应用数学和力学，第10卷第5期（1989年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 付氏变换在三角级数求和中的应用

钱 伟 长

（上海工业大学；上海市应用数学和力学研究所，1988年7月30日收到）

**摘 要**

本文建立了用付氏变换在三角级数求和中的新的重要定理，并用付氏变换的已知结果，解决了不少困难和复杂的三角级数求和问题.这是三角级数求和的新方法，作者曾用以编著了数以万计的三角级数之和的大表．许多结果都是新的．

## 一、引 论

三角级数求和在电路设计、弹性力学计算和热传导问题中都是重要的．虽有电子计算机可以进行数值计算，除对一部份变化较为平稳的问题确能得到比较可靠合理的结果外，对一般常见的有不连续点的问题，如集中载荷，电路的启动和停闭，不同脉冲线路等有突变的问题，都不能得到较满意的结果．用三角级数的有限项来近似计算三角级数之和时，在不连续点上出现所谓吉布斯（Gibbs）现象[1]，即有限项近似和值在不连续点附近比正确值突超范围可达不连续跳跃值的9%．这种吉布斯现象困扰了许多人，即使采用了40～50项的级数仍无法解决这种现象．

为了避免这种缺点，三角级数的综合求和仍很重要，特别是那些系数本身就是复杂函数的三角级数的求和，经常是既重要而又困难的问题．为了推广这种求和的可能性，本文提出了利用付氏正弦变换和余弦变换来帮助求和的方法．本法也可以推广到利用其它的积分变换的求和方法．由于目前我们有不少公开的付氏变换表[2],[3],[4]，这些表将简化有关三角级数的求和工作．

## 二、一些有用的三角级数

下列三角级数将在本文有用：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\cos kx=\pi\delta_{2\pi}(x)-\frac{1}{2}\qquad(-\infty<x<\infty)\qquad(2.1\mathrm{a})$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx=\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\qquad(-\infty<x<\infty)\qquad(2.1\mathrm{b})$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}=-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{2.1c}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}=\frac{\pi-x}{2} \qquad (0\leqslant x\leqslant 2\pi) \tag{2.1d}$$

其中(2.1a)，(2.1b)是Abel求和法所得结果，(2.1a)，(2.1b)，(2.1c) 都在个别点上是发散的，但可以求积。(2.1d)在$x=0$，$2\pi$，……$2k\pi$点上有不连续性质。$\delta_{2\pi}(x)$是以$2\pi$为周期周期性Dirac $\delta$函数。这是一个广义函数，它在$x=2m\pi(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$各点上都是无穷大，在其它区城内都等于零，但有下列积分性质

$$\int_{x}^{x+2\pi}\delta_{2\pi}(\xi)d\xi=1 \tag{2.2a}$$

$$\int_{x}^{x+2\pi}\delta_{2\pi}(\xi)f(\xi)d\xi=f(2m\pi) \qquad (x<2m\pi<x+2\pi) \tag{2.2b}$$

$$\int_{x}^{x+2\pi}f(\xi)\delta_{2\pi}(\xi-(x_1)d\xi=f(x_1) \qquad (x-x_1<2m\pi<x-x_1+2\pi) \tag{2.2c}$$

$$\delta_{2\pi}(x)=\infty \qquad (x=2m\pi, \quad m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots) \tag{2.2d}$$

付氏变换有两种定义，一种在积分号前有系数 $(2/\pi)^{1/2}$，这在通常都认为是较合理的定义，Oberhettinger[3]和Maghus[4]等人的付氏变换表上都用这种定义。另一种定义在积分号上不用这个系数，它是Erdelyi[5]表上所用的定义，它少一个因子$(2/\pi)^{1/2}$，用起来比较方便，可以少写许多字，但对我们这个用场里，用不用$(2/\pi)^{1/2}$这个因子，在结果上毫无区别，所以本文使用后者的定义，但在使用Oberhettinger 和Magns 的两种公式时，应该消去这个因子$(2/\pi)^{1/2}$。

