计及波型之间的耦合效应,结果导致了实际操作过程中的控制溢出。由此可见,准确确定波导内部许可存在的导波场,对于实现结构波动的有效控制具有十分重要的意义。但遗憾的是,由于力学和数学上的困难,目前能精确完成这一工作的例子很少;只是 Rayleigh 和 Lamb 1888 年分析了无穷大平板波导中的弹性波,以及 Pochhammer 1876 年和 Chree 1889 年分别严格处理了无穷长圆柱中的导波场。至于在线弹性范围内,严格地分析其它类型波导结构(如自由矩形截面梁)中的简谐波则认为是不可能的事情了^[20,21]。

笔者将傅立叶级数方法^[22~24]推广应用于矩形截面梁中波传播的精确分析。不仅试着从三维弹性动力学方程出发,导出了矩形截面梁中波传播的一般解析解;而且给出了弹性波在自由矩形截面梁中的传播特性(频谱、截止频率、波型等)。波传播精确模型的提出,为实现梁波的耦合控制奠定了坚实基础^[25]。

1 矩形截面梁中波传播的一般解析解

1.1 基本方程和边界条件

如图 1 所示,考虑具有拉梅弹性常数 λ, μ 的无限长自由梁,其矩形截面长、宽分别为 $2a, 2b$ 。则其运动微分方程为

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 u, \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 v, \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \nabla^2 w, \end{cases} \quad (1)$$

式中 u, v, w 为弹性体中任一点的位移分量, ρ 为弹性体密度, ω 为谐波频率, 体积应变 $e = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z$, 拉普拉斯算子 $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ 。

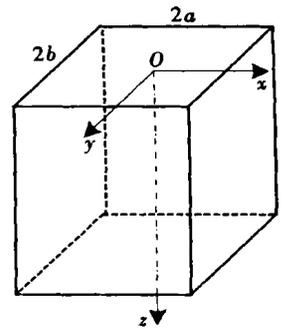


图 1 直角坐标系中的无限长矩形截面梁

物理方程为

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda e + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = \lambda e + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_z = \lambda e + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right). \end{cases} \quad (2)$$

梁的自由边界条件为

$$\begin{cases} \sigma_x |_{x=\pm a} = 0, \quad \tau_{xy} |_{x=\pm a} = 0, \quad \tau_{xz} |_{x=\pm a} = 0, \\ \sigma_y |_{y=\pm b} = 0, \quad \tau_{xy} |_{y=\pm b} = 0, \quad \tau_{yz} |_{y=\pm b} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

1.2 一般解的复数形式

稳态情况下,谐波沿梁的纵向表现为行波,而沿梁的横向表现为驻波,故可假设方程(1)有如下形式的位移解

$$\begin{cases} u = U(x, y) \exp[i(kz - \omega t)], \\ v = V(x, y) \exp[i(kz - \omega t)], \\ w = W(x, y) \exp[i(kz - \omega t)], \end{cases} \quad (4)$$

其中 U, V, W 即通常的振型函数。波数 k 可为实数、纯虚数和复数, 并分别对应着梁波导中的行波、近场波和衰减行波^[20]。

若将振型函数展开为 x 方向上的傅立叶级数

$$\begin{cases} U(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(y) \exp(i\alpha_m x), \\ V(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_m(y) \exp(i\alpha_m x), \\ W(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m(y) \exp(i\alpha_m x), \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\alpha_m = m\pi/a$ 。则对任一谐数 m , 可得一关于 f_m, g_m, h_m 的二阶常微分方程组。进而若设

$$f_m(y) = A_m \exp(i\eta y), \quad g_m(y) = B_m \exp(i\eta y), \quad h_m(y) = C_m \exp(i\eta y), \quad (6)$$

其中 A_m, B_m, C_m 为待定常数。将(4)~(6)式代入(1)式, 有特征方程

$$[\mu(\alpha_m^2 + \eta^2 + k^2) - \rho\omega^2]^2 [(\lambda + 2\mu)(\alpha_m^2 + \eta^2 + k^2) - \rho\omega^2] = 0 \quad (7)$$

和特征根

$$\begin{cases} \eta_{1,2,3,4} = \pm \beta_{1m} = \pm \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} - \alpha_m^2 - k^2}, \\ \eta_{5,6} = \pm \beta_{2m} = \pm \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu} - \alpha_m^2 - k^2}. \end{cases} \quad (8)$$

