

文章编号: 1000-0887(2004) 07-0718-05

径向质量偏心的自由转子陀螺的漂移运动^{*}

刘延柱¹, 薛 纭²

(1. 上海交通大学 工程力学系, 上海 200030;
2. 上海应用技术学院 机械工程系, 上海 200233)

(程昌钧推荐)

摘要: 讨论均匀重力场中具有微小径向质量偏心的刚体定点运动, 建立用状态变量描述的刚体动力学方程. 对于刚体高速自旋情形应用平均法求出其近似解析积分, 用以分析径向质量偏心对自由转子陀螺进动特性的影响. 对径向质量偏心引起陀螺漂移现象给出物理解释, 并导出陀螺常值漂移的简明的解析公式, 与数值计算结果符合.

关键词: 刚体动力学; 陀螺漂移; 平均法

中图分类号: O313.3 **文献标识码:** A

引 言

高精度自由转子陀螺仪, 尤其是静电陀螺仪技术的发展, 要求研究具有微小质量偏心的轴对称刚体快速旋转时的运动规律. 质量偏心可来源于工艺误差, 也可人为产生用于姿态角测量^[1,2]. 在重力场中质量偏心可引起陀螺的漂移. 轴向质量偏心引起的漂移利用动量矩定理即可作出解释. 而径向质量偏心所产生的重力矩随转子高速旋转而迅速改变方向, 难以直观地解释陀螺产生漂移的物理原因, 也缺少可供使用的计算公式.

在经典刚体动力学中, 质心与定点重合的刚体为 Euler 可积情形, 所描述的运动为 Euler-Poinsot 运动. 存在微小质量偏心时, 刚体运动不同于但接近于 Euler 情形, 可称作准 Euler 情形刚体定点运动^[3]. 具有轴向质量偏心的轴对称转子为 Lagrange 可积情形, 即上述轴向质量偏心陀螺的抽象模型. 质心沿径向偏离定点时, 除 Kovalevskaya 特殊情形外, 一般不存在解析积分. 但对于准 Euler 情形刚体, 若将微小质量偏心视作对 Euler-Poinsot 运动的扰动, 则可利用摄动理论进行分析.

传统的 Euler 动力学方程以刚体的角速度分量和相对惯性坐标系的 Euler 角为独立变量, 但并非对刚体运动的唯一表述方法. 将动量矩矢量的模和在惯性坐标系中的 2 个位置坐标, 以及刚体相对以动量矩矢量为坐标轴的动量矩坐标系的 Euler 角共 6 个变量作为独立的状态变量, 可建立表述刚体定点运动的状态方程组. 对于无力矩或受微弱力矩作用的刚体定点运

* 收稿日期: 2002_05_09; 修订日期: 2004_03_30

基金项目: 上海市科技发展基金资助项目(98JC14032)

作者简介: 刘延柱(1936—), 男, 江苏南京人, 教授(联系人. Tel: + 86_21_62109281(h); E_mail: liuyzc@online.sh.cn);

薛纭(1956—), 男, 上海人, 副教授(E_mail: xueylyf@citiz.net).

动, 这种动力学方程表达形式更便于对运动过程作出定性分析和物理解释^[4]。上述状态变量方法已成功应用于分析陀螺仪、自旋航天器和多刚体系统的运动^[5~8]。本文建立重力场中质量偏心的自由转子陀螺的状态方程, 应用平均法^[9]求出近似解析积分, 以分析质量偏心对陀螺进动特性的影响, 导出陀螺漂移的计算公式并进行数值验证。