让我们把付氏变换定义为

$$g_c(y)=\int_0^{\infty}f(x)\cos xy dx \qquad (\text{余弦变换}) \tag{2.3a}$$

$$g_s(y)=\int_0^{\infty}f(x)\sin xy dx \qquad (\text{正弦变换}) \tag{2.3b}$$

付氏变换表就是列举付氏变换中$g_c(y)$和$f(x)$以及$g_s(y)$和$f(x)$的对应表格。

## 三、一个正弦级数的定理

我们首先将证明下列定理 1（正弦级数定理）

**定理1** 设$g_s(y)$为$f(x)$的正弦变换，即

$$g_s(y)=\int_0^{\infty}f(x)\sin xy dx \tag{3.1}$$

则我们可以有以$g_s(k)$为系数的正弦级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}g_s(k)\sin kt=\frac{\pi}{2}\left\{f(t)+\sum_{n=1}^{\infty}[f(2\pi n+t)-f(2\pi n-t)]\right\} \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi) \tag{3.2}$$

其条件为$f(x)$在$0\leqslant x<\infty$中都存在。

**证明** 从(3.1)，我们组成三角级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_s(k)\sin kt=\int_0^{\infty} f(x)\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx\sin kt dx$$

$$=\int_0^{\infty} f(x)\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[\cos k(x-t)-\cos k(x+t)]dx \tag{3.3}$$

在用了(2.1a)以后

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_s(k)\sin kt=\frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} f(x)[\delta_{2\pi}(x-t)-\delta_{2\pi}(x+t)]dx \tag{3.4}$$

但是

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\infty} f(x)\delta_{2\pi}(x+t)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty} f(2\pi n-t) \qquad (0<t<2\pi)\\&\int_0^{\infty} f(x)\delta_{2\pi}(x-t)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty} f(2\pi n+t) \qquad (0<t<2\pi)\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

代入(3.4)式，得(3.2)式。这就证明了定理1。

定理1指出：只要$f(x)$在$0<x<\infty$都存在，则(3.2)式右端也是一个无穷级数。但是，在很多情形下，这是一个可以求和的无穷级数。于是，(3.2)式右端也可以化为有限项的一般函数。

如果

$$f(x)=\begin{cases}f(x) & (0<x<a)\\ 0 & (a\leqslant x<\infty)\end{cases} \tag{3.6}$$

则(3.2)式右端的无穷项中有许多项恒等于零。所以也只有有限项。

现以Erdelyi[2]表中72页的第一项为例，设$f(x)$和$g_s(y)$为

$$f(x)=\exp[-ax], \qquad g_s(y)=y(a^2+y^2)^{-1} \qquad (a>0) \tag{3.7}$$

其实$g_s(y)$是可以通过积分求得的。即从

$$g_s(y)=\int_0^{\infty}\exp[-ax]\sin xy dx \tag{3.8}$$

可以求得(3.7)。同时

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} f(2\pi n-t)=\exp[+at][\exp[-2\pi a]+\exp[-4\pi a]+\cdots]\\&\sum_{n=1}^{\infty} f(2\pi n+t)=\exp[-at][1+\exp[-2\pi a]+\exp[-4\pi a]+\cdots]\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

这两个无穷级数都能求和，即

$$\left.\begin{aligned}&\exp[-2\pi a]+\exp[-4\pi a]+\exp[-6\pi a]+\cdots=\frac{\exp[-2\pi a]}{1-\exp[-2\pi a]}\\&1+\exp[-2\pi a]+\exp[-4\pi a]+\exp[-6\pi a]+\cdots=\frac{1}{1-\exp[-2\pi a]}\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

于是从(3.2)式，即可简化为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{a^2+k^2}\sin kt=-\frac{\pi}{2}\frac{\sinh a(t-\pi)}{\sinh a\pi}\qquad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)\tag{3.11}$$

这是一个无穷级数可以求和的问题，其结果是一个封闭形式的单项。

现在让我们研究一个$f(x)$在$x\geqslant a$时等于0的例子，以Erdelyi[2]表中69页的第九项为例。设$f(x)$和$g(y)$为

$$\left.\begin{aligned}&f(x)=2^{1-\nu}\pi^{1/2}a^{-(1+\nu)}\frac{1}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}x(a^2-x^2)^{\nu-1/2}\quad\left(0<x<a,\ \ \mathrm{Re}(\nu)>-\frac{1}{2}\right)\\&f(x)=0\quad(a\leqslant x<\infty)\\&g_s(y)=y^{-\nu}J_{\nu+1}(ay)\end{aligned}\right\}\tag{3.12}$$

