

# 非轴对称模型 Hagen-Poiseuille 流的不稳定性

王发民 简·特斯·斯图亚特

(中国科学院力学研究所) (英·帝国理工学院)

(钱伟长推荐, 1988年2月13日收到)

## 摘 要

本文讨论流体通过圆管的运动不稳定性问题。作为流体运动所受的扰动波, 我们考虑一个三维非线性模型。它的相关振幅函数满足扩散方程, 当流体的雷诺数增大时, 由于复杂的分子扩散和流体粘性的相互作用, 该方程的扩散系数会出现负值。在“负扩散”现象出现时, 在流体运动中出现的“湍流段”内部会引起能量的集中和使流体的阻尼减少。文中所得结果对说明圆管流中出现湍流段的实验现象是有价值的。

## 一、引 言

Hagen-Poiseuille 流的稳定性问题, 无论在理论方面还是在实验方面, 都已经有许多流体力学工作者做了大量的工作。然而这一问题至今还有许多有待解开的谜。在理论方面, 尽管没有严格的证明, 但一般都认为该流体运动对于线性扰动是稳定的。而在实验中发现, 如果能很小心地保证流体不受干扰, 层流可以保持到雷诺数高达 50000 (Ekman, Taylor), 另一方面, 如果流体允许受到很小扰动的话, 在雷诺数 2000 就会出现湍流现象。

上面的研究给我们这样一个启示, 即只有当依赖流体能量的非线性模型的振幅明显地影响小扰动的特征时, 该流体的运动不稳定性才会发生, 从而非线性理论的研究和应用就必然地出现了。

Stuart, J. T. (1958), (1960) 和 Watson, J. (1960) 建立了弱非线性理论。尽管理论说明了不少临界状态下的物理现象, 但是, 对于 Hagen-Poiseuille 流, 由于该流体运动不象平面 Poiseuille 流那样存在一条中性曲线, 它是不适用的。Dowey, A (1971), Iton, N. (1978) 等都做过这方面的尝试, 当然, 他们没有找出振幅方程的分叉点。

Cotes, D. (1962), Wagnanski 和 Changzagnl (1971) 发表了他们在实验中发现的, 在流体流经管道时, 会出现在开头和尾部有明显分界面的湍流段的物理现象。在湍流段内部流体具有湍流涡, 而在湍流段外部, 流体呈现层流, 而且该湍流段象塞子一样以某种速度扩散。

Stuart, J. T. (1981) 讨论了仅仅受到旋转扰动情况下的 Hagen-Poiseuille 流的稳定性问题, 根据长波理论提出了对缓慢变化的“塞子”的理论解释。

本文讨论了非轴对称非线性模型的 Hagen-Poiseuille 流的稳定性问题。推证了该非线性模型的振幅函数满足一扩散方程。当流体的雷诺数增大时，其扩散系数会出现负值，引起在湍流段内部流体能量的集中，并使阻尼减少。

## 二、流体的运动方程

作为一个力学模型，让我们考虑不可压缩流体通过一个圆截面的长管。设管长为  $L$ ，半径为  $a$ ，在层流状态下，流体由压力梯度产生一运动速度，它在管子中心处取极大值  $U_0$ 。取  $r$  和  $\theta$  分别表示径向和角度坐标， $z$  表示轴向坐标。 $u, v, w$  分别表示对应的速度分量， $p$  表示压力， $t$  表示时间。我们选择  $U_0, a, a/U_0$  和  $U_0^2 p/\rho$  分别为速度，长度，时间和压力的无量纲化参照系，则流体运动满足无量纲方程。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + R^{-1} \left( \nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} &= -\frac{\partial p}{r \partial \theta} + R^{-1} \left( \nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + R^{-1} \nabla^2 w \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

$$\text{和} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

$$\text{式中} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.3a)$$

$$R = U_0 a / \nu \quad (2.3b)$$

表示流体的雷诺数， $\nu$  表示动量粘度。

从物理角度考虑，在管子的中心处，流体的速度和压力必须是有界连续的，在管壁流体是无滑移的。则上述方程满足边界条件：

$$\left. \begin{aligned} u, v, w, p \text{ 有界连续} & \text{ 当 } r=0 \text{ 时} \\ u=v=w=0 & \text{ 当 } r=1 \text{ 时} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