1 陀螺运动的状态方程组

讨论均匀重力场中轴对称刚体转子的运动。设转子的支承中心与几何中心 O 重合。以 O 为原点, 建立惯性坐标系 $(O\xi\eta\zeta)$, ζ 轴沿地垂线向上。令 $(O\xi\eta\zeta)$ 绕 ζ 轴转过 α 角, 再绕 ξ 轴的新位置转过 β 角的位置为动量矩坐标系 $(OXYZ)$, Z 轴沿刚体相对 O 点的动量矩矢量 H (见图 1)。令 $(OXYZ)$ 绕 Z 轴转过 ψ 角, 再绕 X 轴的新位置转过 ϑ 角的位置为转子的 Resal 坐标系 $(Oxyz)$, z 轴为转子的对称轴。 $(Oxyz)$ 绕 z 轴转过 φ 角后的位置为转子的主轴坐标系 $(Ox_Ry_Rz_R)$ 。 ψ 、 ϑ 、 φ 为刚体相对动量矩坐标系的 Euler 角 (见图 2)。在转子赤道平面上的 O_1 点处附加一微小的质量 m , O_1 相对支点的偏心矩矢量为 $OO_1 = e$ 。不失一般性, 设 e 沿 x_R 轴, 其相对 $(OXYZ)$ 各轴的方向余弦记作 $\gamma_j (j = 1, 2, 3)$ 。

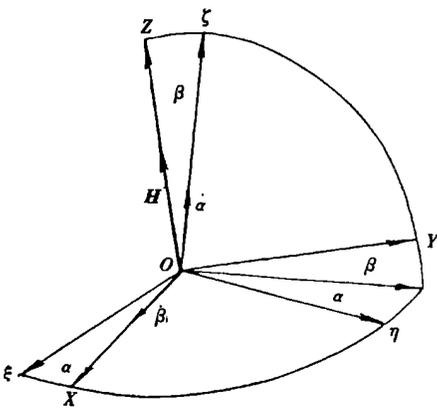


图 1 动量矩坐标系的角度坐标

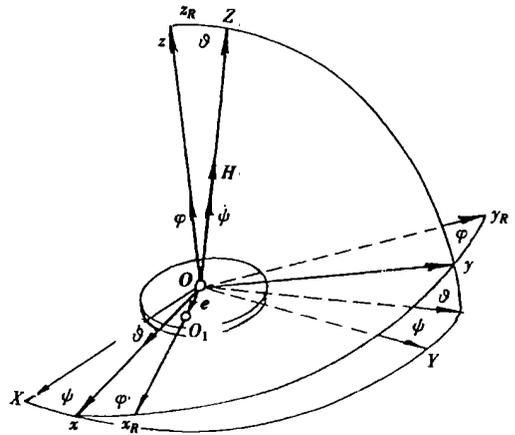


图 2 刚体相对动量矩坐标系的 Euler 角

$$\begin{cases} \gamma_1 = \cos\psi\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi, \\ \gamma_2 = \sin\psi\cos\varphi + \cos\vartheta\cos\psi\sin\varphi, \gamma_3 = \sin\vartheta\sin\varphi. \end{cases} \quad (1)$$

计算重力对 O 点的矩 $M = e \times mg$ 在 $(O\xi\eta\zeta)$ 中的投影式, 得到

$$\begin{aligned} M = mge[-(\gamma_1\sin\alpha + \gamma_2\cos\alpha\cos\beta - \gamma_3\cos\alpha\sin\beta)\xi^0 + \\ (\gamma_1\cos\alpha - \gamma_2\sin\alpha\cos\beta + \gamma_3\sin\alpha\sin\beta)\eta^0]. \end{aligned} \quad (2)$$

这里, e, g 分别为 e, g 的模。将动量矩 H 向 $(O\xi\eta\zeta)$ 投影, 得到

$$H = H(\sin\alpha\sin\beta\xi^0 - \cos\alpha\sin\beta\eta^0 + \cos\beta\zeta^0), \quad (3)$$

此处 H 为动量矩 H 的模。将 (1) 至 (3) 式代入动量矩定理 $\dot{H} = M$ 。其沿 ζ 轴的投影式存在初积分, 即转子动量矩的垂直分量守恒。设 H_0, β_0 为 H, β 的初始值, 则有

$$H\cos\beta = H_0\cos\beta_0. \quad (4)$$

定义小参数 $\varepsilon = mge/H_0$ 为无量纲化的偏心矩, 从动量矩定理沿 ξ 轴和 η 轴的投影式导出以下方程:

$$\alpha = F_1(\beta, \vartheta, \phi, \varphi), \quad \beta = F_2(\beta, \vartheta, \phi, \varphi), \quad (5)$$