由此可知, 方程(7)有两个二重根和两个单根。现以特征根 β_{1m} 和 β_{2m} 为例(特征根 $-\beta_{1m}, -\beta_{2m}$ 类似), 给出 f_m, g_m, h_m 的通解形式如下

$$\begin{cases} f_m(y) = (A_{1m} + A_{3m}y) \exp(i\beta_{1m}y) + A_{2m} \exp(i\beta_{2m}y), \\ g_m(y) = (B_{1m} + B_{3m}y) \exp(i\beta_{1m}y) + B_{2m} \exp(i\beta_{2m}y), \\ h_m(y) = (C_{1m} + C_{3m}y) \exp(i\beta_{1m}y) + C_{2m} \exp(i\beta_{2m}y). \end{cases} \quad (9)$$

同时可得各待定系数间相容关系为

$$\begin{cases} \alpha_m A_{1m} + \beta_{1m} B_{1m} + k C_{1m} = 0, \quad \frac{A_{2m}}{\alpha_m} = \frac{B_{2m}}{\beta_{2m}} = \frac{C_{2m}}{k}, \\ A_{3m} = B_{3m} = C_{3m} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

无限大弹性体中, 弹性波有两种基本形式: 等容波与无旋波。(9)式和(10)式表明梁中的导波场也是由这两种波所构成, 这与利用拉梅位移势函数所得的结论一致^[20]。

将函数 f_m, g_m, h_m 的基本解代入(4)式和(5)式, 则得到了梁波导中谐波的一类复数傅里叶级数解形式。同理, 若先将振型函数展开成 y 方向上的傅立叶级数, 还可获得谐波的另一类复数傅里叶级数解。

1.3 一般解的实数形式

记 $\beta_{1m} = s_{1m} + it_{1m}, \beta_{2m} = s_{2m} + it_{2m}$, 则 k 为实数时, 表 1 给出了基函数的统一定义。由此, 函数 f_m, g_m, h_m 可统一表述为

$$\begin{cases} f_m(y) = \sum_{j=1}^4 A_{jm} F(j, m, b, y), \\ g_m(y) = \sum_{j=1}^4 B_{jm} F(j, m, b, y), \\ h_m(y) = \sum_{j=1}^4 C_{jm} F(j, m, b, y), \end{cases} \quad (11)$$

其中 $A_{jm}, B_{jm}, C_{jm} (j = 1, 2, 3, 4)$ 为实的待定常数, 且其之间存在类似于(10)式的相容关系·

表 1 基函数 $F(j, m, b, y)$ 的统一定义

F	$j = 1$	$j = 2$	F	$j = 3$	$j = 4$
$s_{1m} > 0, t_{1m} = 0$	$\cos(s_{1m}y)$	$\sin(s_{1m}y)$	$s_{2m} > 0, t_{2m} = 0$	$\cos(s_{2m}y)$	$\sin(s_{2m}y)$
$s_{1m} = 0, t_{1m} > 0$	$\cosh(t_{1m}y)$	$\sinh(t_{1m}y)$	$s_{2m} = 0, t_{2m} > 0$	$\cosh(t_{2m}y)$	$\sinh(t_{2m}y)$

若矩形截面梁中横截面的长宽比 (a/b) 接近于 1, 相应导波场宜写为关于 x, y 轴对称的傅立叶级数形式

$$u = \left\{ \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 A_{jm} F(j, m, b, y) \right\} \begin{cases} \cos \alpha_m x \\ \sin \alpha_m x \end{cases} + \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 A_{jn} F(j, n, a, x) \right\} \begin{cases} \sin \beta_n y \\ \cos \beta_n y \end{cases} \cos(kz - \omega t), \quad (12a)$$

$$v = \left\{ \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 B_{jm} F(j, m, b, y) \right\} \begin{cases} \sin \alpha_m x \\ \cos \alpha_m x \end{cases} + \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 B_{jn} F(j, n, a, x) \right\} \begin{cases} \cos \beta_n y \\ \sin \beta_n y \end{cases} \cos(kz - \omega t), \quad (12b)$$

$$w = \left\{ \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 C_{jm} F(j, m, b, y) \right\} \begin{cases} \sin \alpha_m x \\ \cos \alpha_m x \end{cases} + \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 C_{jn} F(j, n, a, x) \right\} \begin{cases} \sin \beta_n y \\ \cos \beta_n y \end{cases} \sin(kz - \omega t), \quad (12c)$$

