应用数学和力学,第 25 卷 第 7 期(2004 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 07_0729_06

平面边界前 Stokes 流动基本的奇异性

N. 阿克塔[1], F. 冉赫曼[2], S. K. 森[3]

(1. 沙赫加拉尔理工大学 数学系, 色尔赫特, 孟加拉;
2. 孟加拉工学院 数学系, 古尔那, 孟加拉;
3. 吉达港大学 数学系, 吉达港_4331, 孟加拉)

(周哲玮推荐)

摘要: 利用双调和函数 A 和调和函数 B, 给出了三维 Stokes 流动速度场和压力场的描述 由此建立了计算区域边界为固定无滑移平面边界 Stokes 流动基本奇异性的一般定理 刚性平面前轴对称 Stokes 流动的 Collins 定理成为本文定理的特例 给出的几个例证说明了方法的有效性

关 键 词: Stokes 流动; Stokeslet; 傅里叶变换; 调和函数; 双调和函数
中图分类号: 文献标识码: A

引 言

Stokes_子、旋转子、应力子、源_偶极子等等在 Stokes 绕流流体力学问题求解起着重要作用, 这一点已为 Chwang 和 Wu[1] 所证实 注意到, 当粘性流有平面边界的时候, 所研究的 Stokes 流动产生基本奇异性 Collins[2, 3] 利用 Stokes 流函数研究平面边界轴对称 Stokes 流动 Blake[4]、Blake 和 Chwang[5] 分析数例无滑移平面边界附近引起基本奇异 Stokes 流动的速度场和压力场

此后, Planiappan、Nigam、Amaranath、Usha[6]给出了 Stokes 流动的速度场和压力场的陈述, 得到刚性球内或球外的非轴对称 Stokes 流动的球定理公式表达 本文给出了上述方法的推广, 并在第 2 节中建立了固定平面边界前三维 Stokes 流动的一个定理 该定理提供了一个新的一般方法, 从而可以对应得到非滑移平面边界基本奇异性 在[4, 5] 中, 是利用傅里叶变换得到的 最近, Chowdhury 和 Sen[7]根据复变理论, 确定了平面边界前 Stokes 流动的上述定理的二维模拟 此外, 本文第 1 节表明, Happle 和 Brenner[8] 在柱坐标系中得到的 Stokes 方程的解, 可由本文 Stokes 流动的压力场和速度场的描述中重新得到

1 基 本 方 程

不可压缩粘性流体低速稳定运动的 Stokes 方程为

$$ {}^2\boldsymbol{q} = \mathrm{grad}\,p, \tag{1}$$

$$ \mathrm{div}\,\boldsymbol{q} = 0, \tag{2}$$

收稿日期: 2002_10_18
作者简介: Dr. S. K. Shen (Corresponding author. Department of Mathematics, University of Chittagong, Chittagong_4331, Bangladesh; E_mail: sujit42@ yahoo. com; sujit@ ctgu. edu).
本文原文为英文, 由吴承平 译, 张禄坤 校.

其中 $\boldsymbol{q}$ 为流速, p 为流体压力, 　为常粘性系数, 　^{2} 为拉普斯算子

求式(1)的散度, 并利用方程(2)得到压力的拉普拉斯方程

$$ {}^2 p = 0 \tag{3}$$

类似于Palaniappan等在[6]中提出的方法, 我们设该Stokes方程有解

$$\boldsymbol{q} = \mathrm{curl}\ \mathrm{curl}(\boldsymbol{e}_z A) + \mathrm{curl}(\boldsymbol{e}_z B), \tag{4}$$

其中 A 和 B 为柱坐标系(, , z) 的两个纯量函数, $\boldsymbol{e}_z$ 为 z 轴正向的单位向量(curl( ) = rot( ) 编者注)

