应用数学和力学，第10卷第5期（1989年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

二阶线性守恒型常微分方程奇异摄动问题的高精度差分格式*

王 国 英

（南京大学，1988年2月8日收到）

摘　要

本文结合差分方法和有限元方法对守恒型的自伴问题建立了差分格式，它的解以$O(h^3)$阶一致收敛于原微分方程问题的解.

一、引　言

Miller[1] 对守恒形式的自伴问题用 Il'in[2] 的方法构造了指数型拟合的差分格式。并证明了它的解以$O(h)$阶关于ε一致收敛于原问题的解。本文作者对同一问题曾建立过一种二阶一致收敛的差分格式。本文结合差分方法和有限元方法的思想，利用 Liouville-Green 变换[3]对守恒形式的自伴问题建立了一种变分-差分格式，它的解以$O(h^3)$阶关于ε一致收敛于原微分方程问题的解。

二、连续问题及其近似问题

我们考虑守恒形式的微分方程边值问题

$$Lu\equiv\varepsilon(p(u)u'(x))'-q(x)u(x)=f(x)\qquad(0<x<1)\tag{2.1}$$

$$u(0)=u_0,\quad u(1)=u_1\tag{2.2}$$

其中ε是正的小参数，$p(x)$和$q(x)$是光滑函数并满足

$$p_1\geqslant p(x)\geqslant p_0>0,\ p'(x)\geqslant0,\ q(x)\geqslant q_0>0$$

引理1　设$v(x)$是满足$v(0)\geqslant0$，$v(1)\geqslant0$的光滑函数，且对一切$x\in[0,1]$有$Lv(x)\leqslant0$，则对一切$0\leqslant x\leqslant1$，有$v(x)\geqslant0$。

证明　设不然，即在区间内部的点x_0处有$v(x_0)<0$，不妨设为极小值点，则必有$v'(x_0)=0$，$v''(x_0)\geqslant0$，于是$Lv(x_0)=\varepsilon p(x_0)v''(x_0)-q(x_0)v(x_0)\geqslant0$，矛盾。

引理2　设$v(x)$是定义在$[0,1]$内的光滑函数，则

* 苏煜城推荐.

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|v(x)|\leqslant\max(|v(0)|,\ |v(1)|)+q_0^{-1}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|Lv(x)|.$$

证明 利用闸函数$B(x)=\max(|v(0)|,\ |v(1)|)+q_0^{-1}\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|Lv(x)|\pm v(x)$，容易验证 $LB(x)\leqslant 0$，$B(0)\geqslant 0$，$B(1)\geqslant 0$，故由引理1知，对一切$0\leqslant x\leqslant 1$成立$B(x)\geqslant 0$；于是

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|v(x)|\leqslant\max(|v(0)|,\ |v(1)|)+q_0^{-1}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|Lv(x)|$$

令 $u(x)=p^{-\frac{1}{2}}(x)v(x)$，则(2.1)，(2.2)可化为

$$lv\equiv\varepsilon v''+\left[\varepsilon\left(\frac{1}{4}p^{-2}p'^2-\frac{1}{2}p^{-1}p''\right)-qp^{-1}\right]v=fp^{-\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

$$v(0)=v_0,\ \ v(1)=v_1 \tag{2.4}$$

这里p，q，f都是x的函数，$v_0=p^{\frac{1}{2}}(0)u_0$，$v_1=p^{\frac{1}{2}}(1)u_1$。

引理3 设$\bar{v}(x)$是定义在[0,1]内的光滑函数，则

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|\bar{v}(x)|\leqslant\max(|\bar{v}(0)|,\ |\bar{v}(1)|)+p_1q_0^{-1}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|l\bar{v}(x)|.$$

证明 设 $v(x)=p^{-\frac{1}{2}}\bar{v}(x)$，则 $Lv(x)=p^{\frac{1}{2}}l\bar{v}(x)$。
由引理2知

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|p^{-\frac{1}{2}}\bar{v}(x)|\leqslant p_0^{-\frac{1}{2}}\max(|\bar{v}(0)|,\ |\bar{v}(1)|)+q_0^{-1}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|Lv(x)|$$

所以

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|\bar{v}(x)|\leqslant\max(|\bar{v}(0)|,\ |\bar{v}(1)|)+p_1q_0^{-1}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|l\bar{v}(x)|$$