其中 $\alpha_m = m\pi/a, \beta_n = n\pi/b$ ·

2 问题求解

通过物理方程(2), 可方便地将正应力 σ_x, σ_y 和剪应力 $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ 用待定常数 A_{jm}, B_{jm}, C_{jm} ($j = 1, 2, 3, 4$), A_{jn}, B_{jn}, C_{jn} ($j = 1, 2, 3, 4$) 表示· 若级数解均取前 M, N 项, 则基本求解变量数目为 $6M + 6N + I$ (I 值在表 2 中给出); 在边界上均匀配点^[26], 使边界条件给出的方程数目和基本求解变量数目相等, 并令相应的齐次线性方程组的系数行列式为零, 则得到联系频率 ω 和波数 k 的超越方程, 通常称之为频率方程· 在给定频率的情况下, 梁中许可导波场的波数只能是某些特定值; 当频率变化时, 这些波数随之变化, 形成完整的频散曲线· 在 ωk 平面内, 频率方程给出无数条频散曲线分支· 不同的分支对应着不同的波导变形模式(即波型), 而每一分支与 ω 轴的交点又给出该分支行波沿梁纵向传播的截止频率·

应该指出的是, 级数解截取有限项, 因而在边界上只有有限点满足边界条件, 会带来一定的误差, 但这种计算中的误差是可控的^[27]· 通过计算若发现当截取前 M 项和前 $M + 1$ 项时, 要求保留的有限数字几乎不变, 则可认为截取前 M 项而得到的数值结果是在满足精度要求意

义下的精确解·

类似于薄板横向振动分析^[28], 实际计算时对位移函数进行了对称性分解· 具体地, 在表 2 中, 根据位移函数关于 x 轴、 y 轴的对称性情况, 将其分解为四种类型: 扭转波 (T)、纵向波 (L)、绕 y 轴的弯曲波 (B_y) 和绕 x 轴的弯曲波 (B_x)· 针对一、二两种分解类型, 若梁截面为方形, 则还可进一步将其区分为沿 $x = y$ 对称 (即 T_s, L_s) 和反对称 (即 T_a, L_a) 两种情况·

表 2 位移函数的对称性分解

分解类型	I	关于 x 轴			关于 y 轴		
		u	v	w	u	v	w
扭转波	4	反对称	对称	反对称	对称	反对称	反对称
纵向波	8	对称	反对称	对称	反对称	对称	对称
绕 y 轴弯曲波	6	反对称	对称	反对称	反对称	对称	对称
绕 x 轴弯曲波	6	对称	反对称	对称	对称	反对称	反对称

3 数值分析

笔者以侧面自由的方形截面梁为例, 在微机上对其频率方程进行了大量数值计算工作· 如表 2 所示, 计算时以位移函数的对称性分解为基础, 考虑了前三大类型行波共计 5 种情况· 不妨取材料泊松比 $\nu = 0.3$, 并定义无量纲频率 $\Omega = \omega a / \pi c_T$ (其中 $c_T = \sqrt{\mu / \rho}$) 和无量纲波数 $K = ka / \pi$ ·

