应用数学和力学，第10卷第8期(1989年8月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

不可压缩弹性固体中的二维应力波分析

唐之景　丁启财　李永池
(中国科学技术大学)　(美国伊利诺大学芝加哥校区)　(中国科学技术大学)

(段祝平推荐，1988年3月30日收到)

摘　要

本文研究不可压缩弹性固体中的二维应力波．首先对一般的应变能函数给出了分析简单波和激波的基本方程，然后求出了波速和相应的本征向量，证明在一般情况下有两组简单波和两组激波，最后举了平面变形和反平面变形两个例子．在平面变形的情况下，平面激波的斜反射问题一般无解．

一、引　言

最近几年中，弹性波的非线性理论引起了许多研究者的关注，例如Chu[1]，Bland[2-4]，Davison[5]，Collins[6]，Howard[7]，Li 和 Ting[8]，Tang 和 Ting[9]．但是他们的研究基本上限于一维平面波．二维波的研究要复杂得多，至今所见到的文献不多．Li和Ting[10]就几种特殊形式的弹性应变能函数研究了平面激波在边界上的斜反射，得出的解是一组中心简单波和激波．在本文中我们要考虑一般形式的应变能函数，但假设材料是不可压缩的．

Chu[1]和Collins[6]研究过不可压缩弹性体中的一维应力波．他们的结果表明，当材料是不可压缩时，应力波的分析可以简化．Whitworth[11]研究了有内约束（包括不可压缩）的材料中的一维平面简单波，得出了解析解．Duszczyk 等人[12,13]就一种特殊的不可压缩材料研究了波的斜反射，指出在某些边界条件下波的斜反射问题无解．Wright[14]最近研究了非线性不可压缩弹性杆中的波，给出了一些非常有趣的定常解．

本文中我们将研究非线性不可压缩弹性体中的二维应力波，第二节中将给出不可压缩材料的弹性动力学基本方程，接下去在第三节和第四节分别讨论简单波和激波，第五节求出简化声学张量的本征值和本征向量，最后两节中把前面得出的一般结果运用于平面变形和反平面变形．

二、基 本 方 程

在一个直角坐标系中，令$\mathbf{X}$为未变形状态下的质点位置，$\mathbf{x}$为质点在任意时刻t的位置，则变形体的运动可用下面的方程来描述

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X},t) \tag{2.1}$$

质点速度$\mathbf{v}$和变形梯度$\mathbf{F}$定义为

$$v_i=\frac{\partial x_i}{\partial t},\quad F_{i\alpha}=\frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} \tag{2.2}$$

本文中一个张量有时用黑体字母表示，有时用带下标的分量来表示。拉丁字母下标对应于变形后的流形，而希腊字母下标对应于参考流形。有了这些定义，连续体的运动方程和连续性条件可以写为

$$T_{i\alpha,\alpha}-\rho_0\dot{v}_i=0,\quad v_{i,\alpha}-\dot{F}_{i\alpha}=0 \tag{2.3}$$

这里ρ_0是参考流形下的质量密度，$T_{i\alpha}$是第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量，字母头上一点代表对时间求导数，而逗号后面的下标表示对相应的空间坐标求偏导数。除非特别声明，求和定约有效，即对重复的下标，总认为是对它从1到3求和。

因为所考虑的材料是不可压缩的，所以有

$$\det\mathbf{F}=1 \tag{2.4}$$

这里det表示取行列式的运算。定义矩阵$\mathbf{F}$的共轭为

$$F^*_{i\alpha}=\frac{1}{2}e_{ijk}e_{\alpha\beta\gamma}F_{j\beta}F_{k\gamma} \tag{2.5}$$

其中e_{ijk}是置换符号。从(2.4)和(2.5)得

$$F_{i\alpha}F^*_{i\beta}=(\det\mathbf{F})\delta_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta},\quad F_{i\alpha}F^*_{j\alpha}=(\det\mathbf{F})\delta_{ij}=\delta_{ij} \tag{2.6}$$

或者写成

$$\mathbf{F}^T\mathbf{F}^*=\mathbf{I},\quad \mathbf{F}\mathbf{F}^{*T}=\mathbf{I} \tag{2.7}$$

此处δ_{ij}是 Kronecker δ函数，$\mathbf{I}$是单位矩阵，上标T表示对矩阵转置。

由(2.4)式对时间求导，得

$$F^*_{i\alpha}\dot{F}_{i\alpha}=0 \tag{2.8}$$

因此不可压缩弹性体的本构方程可以写成

$$T_{i\alpha}=\frac{\partial W}{\partial F_{i\alpha}}-\lambda F^*_{i\alpha} \tag{2.9}$$

