应用数学和力学，第10卷第5期（1989年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Feigenbaum方程的连续可微单峰解*

程 宝 龙

（中南工业大学，1988年5月18日收到）

摘 要

对著名的 Feigenbaum 方程，本文建立了它的单峰解的结构定理，由此，得出了寻求单峰解的又一途径．作为例证，本文循此直接去求得了非对称的连续单峰解及C^1类的解．

一、前言及单峰解的结构定理

在研究非线性系统的普适性态时，有著名的 Feigenbaum 函数方程[1]

$$g(x)=-1/\lambda g(g(-\lambda x)) \tag{F_0}$$

它深刻地揭示了浑沌理论中经常遇到的自相似性态，亦是确定倍周期分岔普适性态的重正化群方程．近年来，它在几个不同领域中受到了人们的重视，成为富有魅力的研究课题．

若给定条件为

$$g(0)=0, \qquad g'(0)=1 \tag{F_1}'$$

则(F_0)．$(F_1)'$可描绘阵发浑沌．对此种情况，已有一些准确解．若给定条件

$$g(0)=1, \qquad |g(x)|\leqslant 1 \qquad (\lambda\in(0,1),x\in[-1,1]) \tag{F_1}$$

则有一些数值结果．亦有人寻找过形如

$$g(x)=1-a|x|^{1+\varepsilon}+o(|x|^{1+\varepsilon}) \tag{1.1}$$

的解．详见文[2]，[3]所列的参考文献．

在文[4]中，杨路、张景中提出了第二类的 Feigenbaum 方程，对(F_0)，(F_1)作了研究，求得了准确解．然而，用[4]的注记1.2去改善解在$x=\alpha$处的可微性时，将遇到麻烦：在点α处光滑化的同时，将伴来点α^*处的不可微．从某种意义上讲，文[4]未给出处处可微的解．在点α及$-\alpha$两处的连续可微性态，尚有待于研究．

本文直接寻求 Feigenbaum 方程的C^1解．我们先建立单峰解的结构定理．再用构造性的手法去求得$C[-1,1]$及$C^1[-1,1]$的解．

我们研究(F_0)，(F_1)的适合下述条件的解：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{在}-1\leqslant x\leqslant 0\text{处，} & g(x)\text{严格递增，}g(-\gamma)=0\\ \text{在}0\leqslant x\leqslant 1\text{处，} & g(x)\text{严格递减，}g(\alpha)=0\end{array}\right\} \tag{1.2}$$

---

* 钱伟长推荐．国家自然科学基金项目．部份内容在MMMⅡ会议交流．

为方便，不妨认为$0<\gamma\leqslant\alpha<1$。

记

$$g_1(x)=g(x)\Big|_{0\leqslant x\leqslant 1},\qquad g_2(x)=g(x)\Big|_{-1\leqslant x\leqslant 0}.$$

我们有

定理1.1 (F_0)，(F_1)，(1.2)等价于下述的(1.3)，(1.4)，(1.2)。此处

$$g_2(x)=-1/\lambda\, g_1(g_1(-\lambda x))\qquad (x\in[-1,0]) \tag{1.3}$$

$$g_1(x)=-1/\lambda\, g_1(g_2(-\lambda x))\qquad (x\in[0,1]) \tag{1.4}$$

首先，可以断定有

$$\lambda<\gamma.$$

不然，由$\gamma/\lambda\leqslant 1$可得

$$g_1(\gamma/\lambda)=-1/\lambda\, g_1(g_2(-\lambda\cdot\gamma/\lambda))=-1/\lambda,$$

这与$g_1(x)$的定义矛盾。

随后，我们可分别在$[-1,-\gamma]$，$[-\gamma,0]$，$[0,\alpha]$，$[\alpha,1]$上去验核定理。同时还能得到如下关系：

$$g_1(\lambda\gamma)=\alpha,\ g_1(1)=-\lambda,\ g_1(\lambda)=-1/\lambda\, g_1(g_2(-\lambda^2)),$$

$$g_2(-\lambda\alpha)=\alpha,\ g_2(-1)=-1/\lambda\ g_1(g_1(\lambda)).$$

反之，若$g_1(x)$、$g_2(x)$是由(1.3)，(1.4)，(1.2)所定，则令

$$g(x)=\begin{cases} g_1(x) & (x\geqslant 0)\\ g_2(x) & (x\leqslant 0)\end{cases} \tag{1.5}$$

