

无拉力 Winkler 地基上自由边矩形薄板的弯曲*

卜小明 严宗达

(天津大学, 1988年2月12日收到)

摘 要

本文应用Fourier级数加补充项的方法求解了无拉力Winkler地基上自由边矩形薄板的弯曲问题。通过适当设定满足可导条件的Fourier级数加补充项形式的挠度函数, 把给定边界条件下的微分方程化成一个无穷代数方程组。因接触区的边界预先不能定出, 故这组方程为弱非线性方程。使用迭代法获得解答。

一、前 言

在工程中常常遇到弹性地基板的计算问题。不少文献对弹性地基提出了各种不同的假设和模型, 其中基于Winkler假设所建立的弹性地基(Winkler地基)便是一种较为简单且易于工程计算的地基, 实际应用颇为广泛。然而, 它也存在一些缺陷, 而且对解决某些具体问题其缺陷显得尤为突出。例如土地基往往只能承受来自地面对它的压力, 而不能抵御外力对地基的拉力。对此, 若再按Winkler地基计算就会产生较大的误差。本文试图弥补其不足, 使用Fourier级数加补充项的方法^[2]求解无拉力Winkler地基上的四边自由矩形薄板的弯曲问题, 取得了比较满意的结果。

二、基本微分方程和边界条件

如图1, 设有弹性地基上的矩形薄板, 边长为 a 和 b , 板厚为 h , 受横向荷载 $q(x, y)$ 作用。

1. 基本微分方程

$$D\nabla^4 w(x, y) + kH(w)w(x, y) = q(x, y) \quad (2.1)$$

式中

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

* 龙驭球推荐。

$$H(w) = \begin{cases} 1 & (w > 0) \\ 0 & (w \leq 0) \end{cases} \quad (2.2)$$

$$D = \frac{Ek^3}{12(1-\mu^2)} \text{ 为抗弯刚度}$$

k 为地基系数

2. 边界条件

(1) 在 $x=0, x=a$ 边上有

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.3)$$

$$V_x = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = 0 \quad (2.4)$$

(2) 在 $y=0, y=b$ 边上有

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (2.5)$$

$$V_y = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] = 0 \quad (2.6)$$

(3) 在四个角上有

$$R = -2D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.7)$$

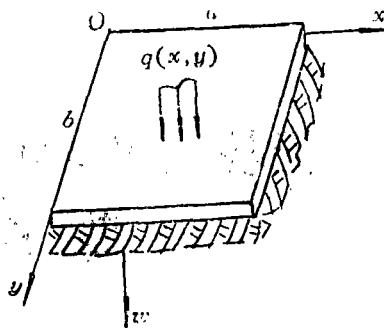


图 1

三、挠度函数 $w(x, y)$ 、阶梯函数 $H(w)$ 和 载荷 $q(x, y)$ 的级数形式

设挠度 $w(x, y)$ 的级数形式为

$$\begin{aligned} w(x, y) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left[(2-\mu) \frac{b^2}{a^2} m^2 \pi^2 \frac{4by^3 - 4b^2y^2 - y^4}{24b^4} + \frac{2by - y^2}{2b^2} \right] C_m \right. \\ & + \left. \left[(2-\mu) \frac{b^2}{a^2} m^2 \pi^2 \frac{y^4 - 2b^2y^2}{24b^4} + \frac{y^2}{2b^2} \right] D_m \right\} \cos \frac{m\pi x}{a} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[(2-\mu) \frac{a^2}{b^2} n^2 \pi^2 \frac{4ax^3 - 4a^2x^2 - x^4}{24a^4} + \frac{2ax - x^2}{2a^2} \right] G_n \right. \\ & + \left. \left[(2-\mu) \frac{a^2}{b^2} n^2 \pi^2 \frac{x^4 - 2a^2x^2}{24a^4} + \frac{x^2}{2a^2} \right] H_n \right\} \cos \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \quad (3.1)$$

这是一个双重级数加单重补充级数的形式。式中 $W_{mn}, C_m, D_m, G_n, H_n$ 均为待定系数。容易验证^[2], (3.1) 式对于四边自由矩形板具有四阶连续可导性, 且自动满足边界条件(2.4)

(2.6)(2.7).