这里W是弹性应变能，λ为 Lagrange 乘子。(2.9) 中的第二项是由不可压缩性引起的，对于满足(2.8)式的任何变形，这一项都不做功。

令Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ为 Cauchy-Green 张量$\mathbf{B}=\mathbf{F}\mathbf{F}^T$的三个主不变量，因为

$$\text{Ⅲ}=\det\mathbf{B}=(\det\mathbf{F})^2=1 \tag{2.10}$$

所以弹性应变能函数W可以写成

$$W=W(\text{Ⅰ},\text{Ⅱ}) \tag{2.11}$$

方程(2.3)、(2.9)和(2.11)就是我们所需要的基本方程组。

三、简 单 波

对于简单波解，所有的变量都可以通过下述方程表示为单参数φ的函数[15]

$$\mathbf{X}^T\mathbf{N}(\varphi)-tc(\varphi)=g(\varphi) \tag{3.1}$$

其中$\mathbf{N}$，c，g都是φ的函数。对于固定的φ，(3.1) 表示 Lagrange 空间中的一张平面，有单位法向量$\mathbf{N}$并以速度c运动。对(3.1) 求导，得到

$$\varphi_{,\alpha}=N_\alpha/(g'+tc'-X_\beta N'_\beta),\quad \dot{\varphi}=-c/(g'+tc'-X_\beta N'_\beta) \tag{3.2}$$

此处撇代表对参量φ求导。

注意到$\mathbf{T}$，$\mathbf{F}$，$\mathbf{v}$都是φ的函数，利用(3.2)我们可以把(2.3) 改写成

$$T'_{i\alpha}N_\alpha+\rho_0 c v'_i=0,\quad v'_i N_\alpha+cF'_{i\alpha}=0 \tag{3.3}$$

定义弹性模量和声学张量分别为

$$C_{i\alpha j\beta}=\frac{\partial^2 W}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}},\quad Q_{ij}=C_{i\alpha j\beta}N_\alpha N_\beta \tag{3.4}$$

显然$C_{i\alpha j\beta}=C_{j\beta i\alpha}$，$Q_{ij}=Q_{ji}$。但由于材料是非线性的，$C_{i\alpha j\beta}$和$Q_{ij}$是变形梯度**F**的函数。

把(2.9)式代入(3.3)，然后消去$F'_{i\alpha}$，可得

$$(Q_{ij}-\rho_0 c^2\delta_{ij})v'_j+c\lambda' F^*_{i\alpha}N_\alpha+c\lambda F^{*\prime}_{i\alpha}N_\alpha=0 \tag{3.5}$$

注意到置换符号的反对称性，由(2.5)式和(3.3)中的第二个方程，我们有

$$F^{*\prime}_{i\alpha}N_\alpha=e_{ijk}e_{\alpha\beta\gamma}F_{j\beta}F'_{k\gamma}N_\alpha=e_{ijk}e_{\alpha\beta\gamma}F_{j\beta}(-v'_k N_\gamma/c)N_\alpha$$

$$=-\frac{1}{c}e_{ijk}F_{j\beta}v'_k(e_{\alpha\beta\gamma}N_\gamma N_\alpha)=0 \tag{3.6}$$

因此(3.5)简化为

$$(\mathbf{Q}-\rho_0 c^2\mathbf{I})\mathbf{v}'+c\lambda'\mathbf{f}^*=\mathbf{0} \tag{3.7}$$

其中引入了记号

$$\mathbf{f}^*=\mathbf{F}^*\mathbf{N} \tag{3.8}$$

由(2.8)和(3.3)中第二式，有

$$F^*_{i\alpha}v'_i N_\alpha=0 \quad 或 \quad \mathbf{v}'^T\mathbf{f}^*=0 \tag{3.9}$$

可以证明，若**n**是流形**x**中的垂直于波平面的单位向量，则$\mathbf{f}^*$平行于**n**，而$\mathbf{v}'$垂直于**n**。

用$\mathbf{f}^*$去左乘(3.7)式，并利用(3.9)，得

$$\mathbf{f}^{*T}\mathbf{Q}\mathbf{v}'+c\lambda'\mathbf{f}^{*T}\mathbf{f}^*=0$$

由此解出λ'为

$$\lambda'=-\mathbf{f}^{*T}\mathbf{Q}\mathbf{v}'/c\mathbf{f}^{*T}\mathbf{f}^* \tag{3.10}$$

利用(3.10)式，则(3.7)可以改写成

$$\{(\mathbf{I}-\mathbf{f}^*\mathbf{f}^{*T}/\mathbf{f}^{*T}\mathbf{f}^*)\mathbf{Q}-\rho_0 c^2\mathbf{I}\}\mathbf{v}'=\mathbf{0} \tag{3.11}$$