可以验证，$g(x)$必适合(F_0)，(F_1)，(1.2)。

这个结构定理给我们提供了寻找函数方程解的新的途径。

推论1.1 若$\varphi(x)$是(F_0)，(F_1)，(1.2)的单峰偶解，则可转而寻求第二类Feigenbaum方程

$$\varphi(x)=1/\lambda\,\varphi(\varphi(\lambda x))\qquad (x\in[0,1])$$

所相对应的单峰解。

推论1.2 对$a>0$，$\varepsilon>0$，方程(F_0)不能有下述形式的解：

$$g(x)=(1-|x|^{1+\varepsilon})^a\qquad (|x|\leqslant 1) \tag{1.6}$$

实际上，这时恒有$g(x)\geqslant 0$，按定理1.1可知，这正是(F_0)所不容许的。

将(1.6)与(1.1)相比较，就可看到，在寻找形状如(1.1)的解时，我们能走得多远。

在下述几节里，我们按结构定理，去直接构造出(F_0)的C类及C^1类解。

二、函数方程$f(\lambda x)=\lambda f^{-1}(x)$

这里寻求自映射函数方程

$$f(\lambda x)=\lambda f^{-1}(x)\qquad (\lambda\in(0,1),\ x\in[0,1]) \tag{2.1}$$

的严格递增C^1类解。使其适合

$$f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(\gamma)=\alpha \tag{2.2}$$

我们有

引理2.1 若(2.1)，(2.2)有两个严格递增连续的解$f_1(x)$，$f_2(x)$。对某个预给的自然

数$k(k\geqslant 2)$，在$\Delta_k=[\lambda^k,\lambda^{k-1}]$上有$f_1(x)=f_2(x)$，则必有

$$f_1(x)=f_2(x) \qquad (x\in[0,1])$$

证 作分解

$$[0,1]=\{0\}\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\Delta_k\right). \tag{2.3}$$

可得

$$f(\Delta_k)=\Delta_k,$$
$$f^{-1}(\Delta_k)=\Delta_k.$$

对$\forall x\in\Delta_k$，有$f_{1.k}(x)=f_{2.k}(x)$。顾及$f_1(x)$及$f_2(x)$均是(2.1)的解，就有

$$f_{1.k}(\lambda x)=f_{2.k}(\lambda x),\ f_{1.k}^{-1}(x/\lambda)=f_{2.k}^{-1}(x/\lambda).$$

这表明

$$f_{1.k}(x)=f_{2.k}(x),\ x\in\Delta_{k+1}\text{或}x\in\Delta_{k-1}.$$

另有

$$f_1(0)=f_2(0)=0.$$

引理证讫。

引理2.2 若$f_0(x)$适合(2.1)，$\tau>1$，作

$$f(x)=[f_0(x^{1/\tau})]^{\tau},$$

则$f(x)$必适合参数为λ^{τ}的方程(2.1)。

只要在

$$f_0^{-1}(\lambda x)=\lambda f_0(x)$$

中令$x=x^{1/\tau}$，即可证得本引理。

引理2.3 若在Δ_k上给定严格递增连续函数$f_k(x)\in C^1(\Delta_k)$，且有$f_k'(\lambda^k+0)\cdot f_k'(\lambda^{k-1}-0)=1$，$0<a\leqslant|f_k'(x)|\leqslant b<+\infty$。则必有$[0,1]$上唯一的严格递增连续函数$f(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1]$，它是方程(2.1)，(2.2)的解，$f(\gamma)=\alpha$，在$\Delta_k$上有$f(x)=f_k(x)$，当$x\longrightarrow 0+0$时，$f(x)=O(\lambda^{1/x})$。

证 按关系

$$f_{k+1}(x)=\lambda f_k^{-1}(x/\lambda) \qquad (x\in\Delta_{k+1}),$$

可求得Δ_{k+1}上的$f_{k+1}(x)$，若不断重复进行，就有

$$f(x)=\begin{cases} f_k(x) & (x\in\Delta_k) \\ 0 & (x=0). \end{cases}$$

此$f(x)\in C[0,1]$。

注意到

$$f_{k+m}(x_{k+m})=\lambda f_{k+m-1}^{-1}(x_{k+m}/\lambda),\ (x\in\Delta_{k+m},\ m=1,2,\cdots).$$

可得

$$f_{k+2l}(x_{k+2l})=\lambda^{2l}f_k(x_k) \qquad (x_{k+2l}\in\Delta_{k+2l}) \tag{2.4a}$$
$$f_{k+2l+1}(x_{k+2l+1})=\lambda^{2l+1}f_k^{-1}(x_k) \qquad (x_{k+2l+1}\in\Delta_{k+2l+1}) \tag{2.4b}$$