因此内力素 M_x , M_y 可求得:

$$\begin{aligned}
M_x = & D \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \mu \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2 W_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\
& + D \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left[(2-\mu)b^2 \frac{m^4\pi^4}{a^4} \frac{4by^3-4b^2y^2-y^4}{24b^4} + \frac{m^2\pi^2}{a^2} \left(\frac{2by-y^2}{2b^2} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \mu(2-\mu) \frac{6by-2b^2-3y^2}{6b^2} \right) + \frac{\mu}{b^2} \right] C_m + \left[(2-\mu)b^2 \frac{m^4\pi^4}{a^4} \frac{y^4-2b^2y^2}{24b^4} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{m^2\pi^2}{a^2} \left(\frac{y^2}{2b^2} - \mu(2-\mu) \frac{3y^2-b^2}{6b^2} \right) - \frac{\mu}{b^2} \right] D_m \right\} \cos \frac{m\pi x}{a} \\
& + D \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\mu(2-\mu)a^2 \frac{n^4\pi^4}{b^4} \frac{4ax^3-4a^2x^2-x^4}{24a^4} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \left(\mu \frac{2ax-x^2}{2a^2} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - (2-\mu) \frac{6ax-2a^2-3x^2}{6a^2} \right) + \frac{1}{a^2} \right] G_n + \left[\mu(2-\mu)a^2 \frac{n^4\pi^4}{b^4} \frac{x^4-2a^2x^2}{24a^4} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \left(\mu \frac{x^2}{2a^2} - (2-\mu) \frac{3x^2-a^2}{6a^2} \right) - \frac{1}{a^2} \right] H_n \right\} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (3.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_y = & D \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mu \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2 W_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\
& + D \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left[\mu(2-\mu)b^2 \frac{m^4\pi^4}{a^4} \frac{4by^3-4b^2y^2-y^4}{24b^4} + \frac{m^2\pi^2}{a^2} \left(\mu \frac{2by-y^2}{2b^2} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - (2-\mu) \frac{6by-2b^2-3y^2}{6b^2} \right) + \frac{1}{b^2} \right] C_m + \left[\mu(2-\mu)b^2 \frac{m^4\pi^4}{a^4} \frac{y^4-2b^2y^2}{24b^4} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{m^2\pi^2}{a^2} \left(\mu \frac{y^2}{2b^2} - (2-\mu) \frac{3y^2-b^2}{6b^2} \right) - \frac{1}{b^2} \right] D_m \right\} \cos \frac{m\pi x}{a} \\
& + D \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[(2-\mu)a^2 \frac{n^4\pi^4}{b^4} \frac{4ax^3-4a^2x^2-x^4}{24a^4} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \left(\frac{2ax-x^2}{2a^2} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \mu(2-\mu) \frac{6ax-2a^2-3x^2}{6a^2} \right) + \frac{\mu}{a^2} \right] G_n + \left[(2-\mu)a^2 \frac{n^4\pi^4}{b^4} \frac{x^4-2a^2x^2}{24a^4} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \left(\frac{x^2}{2a^2} - \mu(2-\mu) \frac{3x^2-a^2}{6a^2} \right) - \frac{\mu}{a^2} \right] H_n \right\} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (3.3)
\end{aligned}$$

利用已知三角级数展式

$$\frac{4ax^3-4a^2x^2-x^4}{24a^4} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (3.4)$$

$$\frac{2ax-x^2}{2a^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (3.5)$$

$$\frac{x^4 - 2a^2x^2}{24a^4} = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_m \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (3.6)$$

$$\frac{x^2}{2a^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \eta_m \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (3.7)$$

式中

$$\alpha_m = \begin{cases} -1/45 & (m=0) \\ 2m^{-4}\pi^{-4} & (m \neq 0) \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\beta_m = \begin{cases} 1/3 & (m=0) \\ -2m^{-2}\pi^{-2} & (m \neq 0) \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\xi_m = \begin{cases} -7/360 & (m=0) \\ (-1)^{m+1}2m^{-4}\pi^{-4} & (m \neq 0) \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\eta_m = \begin{cases} 1/6 & (m=0) \\ (-1)^m 2m^{-2}\pi^{-2} & (m \neq 0) \end{cases} \quad (3.11)$$

则(3.1)式可写成

$$\begin{aligned} w(x, y) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ W_{mn} + \left[(2-\mu) \frac{b^2}{a^2} \alpha_n m^2 \pi^2 + \beta_n \right] C_m \right. \\ & + \left[(2-\mu) \frac{b^2}{a^2} \xi_n m^2 \pi^2 + \eta_n \right] D_m + \left[(2-\mu) \frac{a^2}{b^2} \alpha_m n^2 \pi^2 + \beta_m \right] G_n \\ & \left. + \left[(2-\mu) \frac{a^2}{b^2} \xi_m n^2 \pi^2 + \eta_m \right] H_n \right\} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (3.12) \end{aligned}$$