其实$g_s(y)$是可以通过积分求得的。

$$y^{-\nu}J_{\nu+1}(ay)=\int_0^a 2^{1-\nu}\pi^{-1/2}a^{-(1+\nu)}\frac{1}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}x(a^2-x^2)^{\nu-1/2}\sin(xy)\,dx\tag{3.13}$$

如果称$ay=z$，则得

$$J_{\nu+1}(z)=\pi^{-1/2}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1}\frac{1}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi/2}\cos\theta(\sin\theta)^{2\nu}\sin(z\cos\theta)\,d\theta\tag{3.14}$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\nu}}J_{\nu}(ka)\sin ak\sin kt$$

$$=\left(\frac{1}{2a}\right)^{\nu}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{2a}(2a\xi-\xi^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\sin kt\sin k\xi\,d\xi\tag{3.15}$$

称

$$\omega(\xi)=(2a\xi-\xi^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\tag{3.16}$$

用相同的步骤，我们求得

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^{\nu}}J_{\nu}(ka)\sin ak\sin kt=\left(\frac{1}{2a}\right)^{\nu}\sqrt{\pi}\frac{1}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\cdot\left\{\sum_{0}^{n_1}\omega(2\pi n+t)-\sum_{0}^{n_2}\omega(2\pi n-t)\right\}\qquad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)\tag{3.17}$$

$n_1$和$n_2$是由下式决定的

$$\left.\begin{aligned}&2a-2n_1\pi<t<2a-2(n_1+1)\pi\\&2n_2\pi-2a<t<2(n_2+1)\pi-2a\end{aligned}\right\}\qquad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)\tag{3.18}$$

这也是有限项的结果。

## 四、一个余弦级数的定理

我们现在证明下列定理2（余弦级数定理）

**定理2** 设$g_c(y)$是$f(x)$的余弦变换，即

$$g_c(y)=\int_0^\infty f(x)\cos xy dx \tag{4.1}$$

则我们有以$g_c(k)$为系数的余弦级数

$$\sum_{k=1}^\infty g_c(k)\cos kt=\frac{\pi}{2}\left\{f(t)+\sum_{k=1}^\infty\left[f(2\pi n+t)+f(2\pi n-t)\right]-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x)dx\right\} \tag{4.2}$$

这里要求$\int_0^\infty f(x)dx$有限。

**证明** 从(4.1)，我们组成三角级数

$$\sum_{k=1}^\infty g_c(k)\cos kt=\sum_{k=1}^\infty\int_0^\infty f(x)\cos kx\cos kt dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty f(x)\sum_{k=1}^\infty\left[\cos k(x+t)+\cos k(x-t)\right]dx \tag{4.3}$$

这里利用(2.1a)，得

$$\sum_{k=1}^\infty g_c(k)\cos kt=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty f(x)\left[\delta_{2\pi}(x+t)+\delta_{2\pi}(x-t)-\frac{1}{\pi}\right]dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{f(x)+\sum_{k=1}^\infty[f(2\pi n+t)+f(2\pi n-t)]-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x)dx\right\} \tag{4.3$'$}$$

这就证明了定理2。

定理2的成立，必须要$\int_0^\infty f(x)dx$有限，而且余弦级数化为另一个收敛较好的另一无穷级数，在不少情况下，它是可以求和的。如果$f(x)$满足(3.6)式，则无穷级数有许多高次项恒等于零，所以也是有限项。