通过计算显见, 式(4)同样满足方程(2); (4)式还可改写为

$$\boldsymbol{q} = \mathrm{grad}\ \mathrm{div}(\boldsymbol{e}_z A) - {}^2(\boldsymbol{e}_z A) + \mathrm{curl}(\boldsymbol{e}_z B), \tag{5}$$

$$\boldsymbol{q} = \frac{}{z}(A) - \boldsymbol{e}_z({}^2 A) + \boldsymbol{e} \frac{1}{} \frac{B}{} - \boldsymbol{e} \frac{B}{}, \tag{6}$$

这里, $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{e}$ 分别为沿径向和周向的单位向量

将(6)代入(1)式经过稍微冗长的代数运算可导得如下数学上有重要意义的表达式:

$$\mathrm{grad}\left(p - \frac{}{z}({}^2 A)\right) + \left[\boldsymbol{e}_z({}^4 A) - \boldsymbol{e} \frac{1}{} \frac{}{}({}^2 B) + \boldsymbol{e} \frac{}{}({}^2 B)\right] = 0, \tag{7}$$

显然只要

$${}^4 A = 0, \tag{8}$$

$${}^2 B = 0, \tag{9}$$

及

$$p = p_0 + \frac{}{z}({}^2 A), \tag{10}$$

方程(1)和(2)成立, 这里, p_0 为常数　同时, 借助于双调和方程(8), 流体压力方程(10)满足拉普拉斯方程(3)

为简化分析, 我们采用流体速度(5)的分量形式, 即

$$q = \frac{{}^2 A}{z} + \frac{1}{} \frac{B}{}, \tag{11}$$

$$q = \frac{1}{} \frac{{}^2 A}{z} - \frac{B}{}, \tag{12}$$

$$q_z = -\frac{1}{} \frac{}{}\left(\frac{A}{}\right) - \frac{1}{{}^2} \frac{{}^2 A}{{}^2} \tag{13}$$

这样通过双调和函数 A(, , z) 和调和函数 B(, , z), (8)~(13)式就构成了Stokes方程的解

使我们感兴趣的是, 由我们的解(6)和(10)可重新得到Happel和Brenner在[8]中给出的Stokes流的速度场和压力场　他们是在柱坐标系(, , z) 中解Stokes方程(1)和(2), 得到的速度 $\boldsymbol{q}$ 和压力 p 分别为

$$\boldsymbol{q} = \quad + \quad (\boldsymbol{e}_z \quad) + \frac{}{}(\quad) + \boldsymbol{e}_z \frac{}{z}, \tag{14}$$

$$p = -2 \frac{{}^2}{z^2}, \tag{15}$$

其中, 　, 　和　为调和函数

首先, 将方程(6)改写为

$$\boldsymbol{q} = \left(\frac{A}{z}\right) - \boldsymbol{e}_z({}^2 A) + \quad (\boldsymbol{e}_z B), \tag{16}$$

令

$$\frac{A}{z} = \frac{}{} - \quad + \quad , \qquad B = \tag{17}$$

利用式(17)的第一式,注意到 和 为调和函数,得到

$$\frac{}{z}\left(\ {}^{2}A\right)=-\ 2\frac{{}^{2}}{z^{2}},\tag{18}$$

上式显然满足 ^{2}A 的表达式

$$^{2}A=-\ 2\frac{}{z}\tag{19}$$

将关系式(17)和(19)代入方程(16),关系式(18)代入(10)去掉常数 p_0, 我们就得到 Happel 和 Brenner 的解(14)和(15) 由方程(19)和式(17)的第二式可看出, A 是双调和函数, B 是调和函数

2 平面边界前的 Stokes 流

本节我们提出并证明固定平面边界非轴对称 Stokes 流的一个定理

定理 设具有非刚性边界不可压缩粘性流动可以由双调和函数 $A_0(\ ,\ ,z)$ 和调和函数 $B_0(\ ,\ ,z)$ 表征,并且 A_0、B_0 在 z 0 时有奇异性 若取平面 $z=0$ 为刚性边界,则在相同区域里新的流动由下式表达

$$A(\ ,\ ,z)=A_0(\ ,\ ,z)+A_0^*(\ ,\ ,z),\tag{20}$$

$$B(\ ,\ ,z)=B_0(\ ,\ ,z)-B_0(\ ,\ ,-z),\tag{21}$$

其中

$$A_0^*(\ ,\ ,z)=-A_0(\ ,\ ,-z)+2z\frac{}{z}A_0(\ ,\ ,-z)-z^2\ {}^{2}A_0(\ ,\ ,-z)\tag{22}$$