设全板有 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s$ 共 s 块脱离区, 即当 $(x, y) \in \sigma_i$ ($i=1, 2, \dots, s$) 时, 挠度 w 的值小于零。因此阶梯函数可写成

$$H(w) = \begin{cases} 0 & ((x, y) \in \sigma_i, i=1, 2, \dots, s) \\ 1 & ((x, y) \text{ 为其它值时}) \end{cases} \quad (3.13)$$

它的 Fourier 级数展式为

$$H(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} a_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (3.14)$$

式中

$$\lambda_{mn} = \begin{cases} 1/4 & (m=0, n=0) \\ 1/2 & (m=0, n \neq 0 \text{ 或 } m \neq 0, n=0) \\ 1 & (m \neq 0, n \neq 0) \end{cases} \quad (3.15)$$

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a H(w) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (3.16)$$

将已知荷载 $q(x, y)$ 展成双重余弦级数。若荷载为集中力或集中力偶, 则可利用广义函数, 把集中力或集中力偶视为一个广义的分布力^[2], 于是总有展式

$$q(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} q_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (3.17)$$

式中

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q(x, y) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (3.18)$$

四、在给定边界条件下求解基本微分方程

将(3.1), (3.12), (3.14), (3.17)代入(2.1), 并利用级数乘法^[1]和已知级数展式

$$\frac{6ax - 2a^2 - 3x^2}{6a^2} = \sum_{m=0}^{\infty} k_m \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (4.1)$$

$$\frac{3x^2 - a^2}{6a^2} = \sum_{m=0}^{\infty} l_m \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (4.2)$$

$$\text{式中 } k_m = \begin{cases} 0 & (m=0) \\ -2m^{-2}\pi^{-2} & (m \neq 0) \end{cases} \quad (4.3)$$

$$l_m = \begin{cases} 0 & (m=0) \\ (-1)^m 2m^{-2}\pi^{-2} & (m \neq 0) \end{cases} \quad (4.4)$$

且引进记号

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & (i=0) \\ 0 & (i=1, 2, 3, \dots) \end{cases} \quad (4.5)$$

最后通过比较系数得

$$\begin{aligned} & D \left\{ \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \pi^4 W_{mn} + \left[(2-\mu) b^2 \frac{m^6 \pi^6}{a^6} \alpha_n + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} (\beta_n - 2(2-\mu) k_n) \right. \right. \\ & \left. \left. + \mu \frac{m^2 \pi^2}{a^2 b^2} \xi_n \right] C_m + \left[(2-\mu) b^2 \frac{m^6 \pi^6}{a^6} \xi_n + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} (\eta_n - 2(2-\mu) l_n) \right. \right. \\ & \left. \left. - \mu \frac{m^2 \pi^2}{a^2 b^2} \xi_n \right] D_m + \left[(2-\mu) a^2 \frac{n^6 \pi^6}{b^6} \alpha_m + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} (\beta_m - 2(2-\mu) k_m) \right. \right. \\ & \left. \left. + \mu \frac{n^2 \pi^2}{a^2 b^2} \xi_m \right] G_n + \left[(2-\mu) a^2 \frac{n^6 \pi^6}{b^6} \xi_m + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} (\eta_m - 2(2-\mu) l_m) \right. \right. \\ & \left. \left. - \mu \frac{n^2 \pi^2}{a^2 b^2} \xi_m \right] H_n \right\} + \frac{k}{4} \lambda_{mn} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ W_{pq} + \left[(2-\mu) \frac{b^2}{a^2} \alpha_q p^2 \pi^2 + \beta_q \right] C_p \right. \\ & \left. + \left[(2-\mu) \frac{b^2}{a^2} \xi_q p^2 \pi^2 + \eta_q \right] D_p + \left[(2-\mu) \frac{a^2}{b^2} \alpha_p q^2 \pi^2 + \beta_p \right] G_q \right. \\ & \left. + \left[(2-\mu) \frac{a^2}{b^2} \xi_p q^2 \pi^2 + \eta_p \right] H_q \right\} (a_{p+m, q+n} + a_{p+m, |q-n|} \\ & + a_{|p-m|, q+n} + a_{|p-m|, |q-n|}) = \lambda_{mn} q_{mn} \quad (m=0, 1, \dots; n=0, 1, \dots) \quad (4.6) \end{aligned}$$

再考虑边界条件(2.3)和(2.5)式。在(3.2)式中分别令 $x=0$ 和 $x=a$, 在(3.3)式中分别令 $y=0$ 和 $y=b$, 并注意到(3.4)(3.5)(3.6)(3.7)(4.1)(4.2)及(4.5)式得

