应用数学和力学，第10卷第7期(1989年7月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Ungar 微分变换在弹性动力学中的一个应用*

胡德绥

(成都地质学院，1987年12月25日收到)

摘要

近些年来，在求解弹性波方面的一些问题时，许多著者都应用了Cagniard—de Hoop 方法[1][2]。但是，在使用该法时，定要进行一些比较复杂的改变积分路径的工作。A．Ungar 所提出的一种微分变换[3~6]可以避免这种困难。本文应用Ungar 微分变换来求解 Lamb问题[1][2]的一情形。

一

A．Ungar 所定义的微分变换T[3~6]可表述为：设$f(\boldsymbol{x};\lambda)$是$x$和$\lambda$的解析函数，则函数$s^n f(\boldsymbol{x};\lambda)\exp[-st^*]$的微分变换$T$为

$$T\{s^n f(\boldsymbol{x};\lambda)\ \exp\ [-st^*]\}=\partial_t^n\ \{f(\boldsymbol{x};\lambda^*)\dot{\lambda}^*\}\quad (n=0,1,2,\cdots)\tag{1.1}$$

其中

（1） $\boldsymbol{x}(x_1,x_2,x_3)$表三维空间中的点，而$\lambda$及$t$是参数；

（2） $t^*=t^*(\boldsymbol{x};\lambda)$是$\boldsymbol{x}$及$\lambda$的解析函数，且$\partial t^*/\partial\lambda\neq 0$；

（3） $t^*(\boldsymbol{x};\lambda^*(\boldsymbol{x};t))=t$，$\lambda^*(\boldsymbol{x};t^*(\boldsymbol{x};\lambda))=\lambda$；

（4） s是表达微分运算的符号，视为变量，$0<s<\infty$；

（5） $\dot{\lambda}^*=\partial_t\lambda^*$，$\partial_t^n$ 表示对t的 n 阶微分算子。

为了揭示以上所定义的微分变换 T 与 Laplace 变换之间的联系，可使用 $Q\int_0^\infty d\lambda$ 来代替 T，Q 是个待定的算子。要确定 Q，可考虑式（1.1）在$n=0$的情形：

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x};\lambda^*)\dot{\lambda}^*&=T\{f(\boldsymbol{x};\lambda)\exp[-st^*(\boldsymbol{x};\lambda)]\\&=Q\int_0^\infty f(\boldsymbol{x};\lambda)\exp[-st^*(\boldsymbol{x};\lambda)]d\lambda\\&=Q\int_0^\infty f(\boldsymbol{x};\lambda^*)\dot{\lambda}^*\exp[-st]dt.\end{aligned}$$

---

* 潘立宙推荐．

根据Laplace变换及其逆变换的定义，显然算子Q应为Laplace逆变换算子L^{-1}，即

$$T\{\quad\}=L^{-1}\int_0^\infty\{\quad\}d\lambda \tag{1.2}$$

现在应用A．Ungar所定义的微分变换T来解Lamb问题的以下情形。

设有一个均匀、各向同性的弹性半空间，原来处于静止，而于$t=0$时刻在其平界面的一直线上受到沿直线分布的脉冲载荷$P\delta(t)$的作用，其中P为常数。

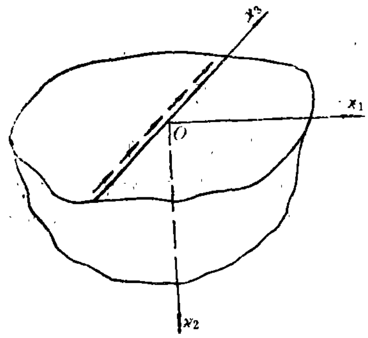

图　1

若选坐标系如图1，则此问题是一个二维反平面运动（antiplane motion）问题[1]。弹性体中的位移$u_1=u_2=0$，而$u_3=w=w(x_1,x_2,t)$，对应的定解问题为：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}=s_2^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\qquad(-\infty<x_1<\infty;\ x_2>0;\ t>0)$$

$$\tau_{23}|_{x_2=0}=-P\delta(x_1)\delta(t)\qquad(-\infty<x_1<\infty;\ t>0)$$

$$w|_{t=0}=\frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0}=0\qquad(-\infty<x_1<\infty;\ x_2>0)$$

$$\lim_{r\to\infty}w=0,\ r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\qquad(-\infty<x_1<\infty;\ x_2>0;\ t>0)$$