在流体未被扰动的层流状态下，Hagen-Poiseuille 模型的基本流场是：

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \bar{v} = 0 \\ \bar{w} &= 1 - r^2 \\ \bar{p} &= 4(P_0 - z)/R \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

设  $u', v', w'$  和  $p'$  为流体运动所受的扰动，根据稳定性理论，我们有：

$$\left. \begin{aligned} u &= u' \\ v &= v' \\ w &= \bar{w} + w' \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

将式(2.5)和(2.6)代入方程组(2.1)和(2.2)，且忽略速度分量、压力以及它们的导数的乘积项，得下面线性化方程组：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + w \frac{\partial u'}{\partial z} &= -\frac{\partial p'}{\partial r} + R^{-1} \left( \nabla^2 u' - \frac{u'}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + w \frac{\partial v'}{\partial z} &= -\frac{\partial p'}{r \partial \theta} + R^{-1} \left( \nabla^2 v' - \frac{v'}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} + u' \frac{dw}{dr} &= -\frac{\partial p'}{\partial z} + R^{-1} \nabla^2 w' \end{aligned} \right\} \quad (2.7a)$$

$$\text{和} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru') + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (2.7b)$$

为了使上面的方程可以分开量级, 设干扰波的变化是缓慢的, 我们引入下面的长时间变量和流动坐标

$$\tau = \delta^2 t, \quad \zeta = \delta(z - cRt) \quad (2.8)$$

式中  $c$  表示波的传播速度,  $\delta = a/L$  是参数, 由于管长  $L$  与半径  $a$  相比是大量级的量, 则有  $\delta \ll 1$

将式(2.8)代入方程(2.7), 可以看出  $u', v', w'$  和  $p'$  不仅是变量  $t, \tau, \theta, r$  和  $\zeta$  的函数, 而且依赖小参数  $\delta$ . 这就导致我们求下面形式的级数解.

$$\Psi = \Psi_0(t, \tau, r, \theta, \zeta) + \delta \Psi_1(t, \tau, r, \theta, \zeta) + \delta^2 \Psi_2(t, \tau, r, \theta, \zeta) + \dots \quad (2.9)$$

式中矢量函数

$$\Psi_i = [U_i, V_i, W_i, P_i]^T \quad (2.10)$$

将表示式(2.9)和(2.10)代入运动方程, 并且比较  $\delta$  的幂次, 得下述序列方程组:

$$O(1): \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial t} &= -\frac{\partial P_0}{\partial r} + R^{-1} \left( \nabla_1^2 U_0 - \frac{U_0}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_0}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial V_0}{\partial t} &= -\frac{\partial P_0}{r \partial \theta} + R^{-1} \left( \nabla_1^2 V_0 - \frac{V_0}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_0}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial W_0}{\partial t} + \frac{dW}{dr} U_0 &= R^{-1} \nabla_1^2 W_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11a)$$

$$\text{和} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU_0) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_0}{\partial \theta} = 0 \quad (2.11b)$$

$$O(\delta): \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial t} + (1-r^2-c) \frac{\partial U_0}{\partial \zeta} &= -\frac{\partial P_1}{\partial r} + R^{-1} \left( \nabla_1^2 U_1 - \frac{U_1}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial V_1}{\partial t} + (1-r^2-c) \frac{\partial V_0}{\partial \zeta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P_1}{\partial \theta} + R^{-1} \left( \nabla_1^2 V_1 - \frac{V_1}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_1}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial W_1}{\partial t} + (1-r^2-c) \frac{\partial W_0}{\partial \zeta} + \frac{dW}{dr} U_1 &= -\frac{\partial P_0}{\partial \zeta} + R^{-1} \nabla_1^2 W_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.12a)$$

$$\text{和} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU_0) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} + \frac{\partial W_0}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.12b)$$

$O(\delta^2)$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial U_0}{\partial \tau} + (1+r^2-c) \frac{\partial U_1}{\partial \xi} &= -\frac{\partial P_2}{\partial r} + R^{-1} \left( \nabla_1^2 U_2 - \frac{U_2}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_2}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi^2} \right) \\ \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\partial V_0}{\partial \tau} + (1-r^2-c) \frac{\partial V_1}{\partial \xi} &= \frac{-1}{r} \frac{\partial P_2}{\partial \theta} + R^{-1} \left( \nabla_1^2 V_2 - \frac{V_2}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi^2} \right) \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W_0}{\partial \tau} + (1-r^2-c) \frac{\partial W_1}{\partial \xi} - \frac{dW}{dr} - U_2 &= -\frac{\partial P_1}{\partial \xi} + R^{-1} \left( \nabla_1^2 W_2 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial \xi^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.13a)$$