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \mu \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2 W_{mn} + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left[(2-\mu) b^2 \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \alpha_n + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} (\beta_n - \mu(2-\mu) k_n) \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu}{b^2} \xi_n \left] C_m + \left[(2-\mu) b^2 \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \xi_n + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} (\eta_n - \mu(2-\mu) l_n) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\mu}{b^2} \xi_n \right] D_m \right\} + \left(\frac{2-\mu}{3} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right) G_n + \left(\frac{2-\mu}{6} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) H_n \\
& = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (4.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{m^2}{a^2} + \mu \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2 W_{mn} + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ \left((2-\mu) b^2 \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \alpha_n + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} (\beta_n \right. \right. \\
& \left. \left. - \mu(2-\mu) k_n) + \frac{\mu}{b^2} \xi_n \right] C_m + \left[(2-\mu) b^2 \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \xi_n + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} (\eta_n - \mu(2-\mu) l_n) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\mu}{b^2} \xi_n \right] D_m \right\} + \left[-\frac{\mu(2-\mu)}{24} a^2 \frac{n^4 \pi^4}{b^4} + \left(\frac{2\mu}{3} - \frac{1}{3} \right) \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right] G_n \\
& + \left[-\frac{\mu(2-\mu)}{24} a^2 \frac{n^4 \pi^4}{b^4} + \left(\frac{5\mu}{6} - \frac{2}{3} \right) \frac{n^2 \pi^2}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right] H_n = 0 \\
& \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (4.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mu \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2 W_{mn} + \left(\frac{2-\mu}{3} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) C_m + \left(\frac{2-\mu}{6} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right. \\
& \left. - \frac{1}{b^2} \right) D_m + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[(2-\mu) a^2 \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \alpha_m + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} (\beta_m - \mu(2-\mu) k_m) + \frac{\mu}{a^2} \xi_m \right] G_n \right. \\
& \left. + \left[(2-\mu) a^2 \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \xi_m + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} (\eta_m - \mu(2-\mu) l_m) - \frac{\mu}{a^2} \xi_m \right] H_n \right\} \\
& = 0 \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (4.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\mu \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2 W_{mn} + \left[-\frac{\mu(2-\mu)}{24} b^2 \frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \left(\frac{2\mu}{3} - \frac{1}{3} \right) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right. \\
& \left. + \frac{1}{b^2} \right] C_m + \left[-\frac{\mu(2-\mu)}{24} b^2 \frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \left(\frac{5\mu}{6} - \frac{2}{3} \right) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right] D_m \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \left[(2-\mu) a^2 \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \alpha_m + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} (\beta_m - \mu(2-\mu) k_m) + \frac{\mu}{a^2} \xi_m \right] G_n \right. \\
& \left. + \left[(2-\mu) a^2 \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \xi_m + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} (\eta_m - \mu(2-\mu) l_m) - \frac{\mu}{a^2} \xi_m \right] H_n \right\} = 0 \\
& \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (4.10)
\end{aligned}$$

这样便得到了(4.6)(4.7)(4.8)(4.9)(4.10)五组方程组。然而它们都是含有无穷个变量的无穷方程组。为了付诸计算机计算，我们只能取有限个变量和相应的方程式。设 m 和 n 的值最大分别取到 M 和 N 。则五组联立方程共有 $(M+1)(N+1) + 2(M+1) + 2(N+1)$ 个方程和相同数目的未知量，故方程之解是确定的。但是，因为所考虑的是无拉力 Winkler 地基， $H(w)$ 尚且未知，出现在上述方程组中 $H(w)$ 的 Fourier 级数之系数 a_{mn} 亦为未知，它的值要取决于挠度 w 。因此，该问题为非线性，不能直接求解方程组。本文采用迭代法，实质即为渐近法。先假设板与地基完全接触（即 Winkler 地基），此时有 $H(w) \equiv 1$ ，计算后，得到

无拉力 Winkler 地基板挠度的第一次近似值 $w_1(x, y)$, $w_1(x, y)$ 也即是 Winkler 地基板的精确值。如果 $w_1(x, y)$ 没有出现上翘区, 即整块板上都有 $w_1(x, y) > 0$, 则 $w_1(x, y)$ 既是 Winkler 地基板的精确解, 也是无拉力 Winkler 地基板的精确解。如果 $w_1(x, y)$ 出现上翘区 (即有 $w_1(x, y) < 0$ 区), 进而可以确定上翘区, 并将其作为脱离区的第一次近似值, 于是便能求出建立在此脱离区上的函数 $H(w)$ 的 Fourier 系数 a_{mn} , 将其代入方程组, 重解上述五组联立方程后, 得到无拉力 Winkler 地基板挠度的第二次近似值 $w_2(x, y)$ 。重复上述过程, 直到相邻两次结果之差的绝对值小于一个预先给定的很小正数为止。最后一次得到的 $w(x, y)$ 即为在指定精度下无拉力 Winkler 地基板的挠曲面函数。内力素 $M_x(x, y)$ 和 $M_y(x, y)$ 可由 (3.2) (3.3) 求得。