若定义简化声学张量$\overline{\mathbf{Q}}$为

$$\overline{\mathbf{Q}}=(\mathbf{I}-\mathbf{f}^*\mathbf{f}^{*T}/\mathbf{f}^{*T}\mathbf{f}^*)\mathbf{Q} \tag{3.12}$$

则(3.11)可以写成

$$(\overline{\mathbf{Q}}-\rho_0 c^2\mathbf{I})\mathbf{v}'=\mathbf{0} \tag{3.13}$$

(3.13)式告诉我们，$\rho_0 c^2$是$\overline{\mathbf{Q}}$的本征值，$\mathbf{v}'$是$\overline{\mathbf{Q}}$相应的右本征向量。这里有几点值得注意：(i) 因为问题是非线性的，求出的本征值和本征向量依赖于变形梯度**F**；(ii) 由(3.12)可知$\overline{\mathbf{Q}}$是非对称的，因此它的左本征向量和右本征向量通常不相等；(iii) $\mathbf{f}^{*T}\overline{\mathbf{Q}}=\mathbf{0}$，这说明$\overline{\mathbf{Q}}$是奇异的，有本征值$\rho_0 c^2=0$和相应的左本征向量$\mathbf{f}^*$。

(3.12)中定义的简化声学张量$\overline{\mathbf{Q}}$是Lagrange形式的，文献[16]中的(78.7)给出了Euler形式的简化声学张量。

设**r**为$\overline{\mathbf{Q}}$的右本征向量，则由(3.13)，(3.3)和(2.9)可得

$$\left.\begin{aligned}&v'_i=-\omega c r_i,\quad F'_{i\alpha}=\omega r_i N_\alpha\\&T'_{i\alpha}=\omega\left\{C_{i\alpha j\beta}r_j N_\beta-\frac{\mathbf{f}^{*T}\mathbf{Q}\mathbf{r}}{\mathbf{f}^{*T}\mathbf{f}^*}F^*_{i\alpha}-\lambda e_{ijk}e_{\alpha\beta\gamma}F_{j\beta}r_k N_\gamma\right\}\end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

此处φ是新引进的待定参数。(3.14)中的最后一个式子是通过微分(2.9)再利用(3.4)，(3.2)

和(2.5)得到的。

为了求ω，我们注意到波速c不仅依赖于φ，还依赖于$\mathbf{F}$，即

$$\frac{dc}{d\varphi}=\frac{\partial c}{\partial\varphi}+\frac{\partial c}{\partial F_{i\alpha}}F'_{i\alpha}=\frac{\partial c}{\partial\varphi}+\omega r_i N_\alpha\frac{\partial c}{\partial F_{i\alpha}},$$

因此

$$\omega=\frac{dc/d\varphi-\partial c/\partial\varphi}{r_i N_\alpha \partial c/\partial F_{i\alpha}} \tag{3.15}$$

当(3.15)式右端分母在某一点为零时，我们称方程在该点为线性退化的[17]。

方程(3.14)一般很难解析地积分出来，除了非常特殊的情况，例如一维简单波[19]，因此数值积分是比较普遍的。

四、激 波

考虑一个具有法向量$\mathbf{N}$的平面激波，令h^+和h^-分别代表一个物理量h在波前和波后的值，用$[h]$表示h的间断，即

$$[h]=h^- - h^+ \tag{4.1}$$

与(3.3)式相对应，跨过激波有一个动量守恒条件和一个位移连续条件，用(4.1)的记号写出来就是

$$[\mathbf{T}]\mathbf{N}+\rho_0 V[\mathbf{v}]=0,\quad [\mathbf{v}]\mathbf{N}^T+V[\mathbf{F}]=0 \tag{4.2}$$

其中V是激波波速。一个稳定的激波还必须满足 Lax 条件[18]

$$c^-\geqslant V\geqslant c^+ \tag{4.3}$$

根据(3.14)，若令

$$[\mathbf{v}]=-\Omega V\mathbf{R},\quad [\mathbf{F}]=\Omega\mathbf{R}\mathbf{N}^T \tag{4.4}$$