和

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU_2) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \theta} + \frac{\partial W_1}{\partial \xi} = 0 \quad (2.13b)$$

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

下面我们将讨论上述方程的可解性，并通过它们的解函数，讨论干扰波波包的演化。

### 三、方程解的讨论

在量级  $O(1)$  中，方程(2.11)是一组关于  $U_0, V_0, W_0$  和  $P_0$  的齐次方程，它们的特征根表示干扰波的特征结构。在量级  $O(\delta)$  中，方程(2.12)的右端项的系数包含波速  $c$ ，只有当  $c$  取某一值时，该方程才能有解存在。而方程(2.13)可解的充分必要条件将要求我们所讨论的非线性干扰波的相关振幅函数满足一定的函数关系式。

#### 1. 扰动波的特征结构

对于方程组(2.11)我们求如下形式的特征根：

$$\begin{aligned} [U_0, V_0, W_0, P_0] &= S(\tau, \xi) [G_0(r), H_0(r), F_0(r), P_0(r)] \\ &\quad \cdot \exp\{-\sigma\tau + in\theta\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

式中  $S(\tau, \xi)$  是相关振幅函数， $G_0, H_0, F_0, P_0$  是振幅函数，它们仅依赖变量  $r$ ， $\sigma$  是大于零的实数， $n$  为整数。

将(3.1)式代入(2.11)，得下面对于4个关于未知量  $U_0, V_0, W_0, P_0$  的4阶常微分方程组：

$$-\sigma G_0 = -DP_0 + R^{-1} \left[ \left( D^2 + \frac{D}{r} - \frac{n^2+1}{r^2} \right) G_0 - \frac{i2n}{r^2} H_0 \right] \quad (3.2a)$$

$$-\sigma H_0 = -\frac{in}{r} P_0 + R^{-1} \left[ \left( D^2 + \frac{D}{r} - \frac{n^2+1}{r^2} \right) H_0 + \frac{i2n}{r^2} G_0 \right] \quad (3.2b)$$

$$-\sigma F_0 - 2rG_0 = R^{-1} \left( D^2 + \frac{D}{r} - \frac{n^2}{r^2} \right) F_0 \quad (3.2c)$$

$$\frac{D}{r} (rG_0) + \frac{in}{r} H_0 = 0 \quad (3.2d)$$

式中  $D = d/dr$  表示对  $r$  的导数。函数  $G_0, H_0, F_0, P_0$  以及下面的  $P_i, H_i, F_i, P_i$  是有界的，且满足边界条件：

$$\left. \begin{aligned}
 F_i(0) = P_i(0) = 0, & \quad (\text{当 } n \neq 0) \\
 F_i(0), P_i(0) \text{ 有限} & \quad (\text{当 } n = 0) \\
 G_i(0) + iH_i(0) = 0, & \quad (\text{当 } n = 1) \\
 G_i(0) = H_i(0) = 0, & \quad (\text{当 } n \neq 1) \\
 G_i(1) = H_i(1) = F_i(1) = 0, & \quad (\text{当 } \forall n)
 \end{aligned} \right\} (i=0, 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

从方程(3.2a)和(3.2b)中消去压力  $P_0$ , 我们可以求得两个关于函数  $G_0$  和  $H_0$  的方程:

$$\begin{aligned}
 -\sigma R [D(rH_0) - inG_0] = D^2 [D(rH_0) - inG_0] - \frac{D}{r} [D(rH_0) - inG_0] \\
 + \frac{1-n^2}{r^2} [D(rH_0) - inG_0] \quad (3.4a)
 \end{aligned}$$

$$H_0 = iD(rG_0)/n \quad (3.4b)$$

引入函数

$$\phi_0 = D(rH_0) - inG_0 \quad (3.5)$$

则(3.4)可以简化为一个关于  $\phi_0$  的方程:

$$\left[ D^2 - \frac{D}{r} + \frac{1-n^2}{r^2} + \sigma R \right] \phi_0 = 0 \quad (3.6a)$$