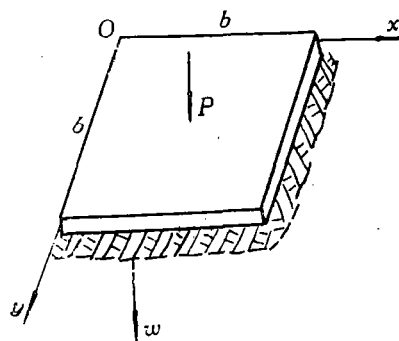


图 2

五、算 例

求解图 2 所示的放在无拉力地基上的正方形板, 边长为 b , 一集中力 P 作用于板的中心

表 1 板挠度的第一次近似 $w_1\left(\frac{Pb^2}{D} \times 10^{-4}\right)$

$y \backslash x$	0	$b/8$	$b/4$	$3b/8$	$b/2$
0	-0.166	-0.233	-0.390	-0.536	-0.595
$b/8$	-0.233	-0.214	-0.192	-0.077	0.010
$b/4$	-0.390	-0.192	0.258	1.184	1.792
$3b/8$	-0.536	-0.077	1.184	4.143	6.560
$b/2$	-0.595	0.010	1.792	6.560	12.491

点。泊松比 μ 为 0.167, 并取 $kb^4/D = 10^4$ 。

解: 运用本文方法, 所求得的 $w_1(x, y)$, 亦即 Winkler 地基板的结果如表 1。这同文献 [3] 和作者用差分法做的结果相符合。

经过五次迭代, 得到无拉力 Winkler 地基板的解, 其中心点的最大挠度值 $w_{max} = 0.001531Pb^2/D$ 。挠度函数沿截面 $y = b/2$ 上的挠曲线如图 3 所示。

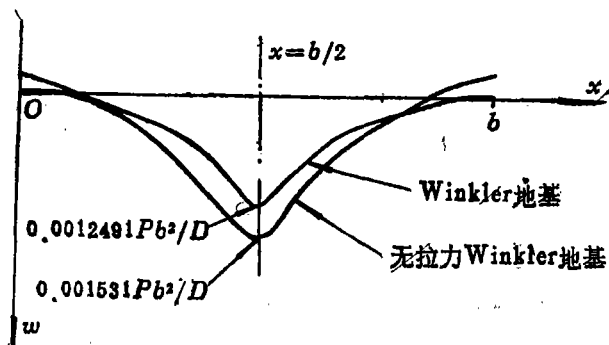


图 3

六、结 束 语

通过计算表明,用渐近法计算无拉力 Winkler 地基板的收敛速度很快,一般只需要五、六次迭代就可达到目的。此外,经过具体验证证明,用 Fourier 级数解决该类问题的收敛性也很好。这说明 Fourier 级数加补充项法对于解决矩形板在各种边界条件下的弯曲问题是一种比较有效而且普遍适用的方法。作者还将其推广到弹性地基上 Reissner 板的情形,对这一问题将另文探讨。

参 考 文 献

- [1] Г. П. 托尔斯托夫,《福里哀级数》(龙季和译),商务印书馆(1955)。
- [2] 严宗达,《结构力学中的富里叶级数解法》,天津大学出版社(待出)。
- [3] 张福范、黄晓梅,弹性地基上的自由矩形板,应用数学与力学,5, 3 (1984), 345—353。
- [4] Darevskii, V. M., Bending of a rectangular plate with free edges that lies on an elastic foundation, *Mechanics of Solid*, 12, 1 (1977), 75—85.
- [5] Selvadurai, A. P. S., *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*, Elsevier, New York (1979).
- [6] 张仕铨,用富氏级数及迭代法解无拉力温克勒尔地基上的梁,天津大学学报,3 (1982),89—99。

Bending of Rectangular Thin Plates with Free Edges Laid on Tensionless Winkler Foundation

Bu Xiao-ming Yan Zong-da

(Tianjin University, Tianjin)

Abstract

In this paper, the bending problem of rectangular thin plates with free edges laid on tensionless Winkler foundation has been solved by employing Fourier series with supplementary terms. By assuming proper form of series for deflection, the basic differential equation with given boundary condition can be transformed into a set of infinite algebraic equations. Because the boundary of contact region cannot be determined in advance, these equations are weak nonlinear ones. They can be solved by using iterative procedures.