则(4.2)的第二个方程自动得到满足，从第一个方程中消去$[\mathbf{v}]$，我们得到

$$[\mathbf{T}]\mathbf{N}-\rho_0 V^2[\mathbf{F}]\mathbf{N}=0 \tag{4.5}$$

至此我们还没有用到本构方程，因此方程(4.4)和(4.5)是与(4.2)等价的，适用于任何平面激波。当特定的本构关系代入后，就可以作进一步的推导。例如我们可以把(2.9)式表达成

$$[\mathbf{T}]=\bar{\mathbf{U}}[\mathbf{F}] \tag{4.6}$$

再代入(4.5)就得到

$$(\bar{\mathbf{U}}-\rho_0 V^2\mathbf{I})\mathbf{R}=0 \tag{4.7}$$

(4.7)式是与(3.13)相对应的，后面我们还要回过头来讨论它。现在先看看材料的不可压缩性对激波有什么限制。

从(2.5)和(2.6)，我们有

$$e_{jkl}e_{\alpha\beta\gamma}F_{k\beta}F_{l\gamma}F_{i\alpha}/2=\delta_{ij} \tag{4.8}$$

这个方程在激波前后都应该成立，若我们代进

$$\mathbf{F}^-=[\mathbf{F}]+\mathbf{F}^+=\Omega\mathbf{R}\mathbf{N}^T+\mathbf{F}^+ \tag{4.9}$$

并注意到，由于置换符号的反对称性，含有两个以上$\mathbf{N}$分量的项都是零，就得到

$$2e_{ikl}e_{\alpha\beta\gamma}R_k N_\beta F^+_{l\gamma}F^+_{j\alpha}+e_{ikl}e_{\alpha\beta\gamma}R_j N_\alpha F^+_{k\beta}F^+_{l\gamma}=0 \tag{4.10}$$

设下标$i=j$即得

$$\mathbf{R}^T\mathbf{f}^{*+}=0 \tag{4.11}$$

(4.11)式是与(3.9)相对应的，它是材料的不可压缩性对激波的限制。

解方程(4.7)可以得到激波波速V和右本征向量$\mathbf{R}$。一般来说它们是$\mathbf{F}^+$和$\mathbf{F}^-$的函数，然而通过(4.4)式可以把它们表示成参数Ω的隐函数。这里Ω所起的作用和(3.14)中ω所起的作用是一样的，不同的是这里是代数方程而不是微分方程。

注意到方程(4.2)和(3.3)在形式上是一样的、因此当激波很弱，也即间断很小时，差分方程(4.2)就变为微分方程(3.3)，而(4.4)式就化为(3.14)中的前两式。这意味着激波曲线和简单波曲线是相切的。同样可以证明，这两组曲线在它们的相切点上曲率也一样[10]。

五、简化声学张量$\overline{\mathbf{Q}}$的本征值和本征向量

从第三节我们知道，简化声学张量$\overline{\mathbf{Q}}$是奇异的，它有一个零本征值。这一节我们要把$\overline{\mathbf{Q}}$中奇异的部分分离出来，把三维的本征问题简化为二维的问题。为此引进向量$\mathbf{L}$和$\mathbf{M}$

$$\mathbf{L}=\mathbf{N}'/(\mathbf{N}'^T\mathbf{N}')^{1/2},\quad \mathbf{M}=\mathbf{N}\times\mathbf{L} \tag{5.1}$$

这样$(\mathbf{L},\mathbf{M},\mathbf{N})$就构成了一组正交单位向量。

在(5.1)中我们假定了$\mathbf{N}'\neq 0$，这在目前的情况下总是对的，否则问题就转变成一维平面波了。另外若我们把$\mathbf{N}(\varphi)$看作是一空间曲线的切向，则$\mathbf{L}$和$\mathbf{M}$对应于该曲线的主法向和次法向。因此，即使是在$\mathbf{N}'=0$的情况下，$\mathbf{L}$和$\mathbf{M}$也总是可以定义的。

再引进

$$\bar{\mathbf{f}}_1=\mathbf{FL},\quad \bar{\mathbf{f}}_2=\left(\mathbf{I}-\frac{\bar{\mathbf{f}}_1\bar{\mathbf{f}}_1^T}{\bar{\mathbf{f}}_1^T\bar{\mathbf{f}}_1}\right)\mathbf{FM},\quad \bar{\mathbf{f}}_3=\mathbf{F}^*\mathbf{N}=\mathbf{f}^* \tag{5.2}$$

并归一化

$$\mathbf{f}_i=\bar{\mathbf{f}}_i/(\bar{\mathbf{f}}_i^T\bar{\mathbf{f}}_i)^{1/2}\qquad i=1,\ 2,\ 3,\ i\text{不求和} \tag{5.3}$$

则$(\mathbf{f}_1,\ \mathbf{f}_2,\ \mathbf{f}_3)$构成一组正交单位向量。

若我们将$\overline{\mathbf{Q}}$的右本征向量$\mathbf{r}$按$\mathbf{f}_i$展开

$$\mathbf{r}=a_i\mathbf{f}_i \tag{5.4}$$

代入(3.11)并设

$$\mathbf{Q}\mathbf{f}_i=S_{ij}\mathbf{f}_j \tag{5.5}$$

可得下列方程

$$S_{ij}a_i\mathbf{f}_j-S_{i3}a_i\mathbf{f}_3-\rho_0c^2a_i\mathbf{f}_i=0 \tag{5.6}$$

