应用数学和力学，第10卷第6期(1989年6月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

高维环面的Hopf-Landau分叉*

程崇庆

(西北工业大学，1987年7月28日收到)

摘要

本文证明了在拟周期临界点条件下环面$T^m \to T^{m+1}$退化分叉过程的存在性.

一、引言

Hopf 和 Landau 曾经猜测湍流的发生是一系列拟周期分叉的结果. 系统的运动因不断的分叉而不断产生新的基频. 但是由于拟周期运动是结构不稳定的，因此被称为Hopf-Landau 道路的通向浑沌的道路被人们认为在物理上是不可能发生的，取而代之的是所谓Ruelle-Takens道路[1]. 实际上，由于Hopf-Landau是在四十年前提出此种假设的，他们必然要受到当时数学所达到的水平的限制. 如果把拟周期分叉修改成为不变环面向更高维数的分叉，情况就不一样了. 因为拟周期运动仅是一类环面上的运动. 本文所指的Hopf-Landau分叉就是指这种环面分叉.

在 Sell 的工作之前，高维环面分叉的数学背景是不清楚的. Sell 第一个研究了高维环面的分叉问题[3],[4]，但是他要求的条件太严了，换句话说，在已给出标准型以后他解决了非退化问题. 本文中，我们在比较一般的条件下解决了退化分叉问题. 根据文献[2]不难看出，根据本文结果，T^m上的怪引子可以分叉成为T^{m+1}上的怪吸子.

二、关于拟周期微分方程的一些引理

引理2.1 设拟周期函数$f(\omega(\mu)t)=f(\varphi)$具有所需要的任意高可微次数，$\Omega(\mu)=(\omega_0(\mu),\omega(\mu))$满足无理性不等式:

$$\left|\sum_{j=1}^{m} k_j\omega_j(0)+k_0\omega_0(0)\right| \geqslant \bar{K}(\omega)\left(\sum_{j=1}^{m}|k_j|+|k_0|\right)^{-(m+1)} \qquad \forall k\in Z^m \tag{2.1}$$

其中 $\omega(\mu)=(\omega_1(\mu),\omega_2(\mu),\cdots,\omega_m(\mu))$，$k=(k_1,k_2,\cdots,k_m)$，$k_0$为任一整数. 那么存在$x(\omega(\mu)t,\mu)$，$r(\omega(\mu)t,\mu)$充分可微，是如下方程的解:

$$\dot{x}+ik_0\omega_0(\mu)x=f(\omega(\mu)t,\mu)+\mu^{\gamma}r(\omega(\mu)t,\mu) \tag{2.2}$$

---

*朱照宣推荐.

γ是任意指定的正数。如果f的平均值为零，则取k_0为零。

证明 取$\|k\|_0=\max(|k_1|,|k_2|,\cdots,|k_m|)$，$\|k\|_1=\sum_{j=1}^{m}|k_j|$

显然
$$\|k\|_0\leqslant\|k\|_1\leqslant m\|k\|_0 \tag{2.3}$$
将$f(\omega t,\mu)$展成 Fourier 级数：
$$f(\varphi,\mu)=\sum_{k\in Z^m}a_k(\mu)\exp i(k\cdot\varphi)\qquad (k\cdot\varphi)=\sum_{j=1}^{m}k_j\varphi_j$$
记
$$M(\xi,n)=\max_{0\leqslant h\leqslant\xi,\mu\in(-\delta,\delta),0\leqslant j\leqslant n}\left|\frac{\partial^{|h|+j}f(\varphi,\mu)}{\partial\varphi_1^{h_1}\partial\varphi_2^{h_2}\cdots\partial\varphi_m^{h_m}\partial\mu^j}\right|$$
我们可得如下不等式：
$$|a_k^{(j)}(\mu)|\leqslant M(s,n)\|k\|_0^{-s}\qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{2.4}$$
记
$$\left.\begin{aligned}S_\mu^1&=\left\{k\in Z^m\;\middle|\;\sum_{j=0}^{m}|k_j|(|\omega_j'(0)|+\delta_1)|\mu|\leqslant\frac{1}{3}\bar{K}(\omega)(\|k\|_1+|k_0|)^{-(m+1)}\right\}\\ S_\mu^2&=\left\{k\in Z^m\;\middle|\;\sum_{j=0}^{m}|k_j|(|\omega_j'(0)|+\delta_1)|\mu|\leqslant\frac{2}{3}\bar{K}(\omega)(\|k\|_1+|k_0|)^{-(m+1)}\right\}\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$
δ_1 是一个适当的正数，根据(2.1)，$S_\mu^1\subset U_\mu^2$。