$\forall x_k\in\Delta_k$言，$f_k(x_k)$，$f_k^{-1}(x_k)$均系有界函数。若记点列

$$x_{k_l}=\{x_{k+2l}\}\cup\{x_{k+2l+1}\},$$

则由(2.4a)，(2.4b)可知，当$l\longrightarrow\infty$或$x_{k_l}\longrightarrow 0+0$时，有$f(x_{k_l})=O(\lambda^{2l})$，这意味着当$x\rightarrow$

$0+0$时，

$$f(x)=O(\lambda^{1/\varepsilon}).$$

由于

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x_{k+1}\to\lambda^k-0} f'_{k+1}(x_{k+1})&=\frac{1}{f'_k(f_k^{-1}(\lambda^{k-1}-0))}\\&=\frac{1}{f'_k(\lambda^{k-1}-0)}=f'_k(\lambda^k+0)\\ \lim_{x_{k+1}\to\lambda^{k+1}+0} f'_{k+1}(x_{k+1})&=\frac{1}{f'_{k+1}(\lambda^k-0)}\end{aligned}\right\}\tag{2.5}$$

由此出发，不断重复前述步骤，就可断定$f'(x)$在一切λ^k点上的连续性，即$f(x)\in C^1(0,1]$。

藉助于引理2.2，我们得到

定理2.1 在引理2.3的条件下，有(2.1)，(2.2)的解$f(x)\in C^1[0,1]$，在Δ_k上$f(x)=f_k(x)$。

事实上，对$\lambda_1=\lambda^{1/\tau}$，可用引理2.3去求得解$f_1(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1]$，当在$x\to 0+0$时$f(x)=O(\lambda_1^{1/\varepsilon})$。再按引理2.2，作$f(x)=[f_1(x^{1/\tau})]^\tau$，$f(x)$就是(2.1)，(2.2)的解，而在$x\longrightarrow 0+0$时$f(x)=O(\lambda^{1/\varepsilon})$，但

$$f'(x)=\tau[f_1(x^{1/\tau})]^{\tau-1}\cdot f'_1(x^{1/\tau})\cdot 1/\tau\cdot x^{(1-\tau)/\tau}\tag{2.6}$$

顾及$x\longrightarrow 0+0$时，有

$$f_1(x)=O(\lambda_1^{1/\varepsilon})=O((\lambda^{1/\tau})^{1/\varepsilon})=O(\lambda^{1/\varepsilon\tau}),$$

代入(2.6)式，即知在$x\longrightarrow 0+0$时

$$\begin{aligned}f'(x)&\sim O(\lambda^{(\tau-1)/\tau\varepsilon^{1/\tau}})\cdot x^{(1-\tau)/\tau}\cdot f'_1(x^{1/\tau})\\&\sim O\left(\frac{\lambda^{(\tau-1)/\tau\varepsilon^{1/\tau}}}{x^{(\tau-1)/\tau}}\right)\cdot f'_1(x^{1/\tau}).\end{aligned}$$

注意到引理2.3，可知

$\min(a,b,1/a,1/b)\leqslant f'_1(x)\leqslant\max(a,b,1/a,1/b)$。这就知：$x\longrightarrow 0+0$时，$f'(x)\longrightarrow 0$。按照导数的右极限与右导数的关系，就知$f'(0)=0$，这就表明$f(x)\in C^1[0,1]$。

三、函数方程$\varphi(x)=-1/\lambda\,\varphi(\varphi(f(\lambda x)))$

现在研究函数方程

$$\varphi(x)=-1/\lambda\,\varphi(\varphi(f(\lambda x)))\qquad(x\in[0,1])\tag{3.1}$$

$$\varphi(0)=1,\qquad \varphi(a)=0,\qquad |\varphi(x)|\leqslant 1\tag{3.2}$$

寻求它的严格递减C^1类解。我们有

定理3.1 对λ，γ，α ($0<\lambda<\gamma\leqslant\alpha<1$)及由定理2.1所得的$f(x)$。若在$[0,\mu]$上预给严格递减连续函数$\varphi_0(x)$，使它适合下述三条件：

i) $\varphi_0(0)=1$，$\varphi_0(\lambda)=\mu$，$\varphi_0(\mu)=(-\lambda)^2$；

ii) $\varphi'_0(x)\in C^1[0,\mu]$，$\varphi'_0(\mu-0)=-\lambda^{1/2}$，在$x\longrightarrow 0+0$时，$\forall\,\tau>1$有$\varphi'_0(x)=O(x^{(\tau-1)/\tau})$；

iii) 对$G(x)=\varphi_0(f(\lambda x))$，有

$$G'(G^k(0)+0)=-\lambda^{1+(-1/2)^k},\quad \lim_{x\to 0+0}\varphi_0'(x)/G'(x)=1/\lambda.$$