利用$\mathbf{f}_i$的正交性，系数S_{ij}可以从(5.5)式求出

$$S_{ij}=\mathbf{f}_j^T\mathbf{Q}\mathbf{f}_i \tag{5.7}$$

因为$\mathbf{Q}$是对称的。所以$\mathbf{S}$也是对称的

$$S_{ij}=S_{ji} \tag{5.8}$$

由于$\mathbf{f}_i$是线性独立的，(5.6)等价于下述一组方程

$$S_{1i}a_i-\rho_0c^2a_1=0,\quad S_{2i}a_i-\rho_0c^2a_2=0,\quad \rho_0c^2a_3=0 \tag{5.9}$$

从(3.9)和(3.14)的第一式得

$$\mathbf{r}^T\mathbf{f}_3=0 \tag{5.10}$$

再从(5.4)可得

$$a_3=0 \tag{5.11}$$

若记

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix},\quad \mathbf{a}=\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \tag{5.12}$$

则(5.9)简化为

$$(\mathbf{S}-\rho_0 c^2\mathbf{I})\mathbf{a}=0 \tag{5.13}$$

这样我们就把$\bar{\mathbf{Q}}$中奇异的部分分离出来了，三维的本征值问题(3.13)简化为二维的本征值问题(5.13)，其中$\mathbf{S}$是对称的、正定的。

对激波的本征值问题(4.7)也可以作同样的简化，只要构造一组正交向量，其中包括$\mathbf{f}^{*+}$，再把右本征向量$\mathbf{R}$按这组向量展开就行了。

这样我们就证明了，在非线性不可压缩弹性固体中，存在两组简单波解和两组激波解。

六、平面应变的情况

对于平面应变，(2.1)取如下形式

$$x_1=x_1(X_1,X_2,t),\quad x_2=x_2(X_1,X_2,t),\quad x_3=X_3 \tag{6.1}$$

变形梯度和它的共轭分别是

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{F}^*=\begin{bmatrix} F_{22} & -F_{21} & 0 \\ -F_{12} & F_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

由此可见，X_3方向是Cauchy-Green张量$\mathbf{B}$的一个主方向，在此方向上有单位拉伸率，因此

$$1-\mathrm{I}+\mathrm{II}-\mathrm{III}=0 \tag{6.3}$$

利用(2.10)$\mathrm{III}=1$可得

$$\mathrm{II}=\mathrm{I} \tag{6.4}$$

这就是说，当运动被限于二维平面内时，只有一个主不变量是独立的。我们选取

$$q=(F_{i\alpha}F_{i\alpha}-3)/2=(\mathrm{I}-3)/2 \tag{6.5}$$

作为独立不变量，将(2.11)写成

$$W=W(q) \tag{6.6}$$

声学张量由(3.4)给出，为

$$\mathbf{Q}=W_q\mathbf{I}+W_{qq}\mathbf{f}\mathbf{f}^T \tag{6.7}$$

这里下标q表示对q求导，

$$\mathbf{f}=\mathbf{F}\mathbf{N} \tag{6.8}$$

因为运动被限于(X_1,X_2)平面内，可令

$$\mathbf{N}=\begin{Bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix},\quad \mathbf{L}=\begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix},\quad \mathbf{M}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{6.9}$$

此处我们选择了$\varphi=\theta$作为参数。把(6.2)和(6.9)代入(5.2)，得到

$$\bar{\mathbf{f}}_1=\begin{Bmatrix} F_{11}\cos\theta+F_{12}\sin\theta \\ F_{21}\cos\theta+F_{22}\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix},\quad \bar{\mathbf{f}}_2=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix},\quad \bar{\mathbf{f}}_3=\begin{Bmatrix} F_{22}\sin\theta+F_{21}\cos\theta \\ -F_{12}\sin\theta-F_{11}\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{6.10}$$

再由(5.3)和(5.7)得到

$$S_{11}=W_q+W_{qq}(\mathbf{f}_1^T\mathbf{f})^2,\ S_{12}=S_{21}=0,\ S_{22}=W_q \tag{6.11}$$