对于充分小的$|\mu|$，如下关系成立：
$$|(k\cdot\omega(\mu))+k_0\omega_0(\mu)|\geqslant|(k\cdot\omega(0))+k_0\omega_0(0)|-\sum_{j=0}^{m}|k_j|(|\omega_j'|+\delta_1)\mu$$
$$\geqslant\frac{1}{3}\bar{K}(\omega)(\|k\|_1+|k_0|)^{-(m+1)}\qquad\forall k\in S_\mu^2$$
对固定的$k\in Z^m$，记满足下式的μ为μ_k^1
$$\sum_{j=0}^{m}|k_j|(|\omega_j'|+\delta_1)|\mu|=\frac{1}{3}\bar{K}(\omega)(\|k\|_1+|k_0|)^{-(m+1)} \tag{2.6}$$
取 $\mu_k^2=2\mu_k^1$。我们再定义非平凡光滑子
$$\beta_{[r,s]}(\mu)=\frac{\int_{-\infty}^{\mu}\alpha_{[r,s]}(t)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha_{[r,s]}(t)dt}$$
其中
$$\alpha_{[r,s]}(\mu)=\begin{cases}0 & \text{其它}\\ \exp\left(-\dfrac{1}{(s-\mu)(\mu-r)}\right) & r<\mu<s\end{cases}$$
取
$$x(\omega(0)t,0)=\sum_{k\in Z^m}\frac{a_k(0)\exp(i(k\cdot\omega(0)t))}{i(k\cdot\omega(0)+k_0\omega_0(0))}$$

$$x(\omega(\mu)t,\mu)=\sum_{k\in S_\mu^1}\frac{a_k(\mu)\exp[i(k\cdot\omega(\mu)t)]}{i(k\cdot\omega(\mu)+k_0\omega_0(\mu))}$$

$$+\sum_{k\in S_\mu^2-S_\mu^1}\frac{(1-\beta_{[\mu_k^1,\mu_k^2]}(\mu))a_k(\mu)\exp[i(k\cdot\omega(\mu)t)]}{i(k\cdot\omega(\mu)+k_0\omega_0(\mu))}$$

$$\mu^\gamma r(\omega(\mu)t,\mu)=-\sum_{k\in S_\mu^2}\beta_{[\mu_k^1,\mu_k^2]}(\mu)a_k(\mu)\exp[i(k\cdot\omega(\mu)t)]$$

现在验证$x(\omega(\mu)t,\mu)$，$r(\omega(\mu)t,\mu)$具有足够高的可微次数。如果$\mu=0$，根据(2.1)、(2.4)，$D_{\varphi_j}^\tau x$是绝对收敛的，只要f具有足够高的可微次数(τ为正整数)。如果$\mu\neq 0$，根据(2.3)和(2.4)

$$\left|D_{\varphi_j}^\tau x(\varphi,\mu)\right|\leqslant\sum_{k\in S_\mu^2}\left|\frac{a_k(\mu)(ik_j)^\tau}{i((k\cdot\omega(\mu))+k_0\cdot\omega_0(\mu))}\right|\leqslant\frac{m^{\xi-\tau+1}}{3\bar{K}(\omega)}\sum\|k\|^{-\xi+2m+\tau}$$