它的一般解为

$$\phi_0 = ArJ_n(\sqrt{\sigma R} r) + BrY_n(\sqrt{\sigma R} r) \quad (3.6b)$$

式中  $A, B$  是任意常数,  $J_n$  和  $Y_n$  分别表示第一类和第二类 Bessel 函数, 由于当  $r \rightarrow 0$  时,  $Y_n$  无界,  $B$  必须取值为零. 即

$$D(rH_0) - inG_0 = rJ_n(\sqrt{\sigma R} r) \quad (3.7)$$

取立方程(3.4b)和(3.7)并求解, 得满足边界条件的解:

$$G_0 = \frac{i}{2\mu_j} [J_{n+1}(\mu_j r) + J_{n-1}(\mu_j r)] - \frac{in}{\mu_j^2} r^{n-1} J_n(\mu_j r) \quad (3.8a)$$

$$H_0 = \frac{1}{2\mu_j} [J_{n+1}(\mu_j r) + J_{n-1}(\mu_j r)] - \frac{n}{\mu_j^2} r^{n-1} J_n(\mu_j r) \quad (3.8b)$$

这里  $\mu_j = \sqrt{\sigma R}$  ( $j=0, 1, 2, \dots$ ) 表示  $n+1$  阶第一类 Bessel 方程的根, 即  $J_{n+1}(\mu_j) = 0$ .

将解函数  $G_0, H_0$ , 分别代入(3.2a)和(3.2c)求解得:

$$F_0 = \frac{-i2nP}{\mu_j^3} \left[ \frac{r}{2} J_{n+1}(\mu_j r) - \frac{1}{\mu_j} r^n J_n(\mu_j r) + \frac{1}{\mu_j} r J_n(\mu_j r) \right] \quad (3.9a)$$

$$P_0 = -iR^{-1} [r^n J_n(\mu_j) - J_n(\mu_j r)] \quad (3.9b)$$

将表示式(3.8a), (3.8b), (3.9a), (3.9b)代入(3.1)得到扰动波的特征结构:

$$\left. \begin{aligned}
 U_0 &= G_0(r) S(\tau, \xi) \exp\{-\sigma t + in\theta\} \\
 V_0 &= H_0(r) S(\tau, \xi) \exp\{-\sigma t + in\theta\} \\
 W_0 &= F_0(r) S(\tau, \xi) \exp\{-\sigma t + in\theta\} + 1 - r^2 \\
 P_0 &= P_0(r) S(\tau, \xi) \exp\{-\sigma t + in\theta\} + P
 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

式中相关振幅函数我们将在下一节中讨论.

## 2. 扰动波的传播速度

在 $O(\delta)$ 量级的方程中, 它的右端项包含乘积因子 $\partial S/\partial\tau$ 为了简便, 设

$$[U_1, V_1, W_1, P_1] = \frac{\partial}{\partial\xi} S(\tau, \xi) [G_1(r), H_1(r), F_1(r), P_1(r)] \exp\{-\sigma t + in\theta\} \quad (3.11a)$$

并引入函数

$$\phi_1 = D(rH_1) - inG_1$$

则方程组(2.12)可以简化为一个关于 $\phi_1$ 的方程

$$\begin{aligned} L_1(\phi_1) &= \left[ D^2 - \frac{D}{r} + \left( \frac{1-n^2}{r^2} + \mu_j^2 \right) \right] \phi_1 \\ &= R(1-r^2-c)rJ_n(\mu_j r) \end{aligned} \quad (3.12)$$

和边界条件

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(1) &= H_1(1) - inG_1(1) + H_1'(1) = 0 \\ \phi_1(0) &= H_1(0) - inG_1(0) = 0 \end{aligned} \right\} (\forall n) \quad (3.13)$$

根据微分方程的伴随理论, 方程(3.12)对于边界条件(3.13)可解的充分必要条件是方程的右端项与该方程的伴随系统的解函数正交。即要求下述积分

$$R \int_0^1 \phi_a(1-r^2-c)rJ_n(\mu_j r) dr = 0 \quad (3.14)$$

成立, 式中 $\phi_a$ 是 Bessel 方程

$$L_a(\phi_a) = \left[ D^2 + \frac{D}{r} + \left( \mu_j^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \right] \phi_a = 0 \quad (3.15a)$$