其中 $s_2=\dfrac{1}{c_2}$，$c_2=\sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$，$\tau_{23}=\mu\dfrac{\partial w}{\partial x_2}$，而$\mu$及$\rho$分别是弹性体的Lamé常数及密度。

使用关于x_1的Fourier变换$\bar{w}(\xi,x_2,t)=\int_{-\infty}^{\infty}w(x_1,x_2,t)\exp[i\xi x_1]dx_1$及关于$t$的Laplace变换$\bar{w}(x_1,x_2,s)=\int_0^\infty w(x_1,x_2,t)\exp[-st]dt$，则以上定解问题就变换为

$$\frac{d^2\tilde{\bar{w}}}{dx_2^2}-(\xi^2+s_2^2s^2)\tilde{\bar{w}}=0 \tag{2.1}$$

$$\tilde{\bar{\tau}}_{23}|_{x_2=0}=-P \tag{2.2}$$

$$\lim_{x_2\to\infty}\tilde{\bar{w}}=0 \tag{2.3}$$

$$\tilde{\bar{\tau}}_{23}=\mu\frac{d\tilde{\bar{w}}}{dx_2} \tag{2.4}$$

方程式(2.1)的解为

$$\bar{\bar{w}}(\xi,x_2,s)=A(\xi,s)\exp[-\sqrt{\xi^2+s_2^2s^2}\,x_2]+B(\xi,s)\exp[\sqrt{\xi^2+s_2^2s^2}\tag{2.5}$$

$\sqrt{\xi^2+s_2^2s^2}$ 的支点为 $\xi=\pm is_2s$，在 ξ 平面内引适当的支割线后，我们讨论在 ξ 平面上 $\mathrm{Re}\sqrt{\xi^2+s_2^2s^2}\geqslant0$ 的单值分支。对于这个单值分支，欲让式(2.5)所表示的 $\bar{\bar{w}}$ 在 $x_2>0$ 内能满足式(2.3)，则必 $B(\xi,s)=0$。于是式(2.5)就为

$$\bar{\bar{w}}(\xi,x_2,s)=A(\xi,s)\exp[-\sqrt{\xi^2+s_2^2s^2}x_2].\tag{2.6}$$

通过式(2.4)，把式(2.6)代入式(2.2)，得

$$A(\xi,s)=\frac{P}{\mu}\frac{1}{\sqrt{\xi^2+s_2^2s^2}}\tag{2.7}$$

再把式(2.7)代入式(2.6)，即得

$$\bar{\bar{w}}(\xi,x_2,s)=\frac{P}{\mu}\frac{1}{\sqrt{\xi^2+s_2^2s^2}}\exp[-\sqrt{\xi^2+s_2^2s^2}\,x_2].\tag{2.8}$$

由此，对式(2.8)施行Fourier逆变换及Laplace逆变换就可把原定解问题的解表示为

$$w(x_1,x_2,t)=\frac{1}{4\pi^2i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P}{\mu}\frac{\exp[-\sqrt{\xi^2+s_2^2s^2}\,x_2]}{\sqrt{\xi^2+s_2^2s^2}}\exp[-i\xi x_1+st]d\xi ds\tag{2.9}$$

往下，我们使用Ungar微分变换 T 以简捷地得出 $w(x_1,x_2,t)$。为此，把式(2.9)写为

$$w(x_1,x_2,t)=L^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{P}{\mu}\frac{1}{\sqrt{\xi^2+s_2^2s^2}}\exp[-(\sqrt{\xi^2+s_2^2s^2}\,x_2+i\xi x_1)]d\xi\tag{2.10}$$