只要ξ充分大，上式就绝对收敛。这意味着$x(\varphi,\mu)$关于φ有充分大的可微次数，同样可论$r(\varphi,\mu)$。

不难证明光滑子$\beta_{[r,s]}(\mu)$有如下性质[5]

$$|\beta_{[r,s]}^{(n)}(\mu)|\begin{cases}\leqslant D(n)(s-r)^{-(3n+5)} & r<\mu<s\\ =0 & \text{其它}\end{cases}\tag{2.7}$$

因此，如果$\mu\in[\mu_k^1,\mu_k^2]$，$k\in S_\mu^2$，根据(2.4)，(2.5)，(2.7)

$$\sum_k\left|\left(\beta_{[\mu_k^1,\mu_k^2]}(\mu)\frac{a_k(\mu)}{i((k\cdot\omega(\mu))+k_0\cdot\omega_0(\mu))}\right)^{(n)}\right|\leqslant C(n,\xi)\sum_k\|k\|^{-(m+1)(3n+2)-\xi}$$

$C(n,\xi)$是依赖于n和ξ的常数，上式保证了$D_\mu^{(n)}x(\varphi,\mu)$绝对收敛性，只要$\xi$充分大。这说明$x(\varphi,\mu)$关于$\mu$有足够高的可微次数。至于$r(\varphi,\mu)$，证明类似。容易验证$x(\omega(\mu)t,\mu)$，$r(\omega(\mu)t,\mu)$满足方程(2.2)。

引理2.2 设线性微分方程

$$\dot{X}=A(\omega(\mu)t,\mu)X\qquad X\in R^n\tag{2.8}$$

的系数有足够高的可微次数，拟周期；A为$(n\times n)$方阵。如果(2.8)的Liapunov特征指数$\beta_l(\mu)$ $(l=1,2,\cdots,n)$与$\omega(\mu)$满足无理性不等式：

$$|i(k\cdot\omega(0))+(k^*\cdot\beta(0))|\geqslant\bar{K}(\omega)\|k\|^{-(m+1)}\qquad\forall k^*\in Z^n\tag{2.9}$$

那么，存在拟周期线性变换，将(2.8)变换成为下列方程：

$$\dot{Y}=(B(\mu)+\mu^\gamma A_1(\omega(\mu)t,\mu))Y\tag{2.10}$$

$B(\mu)$的特征值是β_l $(l=1,2,\cdots,n)$。

证明 如果$\omega(\mu)$是关于整数线性独立的，根据Kronecker定理，对任意φ，$\varphi_0\in R^k$以及$\varepsilon>0$，总存在充分大的t，使得

$$\|\omega(\mu)t+\varphi_0-\varphi\|<\varepsilon$$

如果$\omega(\mu)$线性相关，则可以缩并其基本频率，因此根据[6]，存在拟周期矩阵$Q(t,\mu)$

$$Z=Q^{-1}(\omega(\mu)t,\mu)X\tag{2.11}$$

(2.8)式等价于下列方程：

$$\begin{cases} \dot z_1=c_{11}(\omega(\mu)t,\mu)z_1+c_{12}(\omega(\mu)t,\mu)z_2+\cdots+c_{1n}(\omega(\mu)t,\mu)z_n \\ \dot z_2= \qquad c_{22}(\omega(\mu)t,\mu)z_2+\cdots+c_{2n}(\omega(\mu)t,\mu)z_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot z_n= \qquad c_{nn}(\omega(\mu)t,\mu)z_n \end{cases} \tag{2.12}$$