则(3,1)，(3,2)有唯一的严格递减函数$\varphi(x)\in C^1[0,1]$，且

$$\varphi'(\alpha)=-\lambda^{1/3}\neq 0 \tag{3.3}$$

证 作分解

$$[0,1]=\{\alpha\}\cup\left\{\bigcup_{i=0}^{\infty}\delta_i\right\} \tag{3.4}$$

此处δ_i为以$G^i(0)$，$G^{i+2}(0)$为端点的闭区间。按

$$-\lambda\varphi_{i-1}(G^{-1}(x))=\varphi_i(x)\qquad(x\in\delta_i) \tag{3.5a}$$

$$\varphi_{i+1}(x)=-\lambda\varphi_i(G^{-1}(x))\qquad(x\in\delta_{i+1}) \tag{3.5b}$$

就可定出$\varphi_i(x)$ $(i=0,1,\cdots)$，这时有

$$\varphi_i(G^{i+2}(0))=\varphi_{i+2}(G^{i+2}(0)) \tag{3.6}$$

令

$$\varphi(x)=\begin{cases}\varphi_i(x) & (x\in\delta_i)\\ 0 & (x=\alpha)\end{cases}$$

这是(3.1)，(3.2)的$C[0,1]$解。

再由

$$\varphi_2(G^2(x))=(-\lambda)^2\varphi_0(x),$$

可得

$$\varphi_2'(G^2(x))G'(G(x))G'(x)=(-\lambda)^2\varphi_0'(x)\qquad(x\in[0,\mu])$$

就有

$$\varphi_2'(G^2(0)+0)=-\lambda^{1/2}=\varphi_0'(G^2(0)-0).$$

同样可证：$\varphi'(x)$在$x=G^3(0)$处亦是连续。

一般地，由

$$\varphi_{2k+2}(G^{2k+2}(x))=(-\lambda)^{2k+2}\varphi_0(x)\qquad(x\in\delta_0).$$

可得

$$\varphi'_{2k+2}(G^{2k+2}(x))\cdot(G^{2k+2}(x))'=(-\lambda)^{2k+2}\varphi_0'(x),$$

令$x\longrightarrow 0+0$，有

$$\varphi'_{2k+2}(G^{2k+2}(0)+0)=-\lambda^{[1+(1/2)^{2k+1}]/3} \tag{3.7a}$$

由

$$\varphi'_{2k}(G^{2k}(x))(G^{2k}(x))'=(-\lambda)^{2k}\varphi_0'(x)\qquad(x\in\delta_0).$$

命$x\longrightarrow\mu-0$，得

$$\varphi'_{2k}(G^{2k+2}(0)-0)=-\lambda^{[1+(1/2)^{2k+1}]/3}. \tag{3.7b}$$

同理，可得

$$\varphi'_{2k+1}(G^{2k+3}(0)+0)=\varphi'_{2k+3}(G^{2k+3}(0)-0)=-\lambda^{[1-(1/2)^{2k+2}]/3} \tag{3.8}$$

上述这些表明$\varphi'(x)$在$[0,\alpha)\cup(\alpha,1]$处是连续的。

对于点α。由于$\forall x\in\delta_0$，有

$$(-\lambda)^k\varphi_0'(x)=\varphi'(G^k(x))G'(G^{k-1}(x))\cdots\cdots G'(G(x))G'(x).$$

鉴于$G^m(x)\in\delta_m$，$G^p(x)\in\delta_p$，又当$k\to\infty$时$G^k(0)\to\alpha$，故对$\eta>0$，有$n_0>0$，当$m,p>n_0$时，式

$$|\max(G^{m+2}(0),\ G^m(0),\ G^{p+2}(0),\ G^p(0))-\alpha|<\eta/2$$

成立。从而对$\forall x\in[0,1]$，估式

$$|G^m(x)-G^p(x)|<\eta \tag{3.9}$$

一致地成立。即$G^k(x)$关于$x\in[0,1]$是一致地收敛于极限函数。

由于$\varphi'(x)$在一切δ_{2k-2}上是一致连续的，即对x_1，$x_2\in[0,1]$，只要

$$|G^{2k-2}(x_1)-G^{2k-2}(x_2)|<\eta,$$

就有

$$|\varphi'(G^{2k-2}(x_1))-\varphi'(G^{2k-2}(x_2))|<\varepsilon.$$

根据柯西准则，可以断定：$\lim\limits_{k\to\infty}\varphi'(G^{2k+2}(x))$存在。

注意到在$[0,\alpha)$上对于偶点列$\{G^{2k+2}(0)\}$有

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\varphi'(G^{2k+2}(0))&=\lim_{k\to\infty}-\lambda^{[1+(1/2)^{2k+1}]/3}\\&=-\lambda^{1/3}=\varphi'(\alpha-0).\end{aligned}$$