证明 因为 $A_0(\ ,\ ,z)$ 和 $B_0(\ ,\ ,z)$ 分别为双调和方程(8)和方程(9)的解,可以直接证明 $A_0^*(\ ,\ ,z)$ 和 $B_0(\ ,\ ,-z)$ 也分别是方程(8)和(9)的解

将函数(20)和(21)代入公式(11)到(13),若

$$A=\ A/\ z=0,\quad B=0\qquad \text{在 } z=0 \text{ 平面上},\tag{23}$$

则在边界 $z=0$ 处流体速度成为零

显然,注意到在(20)式中使用了(22)式,在 $z=0$ 平面上(20)和(21)式分别给出 $A=0$ 及 $B=0$ 经过简单的代数运算

$$\frac{A}{z}=0,\qquad z=0\tag{24}$$

同时,根据假设 $A_0(\ ,\ ,z)$ 和 $B_0(\ ,\ ,z)$ 在域 z 0 是奇异的,则 $A_0(\ ,\ ,-z)$ 和 $B_0(\ ,\ ,-z)$ 在域 z 0 是奇异的,因而 $A_0^*(\ ,\ ,z)$ 在域 z 0 是奇异的,所以说 A 和 B 在域 z 0 分别与 A_0 和 B_0 有相同的奇异性 定理证毕

推论 对轴对称流有 $A(\ ,\ ,z)\quad A(\ ,z)$, $B(\ ,\ ,z)=0$ 和 $=\ A/\ $, 其中 $=\ (\ ,z)$ 是 Stokes 流函数 则可得出

$$^{2}\ =\ \frac{}{}\left(\ {}^{2}A\right),$$

其中

$$^{2}\quad \frac{{}^{2}}{}-\frac{1}{}\frac{}{}+\frac{{}^{2}}{z^{2}}$$

这样,由(20)式的结果我们又得到了平面边界上轴对称的 Stokes 流函数的 Collins 定理[3.p121]

3 平面上阻力和阻力矩

作用在平面 $z=0$ 上的流体的阻力 $\boldsymbol{F}$ 和阻力矩 $\boldsymbol{T}$ 由下式给出

$$\boldsymbol{F} = \int_{=0}^{2}\int_{=0} [\ \ _z\ \boldsymbol{e} + \ \ _z\ \boldsymbol{e} + \ \ _{zz}\ \boldsymbol{e}_z]_{z=0}\ \mathrm{d}\ \mathrm{d}\ , \tag{25}$$

和

$$\boldsymbol{T} = \int_{=0}^{2}\int_{=0} [\ \ _z\ \boldsymbol{e}_z - \ \ _{zz}\ \boldsymbol{e}\ ]_{z=0}\ ^2\mathrm{d}\ \mathrm{d}\ , \tag{26}$$

其中

$$_z = \left(\frac{q_z}{} + \frac{q}{z}\right),\quad _z = \left(\frac{1}{}\frac{q_z}{} + \frac{q}{z}\right),\quad _{zz} = -p + 2\ \frac{q_z}{z} \tag{27}$$