现在也用Erdelyi[2]表第14页第1项，取

$$f(x)=\exp[-ax],\qquad g_c(y)=a(a^2+y^2)^{-1} \tag{4.4}$$

我们从分部积分很易证明

$$g_c(y)=\int_0^\infty \exp[-ax]\cos yx dx=\frac{a}{a^2+y^2} \tag{4.4$'$}$$

同时

$$f(t)=\exp[-at],\qquad \int_0^\infty f(t)\,dt=-\frac{1}{a}$$

$$\sum_{k=1}^\infty f(2\pi n+t)+\sum_{k=1}^\infty f(2n\pi-t)=2\cosh at\sum_1^\infty[\exp(-2n\pi a)]$$

$$=2\exp[-2\pi a]\cosh at\frac{1}{1-\exp[-2\pi a]}=\exp[-\pi a]\ \frac{\cosh at}{\sinh a\pi} \tag{4.5}$$

于是，余弦级数可以写成

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a}{a^2+y^2}\cos kt=\frac{\pi}{2}\left\{\exp[-at]+\exp[-\pi a]\frac{\cosh at}{\sinh a\pi}-\frac{1}{\pi a}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{\frac{\cosh a(t-\pi)}{\sinh a\pi}-\frac{1}{\pi a}\right\}\tag{4.6}$$

或有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a^2+k^2}\cos kt=-\frac{1}{2a^2}+\frac{\pi}{2a}\frac{\cosh a(t-\pi)}{\sinh a\pi}\tag{4.7}$$

我们很易通过(4.7)对$t$求导而证明(3.11)式。

在现让我们取Erdelyi[2]表第11页的第8项为例，并取$\nu=0$，于是

$$\left.\begin{array}{ll} f(x)=(a^2-x^2)^{-1/2} & (0<x<a) \\ f(x)=0 & (a<x<\infty) \end{array}\right\}\tag{4.8}$$

$$g_0(y)=\frac{\pi}{2}J_0(ay)\tag{4.9}$$

组成余弦变换

$$J_0(ay)=\frac{2}{\pi}\int_0^a\frac{\cos ty}{\sqrt{a^2-t^2}}dt\tag{4.10}$$

这一点是很易证明的，设$t=a\sin\theta$，(4.10)变成

$$J_0(ay)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(ay\sin\theta)\,d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(ay\sin\theta)\,d\theta\tag{4.11}$$

这是贝塞尔函数的积分表达式。

现在我们利用(4.10)式组成余弦级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}J_0(ak)\cos kt=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^a\frac{\cos xk\cos tk}{(a^2-x^2)^{1/2}}dx\tag{4.12}$$

引进新的函数，

$$f(x)=\frac{1}{(a^2-x^2)^{1/2}}\tag{4.13}$$

我们得

$$\sum_{k=1}^{\infty}J_0(ak)\cos kt=\frac{\pi}{2}\left\{f(t)+\sum_{n=1}^{n_1}f(2\pi n+t)+\sum_{n=1}^{n_2}(2\pi n-t)-\frac{1}{\pi}\int_0^a\frac{1}{(a^2-x^2)^{1/2}}dx\right\}\tag{4.14}$$

其中$n_1$，$n_2$是由下列条件决定的：即不允许$x$大于$a$当$x_{\max}=2\pi n_1+t<a<2\pi(n_1+1)+t$或$x_{\max}=2\pi n_2-t<a<2\pi(n_2+1)-t$时，我们决定$n_1$和$n_2$，所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}J_0(ak)\cos kt=\frac{\pi}{2}\left\{\sum_{n=0}^{n_1}\frac{1}{[a^2-(2n\pi+t)^2]^{1/2}}+\sum_{n=1}^{n_2}\frac{1}{[a^2-(2n\pi-t)^2]^{1/2}}-\frac{1}{2}\right\}\tag{4.15}$$

$n_1$和$n_2$有下列各种可能性

(i) 设$2t<2\pi$，则$2\pi(n_2-n_1)<2t<2\pi$，所以只能有

$$n_2=n_1 \qquad (条件是2t<2\pi) \tag{4.16}$$

于是，(4.15)式可以写成

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_0(ak)\cos kt=-\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{n_1}\frac{1}{[a^2-(2n\pi+t)^2]^{1/2}}+\sum_{n=1}^{n_1}\frac{1}{[a^2-(2n\pi-t)^2]^{1/2}}$$

$$=-\frac{1}{2}+\sum_{n=-n_1}^{n_1}\frac{1}{[a^2-(2n\pi-t)^2]^{1/2}}$$

$$(2t<2\pi;\ 2\pi n_1<a-t<2\pi(n_1+1)) \tag{4.17}$$

这里又有下列几种可能：

(ia) $t<\pi$，$a<t$，则(4.17)中连$n=0$之一项也不存在，所以

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_0(ka)\cos kt=-\frac{1}{2} \qquad (a<t<\pi) \tag{4.18}$$