为方便计，记(2.3)，(2.4)为

$$lv=\varepsilon v''-Q(x)v=F(x) \tag{2.5}$$

$$v(0)=v_0,\ \ v(1)=v_1 \tag{2.6}$$

其中 $Q(x)=qp^{-1}-\varepsilon\left(\frac{1}{4}p^{-2}p'^2-\frac{1}{2}p^{-1}p''\right)$，$F(x)=f(x)p^{-\frac{1}{2}}(x)$。

引入网格$0=x_0<x_1<\cdots<x_N=1$，在每个$[x_i,\ x_{i+1}]$上取充分光滑的函数$\bar{Q}_i(x)$和$\bar{F}_i(x)$满足$\bar{Q}_i(x_i)=Q(x_i)$，$\bar{F}_i(x_i)=F(x_i)$，$\bar{Q}_i(x_{i+\frac{1}{2}})=Q(x_{i+\frac{1}{2}})$，$\bar{F}_i(x_{i+\frac{1}{2}})=F(x_{i+\frac{1}{2}})$，$\bar{Q}(x_{i+1})=Q(x_{i+1})$，$\bar{F}_i(x_{i+1})=F(x_{i+1})$。记 $\bar{Q}(x)=\bar{Q}_i(x)\quad(x\in[x_i,x_{i+1}])$，$\bar{F}(x)=\bar{F}_i(x)$，$(x\in[x_i,x_{i+1}]$；$i=0,1,\cdots,N-1)$就可得到(2.5)，(2.6)的近似问题

$$\varepsilon U''-\bar{Q}(x)U=\bar{F}(x) \tag{2.7}$$

$$U(0)=v_0,\ \ U(1)=v_1 \tag{2.8}$$

为了得到$\bar{Q}(x)$和$\bar{F}(x)$的表达式，我们在$[x_i,x_{i+1}]$上应用Liouville-Green变换

$$W_i=\psi_i(x)U(x),\ \ z=\phi_i(x)$$

把方程(2.7)变为

$$\varepsilon\frac{d^2W_i}{dz^2}+\frac{\varepsilon}{(\phi_i')^2}\left(\phi_i''-2\frac{\psi_i'}{\psi_i}\phi_i'\right)\frac{dW_i}{dz}-\frac{1}{(\phi_i')^2}\left\{\bar{Q}(x)+\varepsilon\left[\left(\frac{\psi_i'}{\psi_i}\right)'-\left(\frac{\psi_i'}{\psi_i}\right)^2\right]\right\}W_i=\frac{\psi_i}{(\phi_i')^2}\bar{F}(x) \tag{2.7$'$}$$

我们要求ϕ_i和ψ_i满足

$$\phi_i''-2\psi_i'\phi_i'/\psi_i=0 \tag{2.9}$$

$$\left(\frac{\psi_i'}{\psi_i}\right)'-\left(\frac{\psi_i'}{\psi_i}\right)^2=m(\phi_i')^2 \tag{2.10}$$

其中m是常数。由(2.9)知道$\psi_i'/\psi_i=\phi_i''/2\phi_i'$，代入(2.10)（省去下标$i$）得

$$2\phi'\phi'''-3(\phi'')^2=k(\phi')^4 \tag{2.11}$$

其中$k=4m$。令$\xi=\phi'$，$\eta=\xi'/\xi^2$ (2.12)