在平面 $z = 0$ 上通过直接计算可得

$$\frac{q_z}{} = \frac{q_z}{} = \frac{q_z}{z} = 0,\ p = \frac{^3A}{z^3},$$

从而得到上述阻力和阻力矩的典型公式:

$$\boldsymbol{F} = \int_{=0}^{2}\int_{=0}\left[(\boldsymbol{i}\cos\ + \boldsymbol{j}\sin\ )\left(\frac{q}{z}\right)_{z=0} + (-\ \boldsymbol{i}\sin\ + \boldsymbol{j}\cos\ )\left(\frac{q}{z}\right)_{z=0} - \boldsymbol{k}\left(\frac{^3A}{z^3}\right)_{z=0}\right]\ \mathrm{d}\ \mathrm{d}\ , \tag{28}$$

$$\boldsymbol{T} = \int_{=0}^{2}\int_{=0}\left[(-\ \boldsymbol{i}\sin\ + \boldsymbol{j}\cos\ )\left(\frac{^3A}{z^3}\right)_{z=0} + \boldsymbol{k}\left(\frac{q}{z}\right)_{z=0}\right]\ ^2\mathrm{d}\ \mathrm{d}\ , \tag{29}$$

4 实验例证

( ) 在平面边界面前的 Stokes 子

考虑无界不可压缩粘性流体在笛卡儿坐标 $(0, 0, c)$ 上强度为 $= (\ _1\boldsymbol{i} + \ _2\boldsymbol{j} + \ _3\boldsymbol{k})/(8\ \ )$ 的 Stokes 子 该 Stokes 子在柱坐标$(\ ,\ , z)$ 中的基底流速分量为

$$q_0 = \frac{1}{8}\left[\frac{_1\cos\ + \ _2\sin\ }{R_1} + \frac{_1\ ^2\cos\ + \ _2\ ^2\sin\ + \ _3\ (z - c)}{R_1^3}\right], \tag{30}$$

$$q_0 = \frac{1}{8}\frac{(-\ _1\sin\ + \ _2\cos\ )}{R_1}, \tag{31}$$

$$q_{0z} = \frac{1}{8}\left[\frac{_3}{R_1} + \frac{(\ _1 Q\cos < + A_2 Q\sin < + A_3(z - c))(z - c)}{R_1^3}\right], \tag{32}$$

其中 $R_1 = \sqrt{Q^2 + (z - c)^2}$#

对应的双调和函数 A_0 和调和函数 B_0 由微分方程组的积分得出,通过将速度分量(30)~(32)分别代入式(11)~(13)的左边得到# 这样

$$A_0 = \frac{1}{8PL}\left[\frac{1}{Q}R_1(z - c)A_1\cos < + A_2\sin <) - A_3 R_1\right], \tag{33}$$

$$B_0 = \frac{1}{4PL}\frac{1}{Q}R_1(A_1\sin < - A_2\cos <)\# \tag{34}$$

应用该定理,我们可以得到在域 $z \setminus 0$ 中表征粘性流体运动的 $A(Q, <, z)$ 和 $B(Q, <, z)$:

$$A(Q, <, z) = \frac{1}{8PL}\left[\frac{1}{Q}R_1(z - c)(A_1\cos < + A_2\sin <) - A_3 R_1 - \frac{1}{Q}R_2(z + c)(A_1\cos < + A_2\sin <) + A_3 R_2 + 2c\frac{1}{Q}\left(R_2 - \frac{z(z + c)}{R_2}\right)(A_1\cos < + A_2\sin <) - 2cA_3\frac{z}{R_2}\right], \tag{35}$$

$$B(Q, <, z) = \frac{1}{4PL}\frac{1}{Q}(R_1 - R_2)(A_1\sin< - A_2\cos<), \tag{36}$$

其中, $R_2 = \sqrt{Q^2 + (z + c)^2}$, 并且包含 R_2 的项与域 z [0 中 A_0 和 B_0 的无滑移部分相对应#

因此, 由式(28)和(29), 即得到了平面边界 $z = 0$ 上的阻力 $\boldsymbol{F}$ 和阻力矩 $\boldsymbol{T}$,

$$\boldsymbol{F} = A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{T} = c(-A_2\boldsymbol{i} + A_1\boldsymbol{j})\# \tag{37}$$