(ib) $t<\pi$，$a>t$，则按(4.17)式所给条件$2\pi n_1<a-t<2\pi(n_1+1)$决定$n_1$。

(ii) 设 $\pi<t<2\pi$，$a+t<2\pi$，则(4.5)中，所有$n$项都不存在，级数之和见（4.18）式。

(iii) 设 $\pi<t<2\pi$，$2\pi<a+t$，$a-t<0$，则有

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_0(ka)\cos kt=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{n_2}\frac{1}{[a^2-(2n\pi-t)^2]^{1/2}}$$

$$(2\pi n_2<a+t<2\pi(n_2+1)) \tag{4.19}$$

(iv) 设 $\pi<t<2\pi$，$2\pi<a+t$，$a-t>0$ 则有

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_0(ka)\cos kt=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{n_2}\frac{1}{[a^2-(2n\pi-t)^2]^{1/2}}+\sum_{n=0}^{n_1}\frac{1}{[a^2-(2\pi n+t)^2]^{1/2}}$$

$$(2\pi n_2<a+t<2\pi(n_2+1);\ 2\pi n_1<a-t<2\pi(n_1+1)) \tag{4.20}$$

在这种条件下，$n_2-n_1=1$。于是上式可以化为

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_0(ka)\cos kt=-\frac{1}{2}+\sum_{n=-(n_2-1)}^{n_2}\frac{1}{[a^2-(2n\pi-t)^2]^{1/2}}$$

$$(2\pi n_2<a+t<2\pi(n_2+1)) \tag{4.21}$$

## 五、几种复杂的三角级数之和

现在我们将通过上法求得一些复杂的三角级数之和。

根据Erdelyi[2]表第29页第2项，有

$$\left.\begin{aligned} &f(x)=(2\pi)^{\frac{3}{2}}\,x^{-\frac{1}{2}}\,(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cos[\nu\cos^{-1}(x/a)] && (0<x<a)\\ &f(x)=0 && (a<x<\infty)\\ &g_c(y)=\sqrt{y}\,J_{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}ay\right)J_{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}ay\right) && (0<y<\infty)\end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

求下列三角级数之和

$$F(t)=\sum_{k=1}^{\infty} g_e(k)\cos kt=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{k}\,J_{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}ak\right)J_{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}ak\right)\cos kt \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi) \tag{5.2}$$

根据余弦变换，有

$$F(t)=(2\pi)^{3/2}\int_0^a x^{-\frac{1}{2}}(a^2-x^2)^{-1/2}\cos[\nu\cos^{-1}(x/a)]\sum_{k=1}^{\infty}\cos kx\cos kt\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^a f(x)\left[\delta_{2\pi}(x+t)+\delta_{2\pi}(x-t)-\frac{1}{\pi}\right]dx \tag{5.3}$$

其中$f(x)$见(5.1)式，(5.3)式可以化为

$$F(t)=\frac{\pi}{2}\left\{\sum_{n=1}^{n_1} f(2n\pi-t)+\sum_{n=0}^{n_2} f(2n\pi+t)-\frac{1}{\pi}\int_0^a f(x)\,dx\right\} \tag{5.4}$$

式中$n_1$和$n_2$由下式决定

$$2n_1\pi<a+t<2(n_1+1)\pi,\qquad 2\pi n_2<a-t<2\pi(n_2+1) \tag{5.5}$$

(5.4)式中的最后一个积分项可以简化为

$$\int_0^a f(x)\,dx=(2\pi)^{3/2}\int_0^a x^{-\frac{1}{2}}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cos[\nu\cos^{-1}(x/a)]\,dx$$

$$=(2\pi)^{3/2}a^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\nu\theta}{\sqrt{\cos\theta}}d\theta \tag{5.6}$$