则(2.11)变为

$$2\eta'/(k-\eta^2)=\xi \tag{2.13}$$

由(2.12)知 $\eta'=(d\eta/d\xi)\cdot\xi'=(d\eta/d\xi)\cdot\xi^2\eta$，所以(2.13)可改写为

$$\frac{2\eta d\eta}{k-\eta^2}=\frac{d\xi}{\xi},$$

两边积分得

$$\eta^2=k-c/\xi \tag{2.14}$$

其中c是非零常数。由(2.14)和(2.12)可得

$$\frac{d\xi}{\xi^{\frac{3}{2}}\sqrt{k\xi-c}}=dx$$

两边积分得

$$\frac{2\sqrt{k\xi-c}}{c\xi^{\frac{1}{2}}}=x+\bar{c}.$$

其中$\bar{c}$是常数；

由此可得

$$\xi(x)=1/[k/c-c(x+\bar{c})^2/4]$$

令 $c_1=-c/4,\quad c_2=-c\bar{c}/2,\quad c_3=k/c-c\bar{c}^2/4.$

则 $$\phi'(x)=\xi(x)=1/(c_1x^2+c_2x+c_3) \tag{2.15}$$

容易求出 $k=c_2^2-4c_1c_3$。

为了使方程(2.7)′简化，我们取$\bar{Q}(x)=(\phi_i')^2$，$\bar{F}(x)=\bar{Q}(x)^{\frac{3}{4}}[d_1\phi_i(x)^2+d_2\phi_i(x)+d_3]$。下面我们来定出常数$c_i$，$d_i(i=1,2,3)$。因为$\phi_i'(x_i)=\sqrt{\bar{Q}(x_i)}=\sqrt{Q(x_i)}$，$\phi_i'(x_{i+\frac{1}{2}})=\sqrt{\bar{Q}(x_{i+\frac{1}{2}})}=\sqrt{Q(x_{i+\frac{1}{2}})}$，$\phi_i'(x_{i+1})=\sqrt{\bar{Q}(x_{i+1})}=\sqrt{Q(x_{i+1})}$。于是由(2.15)可得

$$\left.\begin{aligned}&c_1x_i^2+c_2x_i+c_3=1/\sqrt{Q(x_i)}\\&c_1x_{i+1/2}^2+c_2x_{i+1/2}+c_3=1/\sqrt{Q(x_{i+1/2})}\\&c_1x_{i+1}^2+c_2x_{i+1}+c_3=1/\sqrt{Q(x_{i+1})}\end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

因为

$$\begin{vmatrix}x_i^2 & x_i & 1\\ x_{i+\frac{1}{2}}^2 & x_{i+1/2} & 1\\ x_{i+1}^2 & x_{i+1} & 1\end{vmatrix}\neq0.$$

所以(2.16)有唯一解c_1，c_2，c_3。

引理4 $\max\limits_{0\le x\le1}|Q(x)-\bar{Q}(x)|\le ch^3$。其中$h=\max\limits_{0\le i\le N-1}|x_{i+1}-x_i|$。

证明 实际上$1/\sqrt{\bar{Q}(x)}$是$1/\sqrt{Q(x)}$的二次代数插值，由二次代数插值的截断误差公式知道

$$\frac{1}{\sqrt{\bar{Q}(x)}}=\frac{1}{\sqrt{Q(x)}}+O(h^3).$$

因此

$$\bar{Q}(x)=Q(x)+O(h^3).$$

于是引理得证。

引理5 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|F(x)-\bar{F}(x)|\leqslant ch^3$.

此引理的证明类似于引理4的证明。下面我们来确定$\bar{F}(x)$中的常数$d_i(i=1,2,3)$。因为

$$\bar{Q}(x_j)=Q(x_j),\ \bar{F}(x_j)=F(x_j)\qquad (j=i,\ i+1/2,\ i+1),$$

$$\bar{F}(x)=\bar{Q}(x)^{\frac{3}{4}}\ [d_1\phi_i(x)^2+d_2\phi_i(x)+d_3].$$

所以

$$\left.\begin{aligned}&d_1\phi_i(x_i)^2+d_2\phi_i(x_i)+d_3=F(x_i)Q(x_i)^{-\frac{3}{4}}\\&d_1\phi_i(x_{i+1/2})^2+d_2\phi_i(x_{i+1/2})+d_3=F(x_{i+1/2})Q(x_{i+1/2})^{-\frac{3}{4}}\\&d_1\phi_i(x_{i+1})^2+d_2\phi_i(x_{i+1})+d_3=F(x_{i+1})Q(x_{i+1})^{-\frac{3}{4}}\end{aligned}\right\}\qquad(2.16)'$$

因为

$$\begin{vmatrix}\phi_i(x_i)^2 & \phi_i(x_i) & 1\\ \phi_i(x_{i+1/2})^2 & \phi_i(x_{i+1/2}) & 1\\ \phi_i(x_{i+1})^2 & \phi_i(x_{i+1}) & 1\end{vmatrix}\neq 0,$$ 所以(2.16)′也有唯一解d_1, d_2, d_3。

引理6 设$V(x)$是(2.5), (2.6)的解, $U(x)$是(2.7), (2.8)的解。则存在一个与h和ε无关的常数c, 使得

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|U(x)-V(x)|\leqslant ch^3\ (\text{其中}\ h=\max h_i,\ h_i=x_{i+1}-x_i,\ i=0,1,\cdots,N-1).$$