的解函数, 即

$$\phi_a = J_n(\mu_j r) \quad (3.15b)$$

这里 $L_1$ 和 $L_a$ 是由(3.12)和(3.15)式定义的微分算子。

将 $\phi_a$ 代入积分方程求解, 我们得波的传播速度

$$c = \frac{2}{3} - \frac{2(n^2-n)}{3\mu_j^2} \quad (3.16)$$

以及方程(3.12)满足边界条件的解

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{R}{\mu_j} \left[ \left( \frac{1}{6} - \frac{n-1}{3\mu_j^2} \right) r^2 J_{n+1}(\mu_j r) + \frac{n-1}{6\mu_j} r^3 J_n(\mu_j r) \right. \\ &\quad \left. - \frac{r^4}{6} J_{n+1}(\mu_j r) - \frac{n-1}{6\mu_j} r J_n(\mu_j r) \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

### 3. 相关振幅方程

同样的处理, 在方程组(2.13)中令

$$[U_2, V_2, W_2, P_2] = S(\tau, \xi) [G_2(r), H_2(r), F_2(r), P_2(r)] \exp\{-\sigma t + in\theta\} \quad (3.18)$$

$$\Phi_2 = D(rH_2) - inG_2 \quad (3.19)$$

得下述对于 $\phi_2$ 的常微分方程:

$$L_1(\phi_2) = S(\tau, \xi)^{-1} \left\{ R \left[ \frac{\partial S}{\partial \tau} \phi_0 + (1-r^2-c) \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} \phi_1 \right] - \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} \phi_0 \right\} \quad (3.20)$$

和边界条件:

$$\left. \begin{aligned} \phi_2(1) &= 0 \\ \phi_2(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

它有解的充分必要条件是积分

$$\int_0^1 \left\{ R \frac{\partial S}{\partial \tau} r J_n^2(\mu_j r) + R^2 \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} \left( \frac{1}{3} + \frac{2n(n-1)}{3\mu_j^2} - r^2 \right) \left[ \left( \frac{1}{6} - \frac{n-1}{3\mu_j^2} \right) r^2 J_{n+1}(\mu_j r) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{n-1}{6\mu_j} r^3 J_n(\mu_j r) - \frac{r^4}{6} J_{n+1}(\mu_j r) - \frac{n-1}{6\mu_j} r J_n(\mu_j r) \right] J_n(\mu_j r) - \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} r J_n^2(\mu_j r) \right\} dr \quad (3.22)$$

的值为零。由此推出函数  $S(\tau, \xi)$  必须满足关系式

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} - K \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} = 0 \quad (3.23)$$

这是一典型扩散方程,  $K$  是它的扩散系数。对于所有的  $n$  求出  $K$  的值, 还存在技术上的困难, 但是在  $n=1$  和  $n=2$  的情况下, 我们可以解析地求得  $K$  的表示式。它们可以写成如下形式:

$$K = \frac{1}{R} - \frac{R}{45\mu_j} \quad (n=1) \quad (3.24a)$$

$$K = \frac{1}{R} - \frac{R}{9\mu_j^2} \left( \frac{1}{5} - \frac{7}{\mu_j} \right) \quad (n=2) \quad (3.24b)$$

由上式知,  $K$  是  $R$  和 Bessel 函数的根 ( $J_{n+1}(\mu_j) = 0$ ) 的函数, 对于给定的值  $\mu_j$ , 当流体的雷诺数增大时,  $K$  的值减小, 显然, 这里存在一个临界值  $R_c$ , 使得  $K$  取零值, 而且当雷诺数从小于  $R_c$  的方向跨越  $R_c$  时,  $K$  的值由正变负, 我们称这样的临界值为临界雷诺数, 用  $R_c(j)$  表示, 即,

$$\left. \begin{array}{l} K > 0, \text{ 当 } R < R_c(j) \text{ 时} \\ K < 0, \text{ 当 } R > R_c(j) \text{ 时} \end{array} \right\} \quad (3.25)$$

当  $j=1, 2, 3$  时, 无论  $R$  取任何值,  $K$  的值均大于零, 在表 1 中, 我们给出了当  $n=1$  和  $n=2$  时,  $j$  由 1 到 10 的临界雷诺数。

对于扩散系数为正值 ( $K > 0$ ) 的现象, 方程 (3.23) 是数学物理上的一般问题。当  $\tau=0$  时,  $S$  是  $\xi$  的函数, 且当  $\tau$  的值增大时,  $S$  将扩散和接受阻尼。下节我们将讨论扩散系数取负值时的问题。