表 3 频散曲线的一致收敛性

波类	阶次	K	Ω				配点法 ^[29]
			$M = N = 6$	$M = N = 9$	$M = N = 12$	$M = N = 15$	
T_a	1	0.159 2	0.146 2	0.146 2	0.146 2	0.146 2	0.146 2
	1	0.509 3	0.467 6	0.467 4	0.467 3	0.467 3	0.467 3
	1	0.891 3	0.817 0	0.816 5	0.816 3	0.816 2	0.816 0
L_s	1	0.159 2	0.254 6	0.254 6	0.254 6	0.254 6	0.254 6
	1	0.509 3	0.715 4	0.715 4	0.715 4	0.715 4	0.715 5
	1	0.891 3	0.976 4	0.976 5	0.976 5	0.976 5	0.976 5
B_y	1	0.159 2	0.065 7	0.065 6	0.065 5	0.065 5	0.064 6
	1	0.509 3	0.392 1	0.391 7	0.391 4	0.391 2	0.387 8
	1	0.891 3	0.773 5	0.772 7	0.772 3	0.772 0	0.765 8
	2	0.000 0	0.500 3	0.500 3	0.500 3	0.500 3	
	3	0.000 0	0.804 1	0.792 5	0.785 3	0.780 2	
	4	0.000 0	1.012 5	1.012 2	1.012 1	1.012 0	
	5	0.000 0	1.123 9	1.120 7	1.119 6	1.119 1	
	6	0.000 0	1.499 9	1.499 9	1.499 9	1.499 8	
	7	0.000 0	1.547 7	1.526 4	1.513 4	1.504 5	
	8	0.000 0	1.706 5	1.702 4	1.700 3	1.699 0	
	9	0.000 0	1.806 3	1.804 3	1.803 7	1.803 3	
10	0.000 0	1.847 4	1.845 0	1.843 5	1.842 5		
11	0.000 0	1.974 9	1.974 8	1.974 8	1.974 8		

3.1 频散曲线的一致收敛性

为考察本文所得解析解的收敛情况, 分别截取该级数解的前 M 项 (x 方向) 和 N 项 (y 方

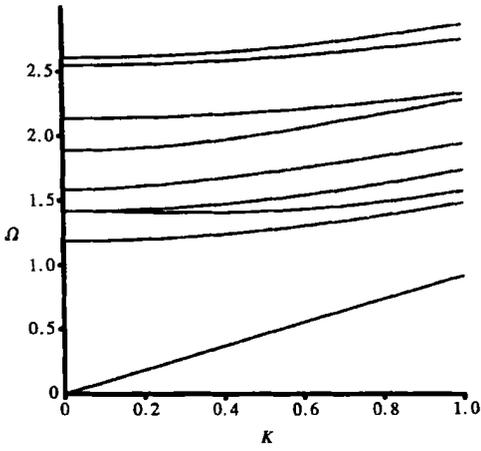
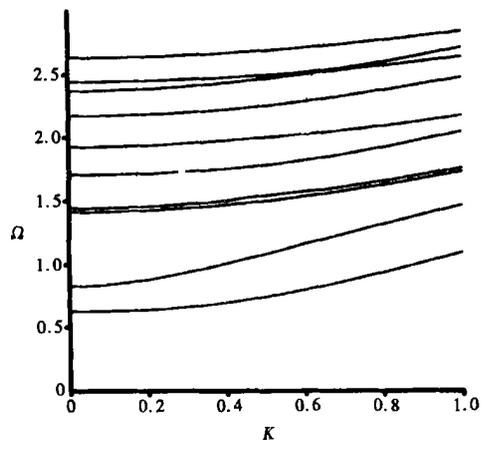
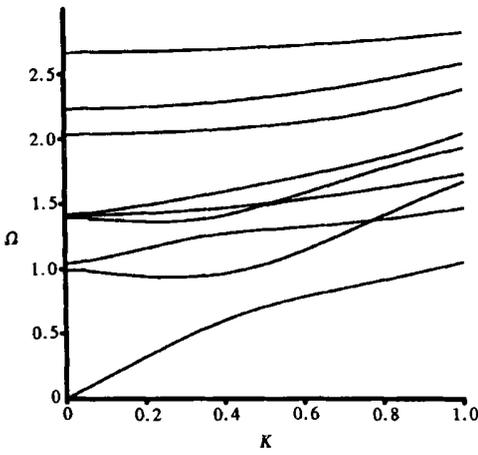
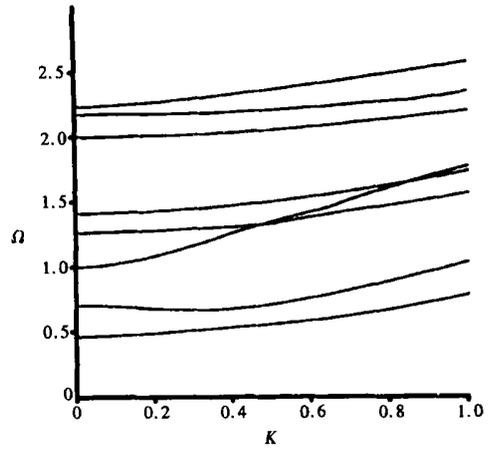
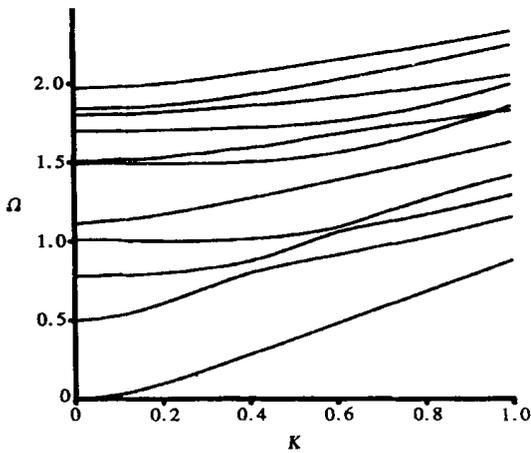
(a) T_a 波(b) T_s 波(c) L_s 波(d) L_a 波(e) B_y 波