证明 令$r(x)=V(x)-U(x)$。则$r(x)$满足

$$\varepsilon r''-Q(x)r=[Q(x)-\bar{Q}(x)]U(x)+F(x)-\bar{F}(x)$$

$$r(0)=r(1)=0$$

于是

$$\begin{aligned}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|r(x)|&\leqslant p_1q_0^{-1}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|[Q(x)-\bar{Q}(x)]U(x)+F(x)-\bar{F}(x)|\\&\leqslant p_1q_0^{-1}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}[|Q(x)-\bar{Q}(x)||U(x)|+|F(x)-\bar{F}(x)|]\end{aligned}$$

由引理 4 和引理 5 知 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|U(x)-V(x)|=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|r(x)|\leqslant ch^3$

三、差分格式的构造

当我们取

$\bar{Q}(x)=[\phi_i'(x)]^2=1/(c_1x^2+c_2x+c_3)^2$, $\psi_i(x)=\sqrt{\phi_i'(x)}=1/\sqrt{c_1x^2+c_2x+c_3}$, $\bar{F}(x)=\bar{Q}(x)^{\frac{3}{4}}\ [d_1\phi_i(x)^2+d_2\phi_i(x)+d_3]$时, 方程(2.7)′可写为

$$\varepsilon d^2W/dx^2-(1+\varepsilon m)W=d_1z^2+d_2z+d_3\qquad(3.1)$$

$$W(\phi_0(0))=V_0\psi_0(0),\ W(\phi_{N-1}(1))=V_1\psi_{N-1}(1)\qquad(3.2)$$

我们用变分-差分方法求解 (3.1), (3.2), 记$z_i=\phi_i(x_i)$ $(i=0,1,\cdots,N-1)$, $z_N=\phi_{N-1}(x_{N})$, 则$z_0<z_1<\cdots<z_N$。

构造试验函数

$$\Lambda_i(z)\begin{cases}\lambda_i^{\mathrm{I}}(z) & (z_{i-1}\leqslant z\leqslant z_i)\\ \lambda_i^{\mathrm{I}}(z) & (z_i\leqslant z\leqslant z_{i+1})\\ 0 & (\text{其它处})\end{cases}$$

其中$\lambda_i^{\mathrm{I}}(z)$和$\lambda_i^{\mathrm{I}}(z)$分别满足齐次方程问题

$$\varepsilon\lambda''-(1+\varepsilon m)\lambda=0,\quad \lambda(z_i)=1,\quad \lambda(z_{i+1})=0$$

和

$$\varepsilon\lambda''-(1+\varepsilon m)\lambda=0,\quad \lambda(z_i)=0,\quad \lambda(z_{i+1})=1$$

易知

$$\lambda_i^{\mathrm{I}}(z)=\frac{1}{\exp\left[\frac{1+\varepsilon m}{\varepsilon}z_i\right]-\exp\left[\frac{1+\varepsilon m}{\varepsilon}z_{i+1}\right]}\exp\left[\frac{1+\varepsilon m}{\varepsilon}z\right]$$

$$-\frac{1}{\exp\left[\frac{1+\varepsilon m}{\varepsilon}z_i\right]-\exp\left[\frac{1+\varepsilon m}{\varepsilon}z_{i+1}\right]}\exp\left[\frac{1+\varepsilon m}{\varepsilon}z_{i+1}\right]$$

$$\lambda_i^{\mathrm{I}}(z)=\frac{1}{\exp\left[\frac{1+\varepsilon m}{\varepsilon}z_{i+1}\right]-\exp\left[\frac{1+\varepsilon m}{\varepsilon}z_i\right]}\exp\left[\frac{1+\varepsilon m}{\varepsilon}z\right]$$

$$-\frac{1}{\exp\left[\frac{1+\varepsilon m}{\varepsilon}z_{i+1}\right]-\exp\left[\frac{1+\varepsilon m}{\varepsilon}z_i\right]}\exp\left[\frac{1+\varepsilon m}{\varepsilon}z_i\right]$$

取问题(3.1)，(3.2)的有限元近似解为

$$W^h(z)=\sum_{i=1}^{N-1}W_i^h\Lambda_i(z)\tag{3.3}$$

其中W_i^h满足

$$\begin{cases}W_{i-1}^h a(\Lambda_{i-1},\ \Lambda_i)+W_i^h a(\Lambda_i,\ \Lambda_i)+W_{i+1}^h a(\Lambda_{i+1},\ \Lambda_i)=-(F,\ \Lambda_i) & (3.4)\\ W_0^h=V_0\psi_0(0),\qquad W_N^h=V_1\psi_{N-1}(1)\qquad (i=1,2,\cdots,N-1) & (3.5)\end{cases}$$