最后，(5.4)可以进一步简化为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{k}\,J_{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}ak\right)J_{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}ak\right)\cos kt$$

$$=2^{1/2}\pi^{5/2}\left\{\sum_{n=1}^{n_1}(2n\pi-t)^{-\frac{1}{2}}[a^2-(2n\pi-t)^2]^{-\frac{1}{2}}\cos\left[\nu\cos^{-1}\frac{1}{a}(2n\pi-t)\right]\right.$$

$$+\sum_{n=0}^{n_2}(2n\pi+t)^{-\frac{1}{2}}[a^2-(2n\pi+t)^2]^{-\frac{1}{2}}\cos\left[\nu\cos^{-1}\frac{1}{a}(2n\pi+t)\right]$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}a^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\nu\theta}{\sqrt{\cos\theta}}d\theta\right\} \tag{5.7}$$

或可进一步简化为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{k}\,J_{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}ka\right)J_{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}ka\right)\cos kt$$

$$=2^{1/2}\pi^{5/2}\left\{\sum_{n=-n_1}^{n_2}(2n\pi-t)^{-\frac{1}{2}}[a^2-(2n\pi-t)^2]^{-\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.\cdot\cos\left[\nu\cos^{-1}\frac{1}{a}(2n\pi-t)\right]-\frac{1}{\pi}a^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\nu\theta}{\sqrt{\cos\theta}}d\theta\right\}\qquad(0\leqslant t\leqslant 2\pi) \tag{5.8}$$

$n_1$和$n_2$由（5.5）式决定。

再取一例，根据 Magnus 等的表(4)第427页最后一项，我们有

$$\left.\begin{array}{ll} f(x)=\frac{1}{2}J_\nu(a\sin x) & (0<x<a) \\ f(x)=0 & (a<x<\infty) \end{array}\right\} \tag{5.9}$$

有关$g_s(y)$为

$$g_s(y)=\sin\left(\frac{1}{2}\pi y\right)J_{\frac{(\nu-y)}{2}}\left(\frac{1}{2}a\right)J_{\frac{(\nu+y)}{2}}\left(\frac{1}{2}a\right) \tag{5.10}$$

根据（3.2）式，我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_s(k)\sin kt=\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{2}\pi k\right)J_{\frac{(\nu-k)}{2}}\left(\frac{1}{2}a\right)J_{\frac{(\nu+k)}{2}}\left(\frac{1}{2}a\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{\sum_{n=0}^{n_1} J_\nu[a\sin(2\pi n+t)]-\sum_{n=1}^{n_2} J_\nu[a\sin(2\pi n-t)]\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\sum_{n=-n_2}^{n_1} J_\nu[a\sin(2\pi n+t)] \tag{5.11}$$

其中

$$2\pi n_2<a+t<2\pi(n_2+1) \qquad 2\pi n_1<a-t<2\pi(n_1+1) \tag{5.12}$$

## 六、泊桑求和式（Poisson Summation Formula）

我们可以证明有名的泊桑求和式[5]是定理 2 的一个特例：在（4.2）中，置$t=0$，即得

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_c(k)=\frac{\pi}{2}\left\{f(0)+2\sum_{k=1}^{\infty} f(2\pi k)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\,dx\right\} \tag{6.1}$$

在（4.1）中置$y=0$，即得

$$g_c(0)=\int_0^{\infty} f(x)\,dx \tag{6.2}$$

于是

$$\frac{1}{2}g_c(0)+\sum_{k=1}^{\infty} g_c(k)=\frac{\pi}{2}\left\{f(0)+2\sum_{n=1}^{\infty} f(2\pi n)\right\} \tag{6.3}$$

(6.3) 就是泊桑求和式，Infeed，Smith 和 本文作者[8]，曾用这个公式在计算矩形波导中圆柱天线问题中求得了

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m Y_0(mx) \tag{6.4}$$

和

$$2\pi\sum_{m=1}^{\infty}\cos(2\pi km)H_0^{(2)}(2\pi z\sqrt{m^2+\varepsilon^2}) \qquad (0<k<1) \tag{6.5}$$