因此，波速和本征向量可以从(5.13)和(5.4)得出

$$\rho_0 c_1^2=S_{11}=W_q+W_{qq}(\mathbf{f}_1^T\mathbf{f})^2,\ \mathbf{r}_1=\mathbf{f}_1 \tag{6.12}$$

$$\rho_0 c_2^2=S_{22}=W_q,\ \mathbf{r}_2=\mathbf{f}_2 \tag{6.13}$$

因为向量$\mathbf{f}_2$不在(X_1, X_2)平面内，第二组解(6.13)与我们的假设(6.1)矛盾，必须去掉。因此，对于不可压缩材料中的平面变形运动我们只得到一组简单波解。这也是预料中的事。因为在一般的弹性材料中有三组简单波解；当我们假定材料是不可压缩的时候，就只有两组解了；当我们进一步把运动限制于(X_1, X_2)平面内时，当然只有一组解了。

现在我们有了波速和本征向量，简单波的解就由(3.14)式给出。利用(6.8)定义的$\mathbf{f}$和

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1=\mathbf{f}_1=\mathbf{F}\mathbf{N}' \tag{6.14}$$

可以将(3.14)中的第二式写成另一种等价的形式

$$\mathbf{r}'=-\mathbf{f},\ \mathbf{f}'=(1+\omega)\mathbf{r} \tag{6.15}$$

同样，(6.5)中定义的q也可以表示成$\mathbf{r}$和$\mathbf{f}$的函数。因为

$$\mathbf{r}^T\mathbf{r}+\mathbf{f}^T\mathbf{f}=\mathbf{N}'^T\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{N}'+\mathbf{N}^T\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{N}=F_{i\alpha}F_{i\beta}(N'_\alpha N'_\beta+N_\alpha N_\beta)=F_{i\alpha}F_{i\alpha}-1 \tag{6.16}$$

所以有

$$q=(\mathbf{r}^T\mathbf{r}+\mathbf{f}^T\mathbf{f}-2)/2,\ q'=\omega\mathbf{r}^T\mathbf{f} \tag{6.17}$$

可以证明，在平面变形的情况下，q是非负的

$$q=\frac{1}{2}\{(F_{11}-F_{22})^2+(F_{12}+F_{21})^2\}\geqslant 0 \tag{6.18}$$

若(6.9)中的θ是波阵面与$X_2=0$平面之间的夹角，则我们得到的解是一组中心简单波。在这种情况下

$$c/\sin\theta=\mathrm{const} \tag{6.19}$$

把(6.19)和(6.12)代入(3.15)，求得

$$\omega=\frac{2W_q\cot\theta+2W_{qq}\{(\mathbf{r}^T\mathbf{f})/(\mathbf{r}^T\mathbf{r})^2\}\{1+\mathbf{r}^T\mathbf{r}\mathbf{r}^T(\mathbf{f}\cot\theta-\mathbf{r})\}}{\mathbf{r}^T\mathbf{f}\{3W_{qq}+W_{qqq}(\mathbf{r}^T\mathbf{f})^2/(\mathbf{r}^T\mathbf{r})\}} \tag{6.20}$$

下面我们考虑平面变形条件下的激波。从(4.4)的第二式，我们有

$$[\mathbf{F}]\mathbf{N}=[\mathbf{f}]=\Omega\mathbf{R},\ [\mathbf{F}]\mathbf{L}=[\mathbf{r}]=0 \tag{6.21}$$

再从(6.10)

$$[\mathbf{F}^*]\mathbf{N}=[\mathbf{f}^*]=0 \tag{6.22}$$

把(6.6)代入(2.9)并利用(4.5)，得到

$$[W_q]\mathbf{f}^+-[\lambda]\mathbf{f}^*=(\rho_0V^2-W_q^-)\Omega\mathbf{R} \tag{6.23}$$

因为

$$\Omega\mathbf{R}^T\mathbf{f}^*=[\mathbf{f}]^T\mathbf{f}^*=[\mathbf{f}^T\mathbf{f}^*]=0 \tag{6.24}$$

所以从(6.23)可解出

$$\rho_0V^2=W_q^-+[W_q]\mathbf{R}^T\mathbf{f}^+/(\Omega\mathbf{R}^T\mathbf{R}),\ [\lambda]=[W_q]\mathbf{f}^{*T}\mathbf{f}^+/\mathbf{f}^{*T}\mathbf{f}^*=[W_q]/(\mathbf{f}^{*T}\mathbf{f}^*) \tag{6.25}$$