其中 $a(\Lambda_l,\Lambda_i)=\int_{\phi_0(0)}^{\phi_{N-1}(1)}[\varepsilon\Lambda_l'\Lambda_i'+(1+\varepsilon m)\Lambda_l\Lambda_i]dz\qquad (l=i-1,\ i,\ i+1)$

容易算得$a(\Lambda_{i-1},\Lambda_i)=\int_{z_{i-1}}^{z_i}[\varepsilon\Lambda_{i-1}'\Lambda_i'+(1+\varepsilon m)\Lambda_{i-1}\Lambda_i]dz$

$$=\varepsilon\Lambda_{i-1}\Lambda_i'\Big|_{z_{i-1}}^{z_i}+\int_{z_{i-1}}^{z_i}[-\varepsilon\Lambda_{i-1}\Lambda_i''+(1+\varepsilon m)\Lambda_{i-1}\Lambda_i]dz$$

$$=\varepsilon\Lambda_{i-1}\Lambda_i'\Big|_{z_{i-1}}^{z_i}+\int_{z_{i-1}}^{z_i}[-\varepsilon\Lambda_{i-1}\Lambda_i''+(1+\varepsilon m)\Lambda_i]\Lambda_{i-1}dz=\varepsilon\Lambda_{i-1}\Lambda_i'\Big|_{z_{i-1}}^{z_i}$$

同样地

$$a(\Lambda_i,\Lambda_i)=\varepsilon\Lambda_i\Lambda_i'\Big|_{z_{i-1}}^{z_i}+\varepsilon\Lambda_i\Lambda_i'\Big|_{z_i}^{z_{i+1}},\quad a(\Lambda_{i+1},\Lambda_i)=\varepsilon\Lambda_{i+1}\Lambda_i'\Big|_{z_i}^{z_{i+1}}$$

而$F(z)$是z的二次多项式，所以(F,Λ_i)也很容易算得。

引理7 差分方程(3.4)，(3.5)的解(3.3)与问题(3.1)，(3.2)的解在网格点上的值相等，即$W(z_i)=W^h(z_i)$。

证明 方程组(3.4)的系数矩阵$M=(a(\Lambda_l,\Lambda_i))$是对称正定矩阵，实际上，对任一

$$W^h(z)=\sum_{i=1}^{N-1}W_i^h A_i(z)\neq 0,$$

$$(MW^h,\ W^h)=a(W^h,\ W^h)\geqslant\int_{\phi_1(0)}^{\phi_{N-1}(1)}(1+\varepsilon m)(W^h)^2dz>0.$$

所以M正定。因此（3.4），(3.5)有唯一解。通过分部积分可证$W(z_i)(i=1,2,\cdots,N-1.)$满足方程组(3.4)，(3.5)，所以$W(z_i)=W^h(z_i)$。

综上所述可得本文的主要结论。

定理 设$u(x)$是问题(2.1)，(2.2)的解，$W^h(z)$是(3.4)，(3.5)的解。

$$U^h(x)=p(x)^{-\frac{1}{2}}\frac{W^h(\phi_i(x))}{\psi_i(x)},$$

则

$$\max_{0\leqslant i\leqslant N}|u(x_i)-U^h(x_i)|\leqslant ch^3.$$

其中$h=\max h_i$，$h_i=x_{i+1}-x_i$ $(i=0,1,\cdots N-1)$，c是与ε和h无关的常数。

参 考 文 献

[1] Il'in, A. M., Differencing scheme for a differential equation with a small parameter affecting the highest derivative, *Math. Notes Acad. Sci.*, USSR, 6 (1969).

[2] Miller, J. J. H., On the convergence, uniformly in ε, of difference scheme for a two-point boundary singular perturbation problem, *Proc. of Conf. on "The Numerical Analysis of Singular Perturbation Problem"*, Academic Press (1979), 467—474.

[3] Niijima, K., On a three-point difference scheme for a singular perturbation problem without a first derivative term, *I. Memoirs Numer. Math.*, 7 (1980), 1—10.

A High Accuracy Difference Scheme for the Sinuglar Perturbation Problem of the Second-Order Linear Ordinary Differential Equation in Conservation Form

Wang Guo-ying

(*Nanjing University, Nanjing*)

Abstract

In this paper, combining the idea of difference method and finite element method, we construct a difference scheme for a self-adjoint problem in conservation form. Its solution uniformly converges to that of the original differential equation problem with order h^3.