等级数之和。

## 七、有关交叉三角级数的定理

定理1和2都有一个特点，即正弦级数是建立在正弦变换 $g_s(y)$ 上的，而余弦级数则建立在余弦变换 $g_c(y)$ 上的。下面我们进一步利用(2.1b)，在正弦变换的基础上建立余弦级数之和，或在余弦变换的基础上建立正弦级数。

**定理3** 设 $g_s(y)$ 为 $f(x)$ 的正弦变换

$$g_s(y)=\int_0^\infty f(x)\sin xy dx \tag{7.1}$$

则我们可以有以 $g_s(k)$ 为系数的余弦级数

$$\sum_{k=1}^\infty g_s(k)\cos kt=\frac{1}{2}\int_0^\infty f(x)\frac{\sin x}{\cos t-\cos x}dx \tag{7.2}$$

**证明** 根据（7.1），我们有

$$\sum_{k=1}^\infty g_s(k)\cos kt=\int_0^\infty f(x)\sum_{k=1}^\infty \sin kx\cos kt dx \tag{7.3}$$

但是

$$\sum_{k=1}^\infty \sin kx\cos kt=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^\infty\{\sin k(x+t)+\sin k(x-t)\} \tag{7.4}$$

根据(2.1b)，上式之和为

$$\sum_{k=1}^\infty \sin kx\cos kt=\frac{1}{4}\left[\cot\frac{1}{2}(x+t)+\cot\frac{1}{2}(x-t)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos t-\cos x} \tag{7.5}$$

把（7.5）代入(7.3)，即得（7.2）式，定理3证毕。

**定理4** 设 $g_c(y)$ 为 $f(x)$ 的余弦变换

$$g_c(y)=\int_0^\infty f(x)\cos xy dx$$

则我们可以有以 $g_c(y)$ 为系数的正弦级数

$$\sum_{k=1}^\infty g_c(k)\sin kt=\frac{1}{2}\int_0^\infty f(x)\frac{\sin t}{\cos x-\cos t}dx \tag{7.6}$$

定理证明过程和定理3的证明相似，这里从略。

## 八、有关降阶的交叉三角级数的定理

定理5和定理6既是交叉的，即正弦变换为系数的余弦级数，和余弦变换为系数为正弦级数，而且系数都增一个因子 $1/k$，亦即降一阶。

**定理5** 设 $g_s^*(y)$ 为 $f(x)$ 的正弦变换，

$$g_s^*(y)=\int_0^{2\pi} f(x)\sin xy dx \tag{8.1}$$

则可以有一个以$k^{-1}g_s^*(k)$为系数的余弦级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_s^*(k)\frac{1}{k}\cos kt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\pi-x)f(x)dx$$

$$-\frac{\pi}{2}\int_0^t f(x)dx+\frac{\pi}{2}\int_{2\pi-t}^{2\pi} f(x)dx \tag{8.2}$$

这里必须指出$g_s^*(y)$的积分变换式的上限为$2\pi$。

**证明** 从(8.1)式，我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_s^*(k)\frac{1}{k}\cos kt=\int_0^{2\pi} f(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin xk\cos kt dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}[\sin k(x+t)+\sin k(x-t)]dx \tag{8.3}$$

根据(2.1d)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}[\sin k(x+t)]=\begin{cases}\frac{1}{2}[\pi-(x+t)] & (0\leqslant x\leqslant t)\\ \frac{1}{2}[\pi-(x+t)] & (t\leqslant x\leqslant 2\pi-t)\\ \frac{1}{2}[\pi-(x-2\pi+t)] & (2\pi-t\leqslant x\leqslant 2\pi)\end{cases} \tag{8.4}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}[\sin k(x-t)]=\begin{cases}\frac{1}{2}[\pi-(x+2\pi-t)] & 0\leqslant x\leqslant t)\\ \frac{1}{2}[\pi-(x-t)] & (t\leqslant x\leqslant 2\pi-t)\\ \frac{1}{2}[\pi-(x-t)] & (2\pi-t\leqslant x\leqslant 2\pi)\end{cases} \tag{8.5}$$