其中

$$\begin{cases} F_1 = \varepsilon \frac{\cos \beta}{\cos \beta_0} [\sin \vartheta \sin \varphi - \cot \beta (\sin \phi \cos \varphi + \cos \vartheta \cos \phi \sin \varphi)], \\ F_2 = \varepsilon \frac{\cos^2 \beta}{\cos \beta_0} (\cos \vartheta \sin \varphi \sin \phi - \cos \phi \cos \varphi). \end{cases} \quad (6)$$

将刚体的绝对角速度 ω 向 (O_{xyz}) 投影, 得到

$$\begin{cases} \omega_x = \alpha \sin \beta \sin \phi + \beta \cos \phi + \vartheta, \\ \omega_y = \alpha (\cos \beta \sin \vartheta + \sin \beta \cos \vartheta \cos \phi) - \beta \cos \vartheta \sin \phi + \phi \sin \vartheta, \\ \omega_z = \alpha \cos \beta \cos \vartheta - \sin \beta \sin \vartheta \cos \phi + \beta \sin \vartheta \sin \phi + \phi \cos \vartheta + \varphi. \end{cases} \quad (7)$$

将动量矩 H 向 (O_{xyz}) 投影. 忽略微小偏心对主惯性矩的影响, 设 A, C 为转子相对 O 点的赤道惯性矩和极惯性矩, H 的各分量 $A\omega_x, A\omega_y, C\omega_z$ 分别等于 $0, H \sin \vartheta$ 和 $H \cos \vartheta$, 从而导出

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \frac{V \cos \beta_0 \sin \vartheta}{\cos \beta}, \quad \omega_z = \frac{V \cos \beta_0 \cos \vartheta}{\lambda \cos \beta}, \quad (8)$$

其中 $V = H/A$ 为陀螺的无扰运动章动频率, $\lambda = C/A$ 为转子的惯性矩比. 令(7)、(8)对应的各式相等, 导出

$$\beta = -F_1 \sin \beta \sin \phi - F_2 \cos \phi, \quad (9a)$$

$$\phi = \frac{V \cos \beta_0}{\cos \beta} - F_1 (\cos \beta + \sin \beta \cot \vartheta \cos \phi) + F_2 \cot \vartheta \sin \phi, \quad (9b)$$

$$\varphi = \frac{V(1-\lambda) \cos \beta_0 \cos \vartheta}{\lambda \cos \beta} + \frac{F_1 \sin \beta \cos \phi - F_2 \sin \phi}{\sin \vartheta}. \quad (9c)$$

方程组(5)、(6)、(9) 组成以状态变量 $\alpha, \beta, \vartheta, \phi, \varphi$ 为独立变量的陀螺运动状态方程组. 为避免当 ϑ 接近于零出现的奇异性, 也可引入新的变量

$$\dot{\phi} = \varphi + \phi \cot \vartheta,$$

则方程(9b)、(9c) 可用以下方程替代:

$$\dot{\phi} = \frac{V \cos \beta_0 \cos \vartheta}{\lambda \cos \beta} + F_1 (\sin \beta \sin \vartheta \cos \phi - \cos \beta \cos \vartheta) - F_2 \sin \vartheta \sin \phi. \quad (10)$$

2 陀螺常值漂移的解析公式

陀螺质心与支点重合的无扰运动为刚体定点运动的 Euler 可积情形. 令 $\varepsilon = 0$, 设起始时 x 轴与 X 轴、 ξ 轴重合, 从状态方程组(5)、(9) 导出无扰运动解:

$$\begin{cases} \alpha = 0, \quad \beta = \beta_0, \quad \vartheta = \vartheta_0, \\ \phi = \mu, \quad \varphi = \mu, \quad \dot{\phi} = \Omega. \end{cases} \quad (11)$$