图2 方形截面梁中行波的频谱图

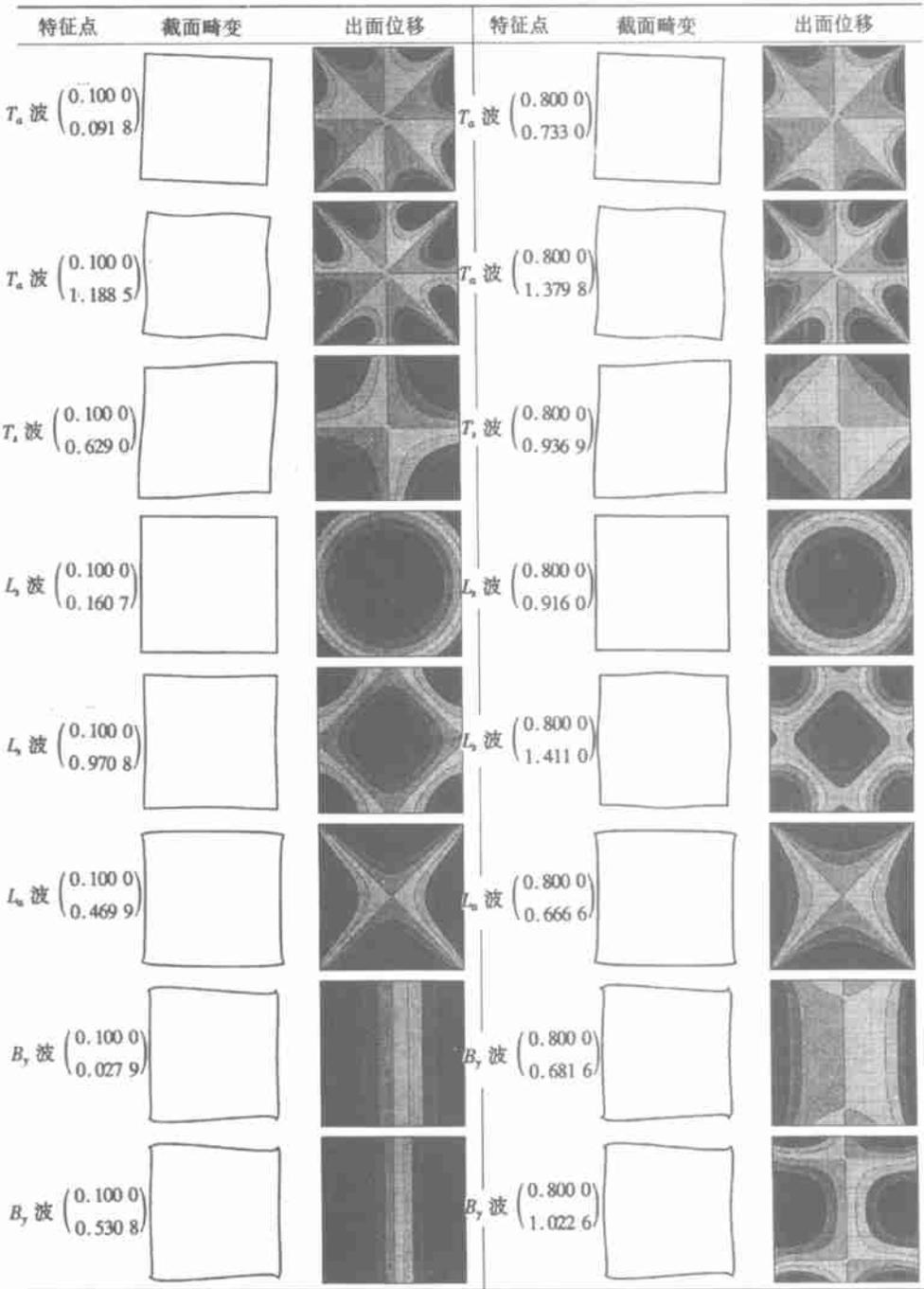


图 3 频散曲线上特征点对应的截面畸变和出面位移

向) 来模拟梁的动力学行为。当 $M = N = 6, 9, 12, 15$ 时, 由相应的频率方程给出的梁中行波的频散关系(曲线)见表 3。可以看出, 在波数 $K \in [0, 1]$ 区间上, 各类行波的一阶频散曲线具有良好的收敛性和稳定性, 通常令 $M = N = 6$ 即能达到 0.01 的计算精度, 且计算结果与参考值完全吻合。对于各类行波的高阶频散曲线, 笔者只以弯曲行波为例, 表 3 给出了其 2~11 阶频散曲线的截止频率, 随着 M, N 的增大, 各阶截止频率均表现出良好的收敛趋势, 当 M

$= N = 15$ 即能达到计算精度要求。

3.2 频谱与波型

图2是梁中行波的频谱图。与配点法^[29]以及有限元法^[30]的计算结果比较,三者的一阶频散曲线完全一致。但需要指出的是,由于配点法采用柱坐标系下波动方程的一般解作为试函数,有限元法也只是将方形截面均分为36个单元,这两种计算方案都不能准确识别梁中行波的高阶频散曲线;而如3.1节所示,本文所得解析解对于高阶频散曲线具有良好的收敛性和稳定性,故本文绘制的频谱图完整、可靠。图3择要给出了频散曲线上一些特征点的截面变形模式。精确理论表明,在小波数时,方形截面梁中三大类型行波的一阶频散曲线呈线性或抛物线变化,对应的波型很好地满足了平面变形假设;随着波数增大,波型发生了变化,由此导致精确理论和近似理论间频散曲线的差异。

4 结 论

1) 本文利用傅里叶级数方法求解三维弹性动力学基本方程,导出了矩形截面梁中波传播的一般解析解。该解具有良好的收敛速度,不仅对于低阶频散曲线有良好的求解精度,而且对于高阶频散曲线也有良好的求解精度。

2) 本文改用配点法(通常采用傅里叶级数展开)来保证所得解析解满足边界条件,实用易行,这种计算方案还可以推广运用于板壳结构的弯曲、振动及稳定的分析研究。

3) 本文以方形截面梁为例进行数值计算,深入揭示了梁中行波传播的固有特性,如完整给出了各类行波的频散曲线,准确确定了频散曲线上特征点对应的波型,这些成果充实了经典弹性动力学的内容。

4) 本文提出了梁波导中波传播的精确模型,这为实现梁中各类行波的耦合控制奠定了坚实基础。