于是有

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}[\sin k(x+t)+\sin k(x-t)]$$

$$=\begin{cases}-\frac{1}{2}x & (0\leqslant x\leqslant t)\\ \frac{1}{2}(\pi-x) & (t\leqslant x\leqslant 2\pi-t)\\ \frac{1}{2}(2\pi-x) & (2\pi-t\leqslant x\leqslant 2\pi)\end{cases} \tag{8.6}$$

把（8.6）代入(8.3)，整理后即得(8.2)，定理证明完了。

**定理6**　设$g_c^*(y)$为$f(x)$在余弦变换

$$g_c^*(y)=\int_0^{2\pi} f(x)\cos xy\,dx \tag{8.7}$$

则必有一个以$k^{-1}g_c^*(y)$为系数的正弦级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}g_c^*(k)\sin kt=\frac{1}{2}(\pi-t)\int_0^t f(x)\,dx-\frac{1}{2}t\int_t^{2\pi-t}f(x)\,dx$$

$$+\frac{1}{2}(\pi-t)\int_{2\pi-t}^{2\pi} f(x)dx \tag{8.8}$$

其中$g_c^*(y)$的积分变换式的上限为$2\pi$。

证明和定理 5 相似，这里从略。

现在选用下例，设

$$\left.\begin{array}{ll} f(x)=\exp[-ax] & (0\leqslant x\leqslant 2\pi) \\ f(x)=0 & (2\pi\leqslant x<\infty) \end{array}\right\} \tag{8.9}$$

从(8.1)，(8.7)，得

$$g_c^*(y)=\frac{1}{y^2+a^2}\Big[y\exp[-2\pi a]\sin 2\pi y-a\exp[-2\pi a]\cos 2\pi y+a\Big] \tag{8.10}$$

$$g_s^*(y)=\frac{1}{y^2+a^2}\Big\{-y\exp[-2\pi a]\cos 2\pi y-a\exp[-2\pi a]\sin 2\pi y+y\Big\} \tag{8.11}$$

当$y=k$时

$$g_c^*(k)=\frac{2a\sinh\pi a}{k^2+a^2}\exp[-\pi a] \tag{8.12a}$$

$$g_s^*(k)=\frac{2k\sinh\pi a}{k^2+a^2}\exp[-\pi a] \tag{8.12b}$$

于是从(8.2)，(8.8)，我们求得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+a^2}\cos kt=-\frac{1}{2a^2}\left\{1-\pi a\frac{\cosh a(t-\pi)}{\sinh a\pi}\right\} \tag{8.13a}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k^2+a^2)}\sin kt=\frac{1}{2a^2}\left\{\pi-t+\pi\frac{\sinh a(t-\pi)}{\sinh a\pi}\right\} \tag{8.13b}$$

(8.13b)对$t$的导数给出(8.13a)。同时（8.13a）和（4.7）相等同，(8.13a)对$t$的导数给出(3.11)式。这些都是相互校核的结果。

## 参 考 文 献


[1] Harry, F. Davis, *Fourier Series and Orthogonal Functions*, Allyn and Bacon, Boston (1963).

[2] Erdelyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, *Table of Integral Transformations*, 2 vols., MacGraw Hill, New York (1950).

[3] Oberhettinger, F., *Tables of Fourier Transformation*, Springer (1957).

[4] Magnus, W., F. Oberhettinger, and R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the*

*Special Functions of Mathematical Physics*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, New York (1986).

[5] Stakgold, I., *Green's Functions and Boundary Value Problems*, John Wiley and Sons, New York (1979).

[6] Infeld, L., V. G. Smith and W. Z. Chien, On some series of Bessel functions, *Journal of Mathematics and Physics*, USA, **26**, 1 (1947), 22—28.

[7] Willers, Fr. A., *Practical Analysis*, Dover (1948).

# Summation of Trigonometric Series By Fourier Transforms

Chien Wei-zang

(*Shanghai University of Technology; Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai*)

**Abstract**

This paper gives the theorems concerning the summation of trigonometric series with the help of Fourier transforms. By means of the known results of Fourier transforms, many difficult and complex problems of summation of trigonometric series can be solved. This method is a comparatively unusual way to find the summation of trigonometric series, and has been used to establish the comprehensive table of summation of trigonometric series. In this table, 10 thousand series are given, and most of them are new.