同样，在$(\alpha,1]$上，对点列$\{G^{2k+1}(0)\}$有

$$\varphi'(\alpha+0)=-\lambda^{1/3}.$$

由是就有

$$\begin{aligned}\varphi'(\alpha)&=\varphi'(\alpha-0)=\varphi'(\alpha+0)\\&=-\lambda^{1/3}\neq 0.\end{aligned} \tag{3.10}$$

可见：$\varphi(x)\in C^1[0,1]$。

注 对已给$f(x)\in C^1[0,1]$，欲求$\varphi_0(x)\in C^1[0,\mu]$，使其适合：

i） $\varphi_0(0)=1$，$\varphi_0(\lambda)=\mu$，$\varphi_0(\mu)=(-\lambda)^2$；

ii） $\varphi'_0(\mu-0)=-\lambda^{1/2}$，$\varphi'_0(f(\lambda G^k(0+0)))=-\lambda^{(-1/2)^k}/f'(\lambda G^k(0+0))$，且在$x\to 0+0$时，$\varphi'_0(x)=O(x^{(\tau-1)}/\tau)$。

对此，可通过分段求解，就可获得欲求的解$\varphi_0(x)$，而它就是定理3.1所需。

四、Feigenbaum方程的C^1类解

我们有

定理4.1 对λ，γ，α（$0<\lambda<\gamma\leqslant\alpha<1$），$(F_0)$，$(F_1)$，(1.2)存在$C^1[-1,1]$解。

证 由定理3.1，可求得$g_1(x)\in C^1[0,1]$，使

$$g_1(x)=-1/\lambda\ g_1(g_1(f(\lambda x)))\qquad(x\in[0,1]) \tag{4.1}$$

令

$$g_2(-x)=g_1(f(x))\qquad(x\in[0,1]) \tag{4.2}$$

作

$$g(x)=\begin{cases}g_1(x) & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ g_2(x) & (-1\leqslant x\leqslant 0)\end{cases} \tag{4.3}$$

由(4.1)，(4.2)可以得到

$$g_1(x)=-1/\lambda\, g_1(g_2(-\lambda x)) \qquad (x\in[0,1]) \tag{4.4}$$

再藉助$f(x)$的性质及(4.1)式，就可导出

$$g_2(x)=-1/\lambda\, g_1(g_1(-\lambda x)) \qquad (x\in[-1,0]) \tag{4.5}$$

现在，根据结构定理1.1，我们就可断定：由(4.3)式所表述的$g(x)$就是（F_0）的单峰连续解。由于它在$x=0$的两侧有

$$g'(0-0)=g'(0+0)=0,$$

从而$g'(x)$在$x=0$处应存在且连续，从而$g(x)\in C^1[-1, 1]$。

例 取$f(x)=x$，$\gamma=\alpha$。

这时，我们按定理4.1所求得的$g(x)$，它就是文[4]所考察的第二类 Feigenbaum 方程的处处连续可微的单峰解。这是对文[4]的加强。

参 考 文 献

[1] Feigenbaum, M. J., Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, *J. Stat. Phys.*, 19 (1978), 25.

[2] 郝柏林，分岔、混沌、奇怪吸引子、湍流及其它——关于确定论系统中的内在随机性，物理学进展，3 (1983), 329.

[3] 朱照宣，非线性动力学中的浑沌，力学进展，2 (1984), 129.

[4] 杨路、张景中，第二类 Feigenbaum 函数方程，中国科学A辑，12 (1986), 1061.

The Continual Differentiable Peak-Unimodal Solutions of Feigenbaum's Functional Equations

Cheng Bao-long

(Central-South University of Technology, Changsha)

Abstract

For the famous Feigenbaum's equations, in this paper, we established its constructive theorem of the peak-unimodal, then we found out other paths to explore the peak-unimodal solutions. For example, we proceed on the direction to try the non-symmetrical continuous peak-unimodal solutions and C^1 solutions.