式(11) 描述了无力矩轴对称刚体的自由规则进动. 其中 ϑ_0 为 ϑ 的初始值, $\Omega = (V/\lambda) \cos \vartheta_0$ 为转子的绝对自旋角速度, $\mu = (1-\lambda) V \cos \vartheta_0 / \lambda$ 为刚体相对 (O_{xyz}) 的自旋角速度. 将式(11) 作为零次近似解, 代入方程(5) 的右边, 得一次近似微分方程:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = F_1(\beta_0, \vartheta_0, \mu, \mu), \\ \dot{\beta} = F_2(\beta_0, \vartheta_0, \mu, \mu). \end{cases} \quad (12)$$

刚体的进动角速度 α, β 分别为陀螺的漂移率 ω_{dx}, ω_{dy} . 利用一次近似方程(12) 计算在转角 ϕ 的周期 $T = 2\pi / \Omega = 2\pi / (V + \mu)$ 内的平均值, 记作 ω_{dx}, ω_{dy} , 即陀螺的常值漂移率. 得到

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_{dX} &= \frac{1}{T} \int_0^T \beta dt = - \frac{\varepsilon \cos \beta_0}{T(\nu^2 - \mu^2)} [(-\mu + \nu \cos \vartheta_0) \cos \mathcal{M} \sin \mathcal{M} T + \\ &\quad (\nu - \mu \cos \vartheta_0) \cos \mathcal{M} T \sin \mathcal{M}], \\ \omega_{dY} &= \frac{1}{T} \int_0^T \alpha \sin \beta dt = \frac{\varepsilon \sin \beta_0}{T} \left\{ \frac{\sin \vartheta_0}{\mu} (1 - \cos \mathcal{M} T) - \right. \\ &\quad \left. \frac{\cos \beta_0}{\nu^2 - \mu^2} [(\nu - \mu \cos \vartheta_0) (1 - \cos \mathcal{M} T \cos \mathcal{M}) - (\mu - \nu \cos \vartheta_0) \sin \mathcal{M} T \sin \mathcal{M}] \right\}. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

计算中仅保留 ε 的一次项。对于高速自旋的高精度陀螺转子, $|\nu| \gg |\mu|$, 上式可简化为:

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_{dX} &= - \frac{\varepsilon \cos \beta_0}{T\nu} [(\cos \vartheta_0 \cos \mathcal{M} \sin \mathcal{M} T + \cos \mathcal{M} T \sin \mathcal{M})], \\ \omega_{dY} &= \frac{\varepsilon \sin \beta_0 \sin \vartheta_0}{T\mu} (1 - \cos \mathcal{M} T). \end{aligned} \right. \quad (14)$$

从而表明, 有径向质量偏心的轴对称刚体受重力矩作用的平均效果不为零, 可使极轴在惯性空间中缓慢转动。陀螺的漂移现象可由此得到解释。

3 数值算例

设陀螺的惯性矩比 $\lambda = 1.2$, 偏心矩 $\varepsilon = 2 \times 10^{-4}$; 初始值为: $\alpha_0 = 0, \beta_0 = \pi/6, \phi_0 = \varphi_0 = 0$ 。使用 Mathematica 4.0 对非线性方程组(5) 作数值积分, 并计算其每个周期内的平均值, 同时对一次近似方程计算平均化后的式(14)。结果显示: 在章动角 $|\vartheta_0|$ 较小时, ω_{dX} 和 ω_{dY} 的时间历程均接近于具有确定周期和幅值的简谐曲线(见图3)。 ω_{dX} 的平均值 ω_{dX} 为 $10^{-8} \sim 10^{-10}$ 数量级而接近于零。 ω_{dY} 的平均值 ω_{dY} 即为陀螺的常值漂移率, 其随章动角 ϑ_0 的变化情况如图4所示, 图中实线与虚线分别代表式(5) 的解析计算结果和式(14) 的数值计算结果, 在章动角 $|\vartheta_0| = 0.08$ (约 6°) 的微小范围内二者接近于重合。