注意到$\mathbf{r}$和$\mathbf{R}$都是(X_1, X_2)平面内的向量，且它们都与向量$\mathbf{f}^*$垂直，因此它们互相平行。为简单起见可取

$$\mathbf{R}=\mathbf{r} \tag{6.26}$$

将 Lax 不等式(4.3)写成更为方便的形式

$$\rho_0(c^-)^2 \geqslant \rho_0 V^2 \geqslant \rho_0(c^+)^2 \tag{6.27}$$

利用(6.12)和(6.25)，得

$$\left.\begin{array}{l} W_{qq}^-(\mathbf{r}^T\mathbf{f}^-)^2-[W_q](\mathbf{r}^T\mathbf{f}^+)/\Omega \geqslant 0 \\ [W_q](\mathbf{r}^T\mathbf{r}+\mathbf{r}^T\mathbf{f}^+/\Omega)-W_{qq}^+(\mathbf{r}^T\mathbf{f}^+)^2 \geqslant 0 \end{array}\right\} \tag{6.28}$$

上面两式相加，有

$$[W_q\mathbf{r}^T\mathbf{r}+W_{qq}(\mathbf{r}^T\mathbf{f})^2] \geqslant 0 \tag{6.29}$$

最后，由(6.17)和(6.21)，得到

$$[q]=\frac{1}{2}\Omega^2\mathbf{r}^T\mathbf{r}+\Omega\mathbf{r}^T\mathbf{f}^+ \tag{6.30}$$

这样我们也只得到一个激波，它的强度由参数Ω确定，它的本征向量由$\mathbf{r}=\mathbf{FL}$给出，$\mathbf{L}$是沿波阵面和(X_1,X_2)平面的交线的向量。

考虑半空间$X_2>0$，假定我们要解平面激波的斜反射问题。我们的任务是要找到一个合适的中心简单波和激波的组合，使预先给定的边界条件得到满足。通常在二维问题中有两组边界条件，但我们现在只有一组简单波和一组激波，而且一般它们不能同时出现。因此，除了非常特殊的情况，两组边界条件不能同时满足。由此我们得出结论：在不可压缩弹性体中，在平面变形的条件下，激波的斜反射问题一般无解。

七、反平面变形的情况

对于反平面变形，(2.1)取下述形式

$$x_1=X_1,\ \ x_2=X_2,\ \ x_3=X_3+x(X_1,X_2,t) \tag{7.1}$$

此时变形梯度及其共轭为

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ F_{31} & F_{32} & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{F}^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -F_{31} \\ 0 & 1 & -F_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

若选择$\mathbf{L}$，$\mathbf{M}$，$\mathbf{N}$仍与前节一样，则有

$$\mathbf{f}=\mathbf{N}+\gamma\mathbf{M},\ \ \mathbf{f}_1=(\mathbf{L}+\nu\mathbf{M})/(1+\nu^2)^{1/2},\ \ \mathbf{f}_2=(-\nu\mathbf{L}+\mathbf{M})/(1+\nu^2)^{1/2} \tag{7.3}$$

这里

$$\gamma=F_{31}\sin\theta-F_{32}\cos\theta,\ \ \nu=F_{31}\cos\theta+F_{32}\sin\theta \tag{7.4}$$

象在平面变形的情况下一样，现在$\mathbf{B}$也只有一个独立的主不变量，我们还是选择由(6.5)定义的q。应变能函数W及声学张量$\mathbf{Q}$的形式还和前节一样。由(5.7)式求出

$$\left.\begin{array}{l} S_{11}=W_q+W_{qq}\gamma^2\nu^2/(1+\nu^2) \\ S_{12}=S_{21}=W_{qq}\gamma^2\nu/(1+\nu^2) \\ S_{22}=W_q+W_{qq}\gamma^2/(1+\nu^2) \end{array}\right\} \tag{7.5}$$

解出本征值和本征向量，得

$$\rho_0 c_1^2=W_q,\ \ \mathbf{r}_1=\mathbf{L} \tag{7.6}$$

$$\rho_0 c_2^2=W_q+W_{qq}\gamma^2,\ \ \mathbf{r}_2=\mathbf{M} \tag{7.7}$$

第一组解和我们的变形假设(7.1)不符，必须去掉。所以在反平面变形的情况下也只有一组简单波解。$\mathbf{v}'$，$\mathbf{F}'$，λ'由方程(3.10)给出，ω由(3.15)给出

$$\omega=\frac{2(W_q\cos\theta+W_{qq}\gamma)}{\gamma\sin\theta(3W_{qq}+\gamma^2W_{qqq})} \tag{7.8}$$

至于激波，从(7.1)可以看出

$$\mathbf{R}=\mathbf{M} \tag{7.9}$$

因此激波解为

$$\left.\begin{aligned}&[\mathbf{v}]=-\Omega V\mathbf{M},\ [\mathbf{F}]=\Omega\mathbf{M}\mathbf{N}^T\\&\rho_0V^2=W_q^-+[W_q]\gamma^+/\Omega,\ [\lambda]=[W_q]\end{aligned}\right\} \tag{7.10}$$