#### 四、负扩散系数的现象

扩散系数取负值的现象, 正好是正扩散问题的一个逆过程。让我们考虑如下问题:

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + (-K) \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} = 0 \quad (-K > 0) \quad (4.1a)$$

$$S(\tau, \xi) = A \exp\{-\sigma^2 \xi^2\} \quad (\tau=0) \quad (4.1b)$$

$$S \rightarrow 0 \quad (|\xi| \rightarrow \infty) \quad (4.1c)$$

它的解函数是:

$$S = A (1 + 4K\tau\sigma^2)^{-1/2} \exp\{-\sigma^2 \xi^2 (1 + 4K\tau\sigma^2)^{-1}\} \quad (4.2)$$

容易看出  $S(\tau, \xi)$  具有下列性质:

(1) 当  $\tau \rightarrow (-4K\sigma^2)^{-1}$  时, 如  $\xi$  取异于零的某值, 我们有

$$\lim S(\tau, \xi) = 0 \quad (\xi \neq 0) \quad (4.3)$$

(2) 当  $\tau \rightarrow (-4K\sigma^2)^{-1}$  时, 如  $\xi^2(1+4K\tau\sigma^2)^{-1}$  取某一不为零的值, 我们又可以得到

$$\lim S(\tau, \xi) = \infty \quad (4.4)$$

也就是说解函数  $S(\tau, \xi)$  在  $\tau$  趋于  $(-4K\sigma^2)^{-1}$  时既有聚集又有发散。

现在让我们讨论当  $K < 0$  时, Hagen-Poiseuille 流的不稳定性, 为此我们考虑一般的线性干扰波:

$$\exp(Pt + in\theta + iaz) \quad (4.5)$$

式中  $P$  是复数,  $\alpha$  是波长, 依 Taylor 长波理论, (设  $\alpha \ll 1$ ), 将  $P$  展开为  $\alpha$  的级数,

$$P = P_0 + \alpha P_1 + \alpha^2 P_2 + \dots \quad (4.6)$$

比较前面的特征结构式(3.9)和(4.6), 我们可以求得

$$P_0 = -\mu_i^2/R, \quad P_1 = i\left(\frac{2}{3} - \frac{2n(n-1)}{3\mu_i^2}\right)R, \quad P_2 = -K \quad (4.7)$$

则作为一个逼近式, 干扰波可以表示为:

$$\exp[-(\mu_i^2/R + K\alpha^2)t + i\alpha(z - ct) + in\theta] \quad (4.8)$$

显然, 如果  $K$  是负值, 则它与  $K$  等于零和大于零时相比更缺少阻尼。因而负扩散系数在此起着减小阻尼的作用。

参考式(3.9)我们可以看到, 由于取负值的指数因子  $-(\mu_i^2/R + K\alpha^2)$  的作用, 该流体对小扰动干扰是阻尼的, 然而由于负扩散系数( $K < 0$ )的现象, 当它在雷诺数  $R > R_0$  的情况下发生时, 会引起在流体中运动的“湍流段”内部能量的集中和减少阻尼。也就是说负扩散现象扮演着一个抵消自然阻尼的角色。

流体运动的流函数满足方程

$$\frac{dr}{u} = \frac{rd\theta}{v} = \frac{d(z-2/3)}{w} = dt \quad (4.9)$$

将特征结构式(3.9)代入(4.9)得下面常量分方程

$$\frac{dr}{dt} = G_0^* \sin\theta \exp(-\sigma t) \quad (4.10a)$$

$$\frac{rd\theta}{dt} = H_0^* \cos\theta \exp(-\sigma t) \quad (4.10b)$$

$$\frac{dz}{dt} = 1 - r^2 + \frac{2}{3} + F_0^* \sin\theta \exp(-\sigma t) \quad (4.10c)$$