记

$$\beta_j(\mu)=(2\pi)^{-m}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}c_{jj}(\varphi,\mu)d\varphi_1 d\varphi_2\cdots d\varphi_m$$

$$c_{jj}(\omega(\mu)t,\mu)=\beta_j(\mu)+f_j(\omega(\mu)t,\mu)$$

$$g_j(\omega(\mu)t,\mu)=\int_0^t f_j(\omega(\mu)t,\mu)dt$$

引入拟周期变换：

$$y_n=z_n\exp(-g_n(\omega(\mu)t,\mu))$$

于是

$$\dot y_n=\beta_n(\mu)y_n$$

$$\dot z_{n-1}=c_{n-1,n-1}z_{n-1}+c_{n-1,n}\exp(g_n)y_n$$

取

$$y_{n-1}=z_{n-1}\exp(-g_{n-1})+h_n y_n$$

有

$$\dot y_{n-1}=\beta_{n-1}y_{n-1}+(\dot h_n+\beta_n h_n+\exp(-g_{n-1}\cdot g_n)c_{n-1,n})y_n$$

根据引理2.1，存在拟周期函数$h(\omega(\mu)t,\mu)$，$r(\omega(\mu)t,\mu)$满足下列方程：

$$\dot h_n+\beta_n h_n=-\exp(-g_{n-1}\cdot g_n)c_{n-1,n}+\mu^\gamma r$$

采用与[6]中相似的变换，由引理2.1，我们可得方程(2.10)。

采用非奇异的常数变换，我们可假设

$$B(\mu)=\mathrm{diag}(B_1(\mu),B_2(\mu),B_3(\mu))$$

$B_1(\mu)$的特征值具有正实部，$B_3(\mu)$的特征值具有负实部，$B_2(0)$的特征值的实部为零。

三、拟周期临界点的$T^m\to T^{m+1}$退化分叉

对于一解析系统：

$$\dot x=F(x,\varphi,\mu)\qquad x\in R^n,\ \varphi\in T^m \tag{3.1}$$

对于$\mu\in(-\delta,\delta)$，设(3.1)有一个m维不变环面，即(3.1)有如下形式的解：

$$x=f(\varphi,\mu),\ \dot\varphi=\Phi(\varphi,\mu) \tag{3.2}$$

考虑(3.1)的解在(3.2)附近的摄动：

$$x=f(\varphi,\mu)+\delta x$$

δx适合如下关系式：

$$\dot x=\frac{\partial F}{\partial x}(f(\varphi,\mu),\varphi,\mu)+G(\varphi,x,\mu),\ \dot\varphi=\Phi(\varphi,\mu) \tag{3.3}$$

其中$G(\varphi,x,\mu)=O(\|x\|^2)$。本文假设$\Phi(\varphi,\mu)$满足拟周期临界点条件：

$$\Phi(\varphi,\mu)=\omega+\mu\Phi_1(\varphi,\mu)\qquad \omega\in R^m \tag{3.4}$$

根据[6]，几乎所有的R^m中的点都满足无理性条件。

引理3.1　存在$T^m\to T^m$的微分同胚，则方程(3.4)等价于下列方程：

$$\dot\varphi=\omega(\mu)+\mu^\gamma\Phi(\varphi,\mu)$$

γ是一事先任给的正整数。

证明　取变换$\psi=\varphi+\Psi(\varphi,\mu)$

那么 $$\dot{\psi}=\omega+\mu\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\omega+\Phi_1\right)+\mu^2\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\Phi_1$$

记 $$M_\varphi[\Phi_1(\varphi,\mu)]=(2\pi)^{-m}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\Phi_1(\varphi,\mu)d\varphi_1d\varphi_2\cdots d\varphi_m$$

只要方程

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\omega(\mu)+\Phi_1=M_\varphi[\Phi_1] \tag{3.5}$$

有拟周期解，(3.4)就可以变换成

$$\dot{\varphi}=\omega(\mu)+\mu M_\varphi[\Phi_1]+\mu^2\Phi_2(\varphi,\mu)$$

上述过程可以反复进行，直至 γ 阶。

如果取 $$\Psi(t)=\Psi(\varphi+\omega t)$$

则 $$\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\Phi_1(\varphi+\omega(\mu)t,\mu)=M_\varphi[\Phi_1]$$