再从(7.10)的第二式和(7.3)的第一式，有

$$\Omega=[\gamma] \tag{7.11}$$

和前一节的情况相仿，我们得到一组简单波和一组激波。然而，在反平面变形的情况下，激波的斜反射问题可以有解。例如当边界是固定时

$$x(X_1,\ 0,\ t)=0 \tag{7.12}$$

这相当于给定

$$F_{31}=0,\ 在X_2=0 \tag{7.13}$$

这时边界条件实际上只有一个，它可以通过一个反射激波或中心简单波得到满足。

Duszczyk 等人[13]给出了反平面变形情况下激波斜反射问题的一个具体解，他们还讨论了其他形式的边界条件，发现在自由边界的情况下没有解。

参 考 文 献

[1] Chu, B.-T., Finite amplitude waves in incompressible perfectly elastic materials, *J. Mech. Phys. Solids*, **12** (1964), 45—57.

[2] Bland, D. R., On shock waves in hyperelastic media, *IUTAM Symp. on Second-Order Effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics* (1964), 93—108.

[3] Bland, D. R., Dilatational waves and shock waves in large displacement isentropic dynamic elasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, **12** (1964), 245—267.

[4] Bland, D. R., Plane isentropic large displacement simple waves in a compressible elastic solid, *Z. Angew. Math. Phys.*, **16** (1965), 752—769.

[5] Davison, L., Propagation of plane waves of finite amplitude in elastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, **14** (1966), 247—270.

[6] Collins, W. D., One-dimensional non-linear wave propagation in incompressible elastic materials, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **19** (1966), 259—328.

[7] Howard, I. C., Finite simple waves in a compressible transversely isotropic elastic solid, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **19** (1966), 329—341.

[8] Li, Y. and T. C. T. Ting, Plane waves in simple elastic solids and discontinuous dependence of solution on boundary conditions, *Int. J. Solids Structures*, **19** (1983), 989—1008.

[9] Tang, Z. and T. C. T. Ting, Wave curves for the Riemann problem of plane waves in isotropic elastic solids, *Int. J. Engng. Sci.*, **25** (1987), 1343—1381.

[10] Li, Y. and T. C. T. Ting, Simple waves and shock waves generated by an incident shock wave in two-dimensional hyperelastic materials, *J. Appl. Mech.*, **51** (1984), 586—594.

[11] Whitworth, A. M., Simple waves in constrained elastic materials, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **35** (1982), 461—484.

[12] Duszczyk, B., S. Kosinski and Z. Wesolowski, Shock reflection patterns in a

rubber-like material, *Arch. Mech.*, **36** (1984), 587—602.

[13] Duszczyk, B., S. Kosinski and Z. Wesolowski, Reflection of oblique shock waves in incompressible elastic solids, *J. Austral Math. Soc.*, **B27** (1985), 31—47.

[14] Wright, T. W., Nonlinear waves in a rod: Results for incompressible elastic materials, *Stud. Appl. Math.*, **72** (1985), 149—160.

[15] Varley, E., Simple waves in general elastic materials, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **20** (1965), 309—328.

[16] Truesdell, C. and W. Noll, The non-linear field theory of mechanics, *Handbuch der Physik*, Vol. III/3, Springer-Verlag, Berlin (1965).

[17] Daformos, C. M., Quasilinear hyperbolic systems that result from conservation laws, *Nonlinear Waves*, ed. S. Leibovich and A. R. SeeBass, Cornell Univ. Press (1974), 82—102.

[18] Lax, P. D., Hyperbolic systems of conservation laws I, *Commun. on Pure and Appl. Math.*, **10** (1957), 537—566.

[19] Tang, Z., Wave curves for the Riemann problem of plane waves in simple isotropic elastic solids, Ph. D. Thesis, Univ. of Illinois at Chicago (1985).

Two-Dimensional Stress Wave Analysis in Incompressible Elastic Solids

Tang Zhi-jing

(*University of Science and Technology of China, Hefei*)

T. C. T. Ting

(*University of Illinois at Chicago, U. S. A.*)

Li Yong-chi

(*University of Science and Technology of China, Hefei*)

Abstract

Two-dimensional stress waves in a general incompressible elastic solid are investigated. First, basic equations for simple waves and shock waves are presented for a general strain energy function. Then the characteristic wave speeds and the associated characteristic vectors are deduced. It is shown that there usually exist two simple waves and two shock waves. Finally, two examples are given for the case of plane strain deformation and antiplane strain deformation, respectively. It is proved that, in the case of plane strain deformation, the oblique reflection problem of a plane shock is not solvable in general.