令 $\xi=s\lambda$，则式(2.10)为

$$\begin{aligned}w(x_1,x_2,t)&=L^{-1}\Big[\int_0^{\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{P}{\mu}\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+s_2^2}}\exp[-s(\sqrt{\lambda^2+s_2^2}\,x_2+i\lambda x_1)]d\lambda\\&\quad+\int_0^{\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{P}{\mu}\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+s_2^2}}\exp[-s(\sqrt{\lambda^2+s_2^2}\,x_2-i\lambda x)]d\lambda\Big]\\&=\frac{1}{2\pi}\frac{P}{\mu}\Big[T\Big\{\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+s_2^2}}\exp[-s(\sqrt{\lambda^2+s_2^2}\,x_2+i\lambda x_1)]\Big\}\\&\quad+T\Big\{\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+s_2^2}}\exp[-s(\sqrt{\lambda^2+s_2^2}x_2-i\lambda x_1]\Big\}\Big]\end{aligned}\tag{2.11}$$

在上式最后一个等式中使用了式(1.2)。

对于式(2.11)右端中的第一个微分变换，由于

$$\lambda^*(\boldsymbol{x};t)=\frac{x_2}{r^2}\sqrt{t^2-s_2^2r^2}-i\frac{x_1}{r^2}t,$$

$$\dot{\lambda}^*(\boldsymbol{x};t)=\frac{\partial\lambda^*(\boldsymbol{x};t)}{\partial t}=\frac{\sqrt{\lambda^{*2}+s_2^2}}{\sqrt{t^2-s_2^2r^2}},$$

则根据式(1.1) $n=0$ 的情形就得

$$T\Big\{\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+s_2^2}}\exp[-s(\sqrt{\lambda^2+s_2^2}\,x_2+i\lambda x_1)]\Big\}=\frac{1}{\sqrt{t^2-s_2^2r^2}}\tag{2.12}$$

对于式(2.11)右端中的第二个微分变换，用类似的做法也可得

$$T\Big\{\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+s_2^2}}\exp[-s(\sqrt{\lambda^2+s_2^2}\,x_2-i\lambda x_1)]\Big\}=\frac{1}{\sqrt{t^2-s_2^2r^2}}\tag{2.13}$$

把式(2.12)及(2,13)代入式(2.11)，于是

$$w(x_1,x_2,t)=\frac{1}{\pi}\frac{P}{\mu}\frac{1}{\sqrt{t^2-s_2^2r^2}} \qquad (t>s_2r) \tag{2.14}$$

原定解问题的解(2.14)与[7]中的一致。由于以上使用了A. Ungar所提出的微分变换，从而避免了 Cagniard-de Hoop 方法中所需的较复杂的改变积分路径的工作，大大简化了求解过程。

参 考 文 献

[1] Eringen, A. C. and E. S. Suhubi, *Elastodynamics*, Vol. Ⅱ, Academic Press, New York (1975), 651—652, 502. 中译本：《弹性动力学》，戈革译，石油工业出版社 (1984).

[2] Achenbach, J. D., *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland (1973), 298, 289.

[3] Ungar, A., *Int. J. Engng. Sci.*, 14 (1976), 935.

[4] Ungar, A. and N. I. Robinson, *Int. J. Engng. Sci.*, 15 (1977), 157.

[5] Ungar, A., *Pure Appl. Geophs.*, 114 (1976), 845.

[6] Ungar, A., The differential transform technique for solving problems of wave propagation, *Modern Problems in Elastic Wave Propagation*, John Wiley & Sons (1977).

[7] Eason, G., Dynamical problems of the theory of elasticity, *Application of Integral Transforms in the Theory of Elasticity*, Springer-Verlag (1975), 318.

An Application of Ungar's Differential Transform to Elastodynamics

Hu De-sui

(Chengdu College of Geology, Chengdu)

Abstract

In recent years, a lot of writers have used Cagniard-de Hoop's method[1][2] to solve some problems of elastic wave. But it is a difficult and complicated task to change the path of integration when we use this method. A differential transform by A. Ungar[3~6] can obviate this difficulty. In this paper, we use Ungar's differential transform to solve a case of Lamb's problem[1][2].