根据引理2.1，(3.6)具有精确到μ^γ阶的拟周期解。

引理3.2 存在非奇异，拟周期(周期为2π)变换

$$y=T(\varphi,\mu)x$$

使得方程(3.3)等价于如下方程：

$$\dot{y}=Y(\varphi,\mu)y+G(\varphi,y,\mu),\quad \dot{\varphi}=\omega(\mu)+\mu^\gamma\Phi(\varphi,\mu) \tag{3.6}$$

其中

$$Y(\varphi,\mu)=\mathrm{diag}(Y_1(\mu),Y_2(\mu),Y_3(\mu))+\mu^\gamma Y_\mu(\varphi,\mu)$$

根据引理2.1，2.2，3.1，这是显然的。

既然我们研究的是解析系统，对任意指定的正数ζ，总存在一个C^ζ局部中心流形M_c：

$$M_c=\{(y_1,y_2,y_3)\,|\,(y_1,y_3)=H(\varphi,y_2,\mu)\}$$

因此，我们可以研究在中心流形上的分叉问题。因而假设分叉方程为

$$\dot{z}=Z(\varphi,\mu)z+G(\varphi,z,\mu),\quad \dot{\varphi}=\omega(\mu)+\mu^\gamma\Phi(\varphi,\mu) \tag{3.7}$$

其中 $z=(z_1,z_2)\in R^2$，$\omega(\mu)\in R^m$，$G\in C^\zeta(T^m\times R^2\times R,R^2)$，$G(\cdot,z,\cdot)=O(\|z\|^2)$

$$Z(\varphi,\mu)=\begin{bmatrix}\alpha_0(\mu) & -\omega_0(\mu)\\ \omega_0(\mu) & \alpha_0(\mu)\end{bmatrix}+\mu^\gamma Z_\mu(\varphi,\mu)$$

$$|\omega(0)\cdot k+k_0\omega_0(0)|\geqslant\bar{K}(\omega)(\|k\|_1+|k_0|)^{-(m+1)}\qquad\forall k\in Z^m$$

$\alpha_0(0)=0$，Z，G是φ的2π周期函数。

现在我们来导出(3.7)的标准型。

引理3.3 运用一个适当的关于φ的2π周期的变换，(3.3)式可以变换成为下式：

$$\begin{cases}\dot{r}=\sum\limits_{j=0}^{N}\alpha_j(\mu)r^{2j+1}+R(\varphi,\theta,r,\mu)+\mu^\gamma R_0(\varphi,\theta,r,\mu)\\[2ex] \dot{\theta}=\omega_0(\mu)+\sum\limits_{j=1}^{N}\beta_j(\mu)r^{2j}+\Theta(\varphi,\theta,r,\mu)+\mu^\gamma\Theta_0(\varphi,\theta,r,\mu)\\[2ex] \dot{\varphi}=\omega(\mu)+\mu^\gamma\Phi(\varphi,\mu)\end{cases} \tag{3.8}$$

其中 $$R(\cdot,\cdot,r,\cdot)=O(r^{2N+3})$$
$$\Theta(\cdot,\cdot,r,\cdot)=O(r^{2N+2})$$

证明 选取复函数 $u=z_1+iz_2$，(3.7)式就是一个复平面上的方程

$$\dot{u}=\lambda(\mu)u+U(\varphi,u,\bar{u},\mu)+\mu^\gamma U_0(\varphi,u,\bar{u},\mu) \tag{3.9}$$

其中 $\lambda(\mu)=\alpha_0(\mu)+i\omega_0(\mu)$，$U(\varphi,u,\bar{u},\mu)=O(\|u\|^2)$

取变换

$$u=w+\sum_{l+n\geq 2}a_{ln}(\varphi,\mu)w^l\bar{w}^n=w+A(\varphi,w,\bar{w},\mu) \tag{3.10}$$

a_{ln} 待定，关于φ的 2π周期。设(3.7)的第一式经变换(3.10)变换成为

$$\dot{w}=\lambda(\mu)w+wP(w\bar{w},\mu)+W(\varphi,w,\bar{w},\mu)+\mu^\gamma W_1(\varphi,w,\bar{w},\mu)$$