这里  $G_0^*$ ,  $H_0^*$  和  $F_0^*$  是实函数, 且

流线

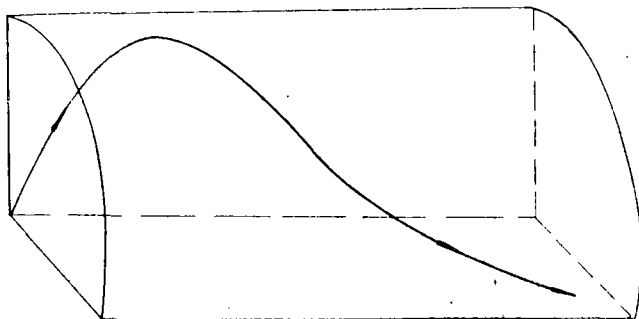


图 1



$$G_0^* = -iG_0, H_0^* = H_0, F_0^* = -iF_0$$

对于初始值

$$r=0.001, \theta=0, z=1/3, \text{当 } t=0 \text{ 时}$$

我们求解了方程(4.10), 图1给出了它们的图象。

应该指出, 在这篇文章中, 方程的非线性项被忽略了。而且所考虑的“湍流段”是缓慢变化的, 不象实验中指出的那样, 有明显的交界面。尽管如此, 我们相信这个结果对于研究湍流段的实验机理是很有用的, 文中所用的数学分析方法也是很有意思的。

表1

临界雷诺数数值表 ( $K=0$ )

n=1			n=2		
j	$\mu_j$	$R_c(j)$	j	$\mu_j$	$R_c(j)$
1	5.13562	34.5	1	6.38016	114.3
2	8.41724	56.5	2	9.76102	82.3
3	11.61984	78.0	3	13.01520	98.0
4	14.79599	99.3	4	16.22346	116.9
5	17.95982	120.5	5	19.40941	136.7
6	21.11670	141.7	6	22.58273	156.9
7	24.27011	162.8	7	25.74817	177.5
8	27.42057	183.9	8	28.90835	198.1
9	30.56920	205.1	9	32.06485	218.9
10	33.71652	226.2	10	35.21867	239.7

## 参 考 文 献

- [1] Brown, S.N. and K. Stewartson, *Geophys. A Strophys. Fluid Dyn.*, **16** (1980), 171.
- [2] Coles, D., *Mecanique à la Turbulence* (ed. A. Favre) C.N.R.S., Paris (1962), 229—250.
- [3] Davey, A. and B.P.F. Nguyen., *J. Fluid Mech.*, **45** (1971), 701—720.
- [4] Davey, A., *J. Fluid Mech.*, **86** (1978), 695—703.
- [5] Dryden, H. L., *Turbulent Flow and Heat Transfer* (ed. C. C. Lin) Princeton University Press (1959).
- [6] Garg, V.K. and W. T. Rouleau, *J. Fluid Mech.*, **36** (1972), 209.
- [7] Gill, A.E., *J. Fluid Mech.*, **6**, 1 (1973), 97.
- [8] Iton, N., *J. Fluid Mech.*, **82**, 456.
- [9] Pakera, A.T. and S.A. Orzag, *J. Fluid Mech.*, **112** (1981), 467.
- [10] Reynolds, O., *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **A174** (1883), 935.
- [11] Salwen, H. and G.E. Grosch, *J. Fluid Mech.*, **54** (1972), 93.
- [12] Sexl, T., *Ann. Phys.*, **83** (1927), 335.
- [13] Stuart, J. T., *J. Fluid Mech.*, **9** (1960), 353.
- [14] Stuart, J.T., *Laminar-Turbulent Transition* (ed. R. Eppler and H. Fasel) (1979); Springer Verlag Berlin Heidelberg Press (1960).
- [15] Smith, F.T. and R.J. Bodonyi, *Proc. Roy. Soc.*, **A384** (1982), 463; Watson, J., *Fluid Mech.*, **9** (1960) 342.
- [16] Wagnanski, I.J. and F. H., Champagne, *J. Fluid Mech.*, **59** (1971), 281.

## Instability of Hagen-Poiseuille Flow For Non-axisymmetric Mode

Wang F. M.

*(Institute of Mech. Academia Sinica, Beijing)*

J. T. Stuart (F. R. S.)

*(Imperial College, U. K.)*

### Abstract

An investigation is described for instability problem of flow through a pipe of circular cross section. As a disturbance motion, we consider a general non-axisymmetric mode. An associated amplitude or modulation equation has been derived for this disturbance motion. This equation belongs to a diffusion type. The coefficient of it can be negative while Reynolds number increases, because of the complex interaction between molecular diffusion and convection. The negative diffusivity, when it occurs, causes a concentration and focussing of energy within decaying slugs, acting as a role of reversing natural decays.