致谢 本文工作得到了郝松林教授的热情鼓励和亲切指导,在此表示衷心感谢!

本课题获得国防科技大学九五预研基金资助,亦在此表示衷心感谢!

[参 考 文 献]

- [1] 林健,黄琳.大型空间结构的动力学建模与控制[J].力学进展,1991,21(3):333—341.
- [2] 黄琳,秦化淑,郑应平,等.复杂控制理论系统:构想和前景[J].自动化学报,1993,19(2):129—136.
- [3] 黄文虎,王文清,张景绘,等.航天柔性结构振动控制的若干新进展[J].力学进展,1997,27(1):5—18.
- [4] Hagedorn P. Active vibration damping in large flexible structures[A]. In: Germain P, Piau M, Caillerie D Eds. Proceeding of the 17th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics [C]. Amsterdam: North_Holland, Elsevier Science Publishers, 1989, 83—100.
- [5] Meirovitch L, Bernighof J K. Modal control traveling waves in flexible structures[J]. Journal of Sound and Vibration, 1986, 111(1): 131—144.
- [6] von Flotow A H. Traveling wave control for large spacecraft structures[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1986, 9(4): 462—468.
- [7] 蒋士勤,张若京.用行波控制技术对弦振动的主动隔振[J].同济大学学报,1991,19(4):489—494.
- [8] 蒋士勤,张若京.梁振动的主动控制[J].同济大学学报,1992,20(2):233—237.
- [9] 程伟.典型结构波传播分析及其在梁振动控制中的应用[D].博士学位论文.北京:北京大学,