其中

$$P(w\bar{w},\mu)=\sum_{j=1}^{N}p_j(\mu)(w\bar{w})^j$$

对(3.10)求导，虑虑到(3.7)，(3.9)，我们得到：

$$\sum\frac{\partial a_{ln}}{\partial\varphi}\omega(\mu)w^l\bar{w}^n+\sum(l\lambda+n\bar{\lambda}-\lambda)a_{ln}w^l\bar{w}^n$$

$$=-wP(w\bar{w},\mu)+U(\varphi,w+A,\bar{w}+\bar{A},\mu)-wPA'_w-\bar{w}\bar{P}A'_{\bar{w}}$$

$$-WA'_w-\bar{W}A'_{\bar{w}}+\mu^\gamma(W_1+W_1A'_w+\bar{W}_1A'_{\bar{w}}-U_0)$$

注意到线性项的系数中与φ有关的系数只是μ^γ量级，可以通过选取适当的 μ^γ 量级的系数使其两端相等。比较$w^l\bar{w}^n(2\leqslant l+n\leqslant 2N+2)$的系数，我们得到一系列方程：

$$\frac{\partial a_{ln}}{\partial\varphi}\omega(\mu)+(l\lambda+n\bar{\lambda}-\lambda)a_{ln}=-\Delta_{ln}+b_{ln}(\varphi,\mu)+\mu^\gamma\bar{b}_{ln}(\varphi,\mu) \tag{3.11}$$

其中b_{ln}只与$b_{l'n'}$，$a_{l'n'}$ $(l'+n'<n+l)$，$p_{l'}(2l'<l+n)$以及U的相应展开项 z^lz^n的系数有关。

$$\Delta_{ln}=\begin{cases}p_l(\mu)=\dfrac{1}{(2\pi)^m}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}b_{ln}(\varphi,\mu)d\varphi_1\cdots d\varphi_m\\ 0 \qquad l\neq n+1\end{cases}$$

根据引理2.1，总存在 a_{ln}，$\bar{a}_{ln}$满足方程(3.11)。取$w=r\exp[i\theta]$，$\alpha_l(\mu)=\mathrm{Re}(p_l(\mu))$，$\beta_l(\mu)=\mathrm{Im}(p_l(\mu))$，我们便得到方程(3.8)。

从原点的渐近稳定性($\mu=0$)可以推出存在$q>0$，使得$\alpha_q(0)<0$，选取$N=2q,\gamma=N$，根据上面的研究，这样的 γ是肯定可以取到的。

现在证明本文的主要结论：

定理3.4 设在方程(3.4)的中心流形上的分叉方程是(3.7)，存在 $\alpha_q(0)<0$，$\alpha_p(0)=0$，$\alpha'_p(0)>0$，$\alpha_{p'}(\mu)\equiv 0$ $(p'<p,p<q)$，当 $\mu>0$ 充分小时，从原点分叉出一个不变环面T^{m+1}，如果此中心流形是渐近稳定的，那么此环面也是渐近稳定的。

证明 展开$\alpha_j(\mu)$

$$\alpha_j(\mu)=\mu\alpha'_j+\mu^2\alpha''_j(\nu_j) \qquad (p\leqslant j<q)$$

$$\alpha_j(\mu)=\alpha_j+\mu\alpha'_j(\nu_j) \qquad (q\leqslant j\leqslant N)$$

令

$$\sum_{j=0}^{N}\alpha_j(\mu)r^{2j+1}=0$$

因为$\alpha'_p>0$，$\alpha_q<0$，所以上式必有一个实根

$$r_0=\left(-\frac{\alpha'_p}{\alpha_q}\right)^{1/2d}\mu^{1/2d}(1+O(\mu^\eta)) \qquad (d=q-p,\eta>0)$$