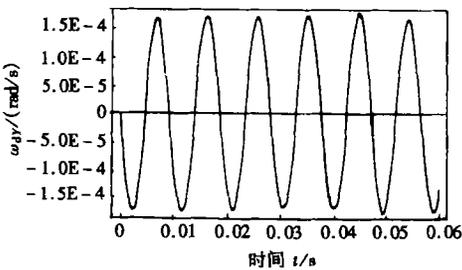


图3 陀螺漂移的时间历程

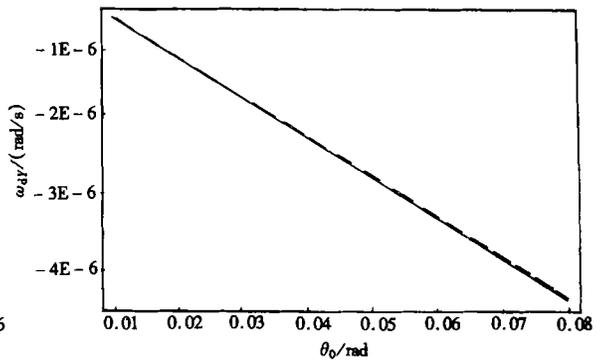


图4 陀螺常值漂移率随章动角变化曲线

4 结 论

带有径向质量偏心的轴对称刚体在重力矩作用下可产生惯性空间中的进动, 而表现为自由转子陀螺仪的常值漂移现象。其物理解释为: 虽然重力对 O 点的矩随转子旋转而迅速改变方向, 但动量矩矢量的方向也同时改变, 使陀螺的进动角速度由于 α 与 β 角同步周期变化的耦合效应而产生不为零的平均效果。对刚体定点运动的状态方程使用平均法可以导出解析形式的进动角速度(14), 以计算陀螺的常值漂移率。此漂移率与偏心距成比例, 且与初始值 β_0 ,

ϑ_0 有关。由于陀螺仪进入工作状态后章动运动已结束, 章动角在漂移过程中远小于 1° , 数值计算表明, 利用式(14) 已能足够准确地作为陀螺仪常值漂移的实用计算公式。

[参 考 文 献]

- [1] 刘延柱. 陀螺力学[M]. 北京: 科学出版社, 1986.
- [2] Lange B. Active damping of ESG rotors with mass_unbalance readout[J]. Spacecraft & Rockets, 1972, 9(2): 96—102.
- [3] Leimanis E. The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies About a Fixed Point[M]. New York: Springer_Verlag, 1965.
- [4] 刘延柱. 刚体的拟 Euler_Poinsot 运动[J]. 固体力学学报, 1988, 9(4): 294—302.
- [5] LIU Yan_zhu. The development of the dynamics of rigid body with state variables[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 1990, 3(3): 307—314.
- [6] Martynenko Y G. Motion of gyroscope with noncontact suspension and unbalance[J]. Izv Akad Nauk SSSR, MIT, 1974, 14(4): 13—19.
- [7] Beletsky V V. Motion of Satellite About Center of Mass[M]. Moscow: Nauka, 1965. (in Russian)
- [8] LIU Yan_zhu. The stability of the permanent rotation of a free multibody system[J]. Acta Mechanica, 1989, 79(1/2): 43—51.
- [9] 刘延柱, 陈立群. 非线性振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.

Drift Motion of Free_Rotor Gyroscope With Radial Mass_Unbalance

LIU Yan_zhu¹, XUE Yun²

(1. Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P. R. China;

2. Department of Mechanical Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 200233, P. R. China)

Abstract: The motion of a rigid body about fixed point with small radial mass_unbalance in homogeneous gravitational field was discussed. The dynamical equations described by state variables of the body were established, and approximate analytical solutions for a spinning body with high speed were obtained by use of the average method. The influence of the radial mass_unbalance of the rotor to the precession character of a free_rotor gyroscope was analyzed. And a physical explanation of the drift phenomenon of the gyro was given. An applicable formula of gyro's constant drift in analytical form was obtained, which is perfectly coincident with the numerical calculation.

Key words: dynamics of rigid body; drift of gyroscope; average method