- 1994.
- [10] Mace B R. Wave reflection and transmission in beams[J]. Journal of Sound and Vibration, 1984, **97**(2): 237—246.
- [11] Mace B R. Active control of flexible vibrations[J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, **114**(2): 253—270.
- [12] von Flotow A H. Wave absorbing controllers for a flexible beam[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1986, **9**(6): 673—680.
- [13] Pines D J, von Flotow A H. Active control of bending wave propagation at acoustic frequencies[J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, **142**(3): 391—412.
- [14] Elliott S J, Billet L. Adaptive control of flexural waves propagating in a beam[J]. Journal of Sound and Vibration, 1993, **163**(2): 295—310.
- [15] Brennan M J, Elliott S J, Pinnington R J. Strategies for the active control of flexural vibration on a beam[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, **186**(4): 657—688.
- [16] 谭平. 基于行波模型的结构响应控制律研究[J]. 应用力学学报, 1997, **14**(增刊): 88—91.
- [17] Pan J, Hansen C H. Active control of total vibratory power flow in a beam, Part One: Physical system analysis[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1991, **89**(1): 200—209.
- [18] Clark R L, Pan J, Hansen C H. An experimental study of the active control of multi-wave types in an elastic beam[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1992, **92**(2): 871—876.
- [19] Gardonio P, Elliott S J. Active control of waves on a one-dimensional structure with a scattering termination[J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, **192**(3): 701—730.
- [20] 阿肯巴赫 J D. 弹性固体中波的传播[M]. 徐植信, 洪锦如译. 上海: 同济大学出版社, 1992.
- [21] 艾龙根 A C, 舒朝毕 E S. 弹性动力学[M]. 线性理论. 第二卷. 戈革译. 北京: 石油工业出版社, 1983.
- [22] 张承宗, 杨光松. 各向异性板结构横向弯曲问题一般解析解[J]. 力学学报, 1996, **28**(4): 429—440.
- [23] 孙卫明, 杨光松. Reissner 厚板弹性弯曲的一般解析解[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(1): 79—87.
- [24] 孙卫明, 杨光松, 张承宗. 双参数地基上弹性厚板弯曲的一般解析解[J]. 工程力学, 1999, **16**(2): 71—78.
- [25] 孙卫明. 矩形截面梁中行波传播的精确分析与控制[D]. 硕士学位论文. 长沙: 国防科技大学, 1998.
- [26] 徐次达. 固体力学加权残值法[M]. 上海: 同济大学出版社, 1987.
- [27] 范家让, 盛宏玉. 具有固支边的强厚度叠层板的精确解[J]. 力学学报, 1992, **24**(5): 574—583.
- [28] 黄炎. 弹性薄板理论[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1992.
- [29] Fraser W B. Stress wave propagation in rectangular bars[J]. International Journal of Solids and Structures, 1969, **5**(4): 379—397.
- [30] Onipede O Jr, Dong S B. Propagating waves and end modes in pretwisted beams[J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, **195**(2): 313—330.

Exact Analysis of Wave Propagation in An Infinite Rectangular Beam

SUN Wei_ming^{1,2}, YANG Guang_song³, LI Dong_xu⁴

(1. Institute of Engineering Mechanics, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, P. R. China;

2. Department of Nuclear Science and Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, P. R. China;

3. Third Institute, Second Artillery Academy of Equipment, Beijing 100085, P. R. China;

4. College of Aerospace and Material Engineering, National University of Defence Technology, Changsha 410073, P. R. China)

Abstract: The Fourier series method was extended for the exact analysis of wave propagation in an infinite rectangular beam. Initially, by solving the three dimensional elastodynamic equations a general analytic solution was derived for wave motion within the beam. And then for the beam with stress free boundaries, the propagation characteristics of elastic waves were presented. This accurate wave propagation model lays a solid foundation of simultaneous control of coupled waves in the beam.

Key words: infinite rectangular beam; wave propagation; exact analysis; Fourier series; traveling wave; active control