选取变量代换$r=r_0(1+\mu^s\rho)$ $(s=(2q+1)/2d)$，代入方程(3.3)，我们得到下列方程[5]：

$$\begin{cases} \dot{\rho}=-\alpha\mu^{s-1/2d}\rho+\mu^{s}P_0(\varphi,\theta,\rho,\mu) \\ \dot{\theta}=\omega_0(\mu)+\sum_{j=1}^{N}\beta_j(\mu)r_0^{2j}+\mu^{s}\Theta_0(\varphi,\theta,\rho,\mu) \\ \dot{\varphi}=\omega(\mu)+\mu^{\gamma}\Phi_0(\varphi,\mu) \end{cases} \tag{3.12}$$

其中
$$\alpha=2\alpha_p' d\left(-\frac{\alpha_p'}{\alpha_q}\right)^{q/d}>0$$

对于固定的T，(3.12) 的解$(\rho(T),\ \theta(T),\ \varphi(T))$是初值的函数。因此我们不难求得(3.12)定义的Poincaré映射：

$$\begin{cases} \rho_T=(1-\alpha T\mu^{s-1/2d})\rho_0+\mu^{s}P^*(\varphi_0,\theta_0,\rho_0,\mu) \\ \theta_T=\theta_0+(\omega_0(\mu)+\sum\beta_j(\mu)r_0^{2j})T+\mu^{s}\Theta^*(\varphi_0,\theta_0,\rho_0,\mu) \\ \varphi_T=\varphi_0+\omega(\mu)T+\mu^{\gamma}\Phi^*(\varphi_0,\mu) \end{cases} \tag{3.13}$$

P^*，Θ^*，Φ^*是连续可微函数。

记
$$M=\max_{|\rho_0|\leqslant 1,(\theta,\varphi)\in T^{m+1}}(\|P^*\|_1,\|\Theta^*\|_1,\|\Phi^*\|_1)$$

$\|\cdot\|_1$表示C^1模。在T^{m+1}上定义模：

$$\|(\theta^1,\varphi^1)-(\theta^2,\varphi^2)\|=\min\{|\theta^1-\theta^2|,|\theta^1+\theta^2-2\pi|\}+\sum_{j=1}^{m}\min\{|\varphi_j^1-\varphi_j^2|,|\varphi_j^1+\varphi_j^2-2\pi|\}$$

以及定义在T^{m+1}上的函数空间$\mathscr{F}$

$$\mathscr{F}=\{f\in C^1\,|\,\|f\|\leqslant 1,|f(\theta^1,\varphi^1)-f(\theta^2,\varphi^2)|\leqslant\|(\theta^1,\varphi^1)-(\theta^2,\varphi^2)\|\}$$

以及$\mathscr{F}$上的模：

$$\|f_1-f_2\|=\sup_{T^{m+1}}|f_1(\theta,\varphi)-f_2(\theta,\varphi)|$$

显然，$\mathscr{F}$是一个 Banach 空间。

根据(3.13)定义的 Poincaré 映射，一个三元组(ρ,θ,φ)被变换成为(P,Θ,Φ)。如果存在一个函数关系$\rho=f(\theta,\varphi)$，那么也许会有一个函数关系$P=F(\Theta,\Phi)$。如果这种关系存在，我们便得到一个$\mathscr{F}$上的自映射M_p。如果存在$f^*\in\mathscr{F}$是M_p的不动点，这就意味着存在一个$R\times T^{m+1}$中的不变流形。这正是我们所要证的。

既然映射(3.13)是 Ruelle-Taken 标准型在$R\times T^{m+1}$中的延展，我们只需将[7]中的证明方法略加修改即可。

取$\rho=f(\theta,\varphi)$，代入(3.3)式，

$$\begin{cases} P=(1-T\alpha\mu^{s-1/2d})f(\theta,\varphi)+\mu^{s}P^*(\theta,\varphi,f(\theta,\varphi)) \\ \Theta=\theta+(\omega_0(\mu)+\sum\beta_j r_0^{2j})T+\mu^{s}\Theta^*(\theta,\varphi,f(\theta,\varphi)) \\ \Phi=\varphi+\omega(\mu)T+\mu^{\gamma}\Phi^*(\varphi,\mu) \end{cases} \tag{3.14}$$

容易看出(3.14)的后两式定义了T^{m+1}上的自满射，并有如下性质：

$$\begin{cases} \Theta(\theta+2k_0\pi,\varphi+2k\pi)=\Theta(\theta,\varphi) \qquad (\mathrm{mod}\ 2(k_0,k)\pi) \\ \Phi=(\varphi+2k\pi)=\Phi(\varphi) \qquad (\mathrm{mod}\ 2k\pi) \end{cases}$$

$$|\Theta(\theta^1,\varphi^1)-\Theta(\theta^2,\varphi^2)|\geqslant(1-2M\mu^s)|\theta^1-\theta^2|-\sum_{j=1}^{m}2M\mu^s|\varphi_j^1-\varphi_j^2|$$

$$|\Theta(\theta^1,\varphi^1)-\Theta(\theta^2,\varphi^2)|\leqslant(1-2M\mu^s)|\theta^1-\theta^2|+\sum_{j=1}^{m}2M\mu^s|\varphi_j^1-\varphi_j^2|$$

$$|\Phi_j(\varphi^1)-\Phi_j(\varphi^2)|\geqslant|\varphi_j^1-\varphi_j^2|-\sum_{j=1}^{m}2M\mu^s|\varphi_j^1-\varphi_j^2| \tag{3.15}$$

$$|\Phi_j(\varphi^1)-\Phi_j(\varphi^2)|\leqslant|\varphi_j^1-\varphi_j^2|+\sum_{j=1}^{m}2M\mu^s|\varphi_j^1-\varphi_j^2|$$

根据(3.15)不难导出

$$\|(\theta^1,\varphi^1)-(\theta^2,\varphi^2)\|\leqslant(1-2M\mu^s)^{-1}\|(\Theta^1,\Phi^1)-(\Theta^2,\Phi^2)\|$$

这表示存在反函数T^{-1}：$(\theta,\varphi)=T^{-1}(\Theta,\Phi)$，而且(3.14)决定了一个函数$F:P=F(\Theta,\Phi)$。因此$M_p$是有定义的。和[7]中证明类似，$M_p$是压缩的，$\mathscr{F}\to\mathscr{F}$。这说明$\mathscr{F}$中存在唯一的渐近稳定不动点$f^*$。

作者对方同教授的帮助表示衷心感谢。

参 考 文 献

[1] Ruelle, D. and F. Takens, On the nature of turbulence, *Comm. Math. Phys.*, **20**, 23 (1971).

[2] Newhause, S., D. Ruelle and F. Takens, Occurrence of strange axiom *A* attractors near quasi-periodic flow on $T^m(m\geqslant3)$, *Comm. Math. Phys.*, **64** (1978).

[3] Sell, G. R., Bifurcation of higher dimensional tori, *Arch. Rational Mech. Analysis*, **69** (1979).

[4] Sell, G. R., Resonance and bifurcation in Hopf-Landau dynamical system, in *Nonlinear Dynamics and Turbulence*, Pitman, London (1983).

[5] 程崇庆，一类非线性系统的Hopf-Landau分叉，西北工业大学博士论文（1987）.

[6] 林振声，《概周期微分方程与积分流形》，上海科技出版社（1986）.

[7] 钱敏等，非自治系统的不变圈（解流形）分支，数学学报，**26**（1983）.

Hopf-Landau Bifurcations of Higher Dimensional Tori

Cheng Chong-qing

(*Northwestern Polytechnical University, Xi'an*)

Abstract

The existence of degenerate bifurcations from T^m to T^{m+1} is proved under the condition of quasi-periodic critical points.