( ) 在平面边界面前的旋转子

考虑非刚性边界不可压缩粘性流体, 在笛卡儿坐标 $(0, 0, c)$ 上某强度为

$$A = (A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k})/(8PL)$$

的旋转子# 柱坐标 $(Q, <, z)$ 中的主速度分量为

$$q_{0Q} = \frac{1}{8PL}\left[\frac{(-A_1\sin< + A_2\cos<)(z - c)}{R_1^3}\right], \tag{38}$$

$$q_{0<} = \frac{1}{8PL}\left[\frac{(-A_1\cos< + A_2\sin<)(z - c) + A_3Q}{R_1^3}\right], \tag{39}$$

$$q_{0z} = \frac{1}{8PL}\left[\frac{(A_1\sin< - A_2\cos<)Q}{R_1^3}\right], \tag{40}$$

其中 $\quad R_1 = \sqrt{Q^2 + (z - c)^2}\#$

对应的 A_0 和 B_0 为

$$A_0 = \frac{1}{8PL}\frac{1}{Q}R_1(A_1\sin< - A_2\cos<), \tag{41}$$

$$B_0 = \frac{1}{8PL}\left[-\frac{(z - c)(A_1\cos< + A_2\sin<)}{QR_1} + \frac{A_3}{R_1}\right]\# \tag{42}$$

应用该定理, 我们可以得到由 A 和 B 表征的域 z \ 0 中的流场,

$$A(Q, <, z) = \frac{1}{8PL}\frac{1}{Q}\left(R_1 - R_2 + \frac{2z(z + c)}{R_2}\right)(A_1\sin< - A_2\cos<), \tag{43}$$

和

$$B(Q, <, z) = \frac{1}{8PL}\left(-\frac{1}{Q}\frac{(z - c)}{R_1} + \frac{1}{Q}\frac{(z + c)}{R_2}\right) @ \\ (A_1\cos< + A_2\sin<) + A_3\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), \tag{44}$$

这里, 包含 R_2 的项与域 z [0 中 A_0 和 B_0 的无滑移部分相对应为

平面上的阻力 $\boldsymbol{F}$ 和阻力矩 $\boldsymbol{T}$ 为

$$\boldsymbol{F} = 0, \quad \boldsymbol{T} = A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_1\boldsymbol{k}\# \tag{45}$$

5 结 论

本文给出了平面边界有界区域内非轴对称 Stokes 流的速度场和压力场的表示法# Happel 和 Brenner[8] 提出的 Stokes 方程解是本文方程的特例# 平面边界前轴对称流动关于 Stokes 流函数的 Collins 定理[3] 可由本文第 2 节定理得到# 同时, 本文定理还给出了一个新方法, 利用该方法可以得出非滑移平面边界上基本奇异性的对应部分# 第 4 节的例证说明了本文方法的有效性#

[参 考 文 献]

[1] Chwang A T, Wu T Y. Hydromechanics of low_Reynolds numer flow, Part 2: Singularity method for

J Fluid Mech, 1975, 67: 787) 815.

[2] Collins W D. A note on Stokes. s stream function for the slow steady motion of viscous fluid before plane and spherical boundaries[J]. Mathematika, 1954, 1: 125) 130.

[3] Collins W D. Note on a sphere theorem for the axisymmetric Stokes flow of a viscous fluid[J]. Mathematika, 1958, 5: 118) 121.

[4] Blake J R. A note on the image system for a Stokeslet in a no_slip boundary[J]. Proc Camb Phil Soc, 1971, 70: 303) 310.

[5] Blake J R, Chwang A T. Fundamental singularities of viscous flow, Part 1: The image systems in the vicinity of a stationary no_slip boundary[J]. J Eng Math, 1974, 8: 23) 29.

[6] Palaniappan D, Nigam S D, Amaranath T, et al. Lamb. s solution of Stokes. s equations: A sphere theorem[J]. Q JL Mech Appl Math, 1992, 45(1): 47) 56.

[7] Chowdhury G A H, Sen S K. Stokes flow before a plane boundary[J]. Indian J Pure Appl Math (to be published)

[8] Happel J, Brenner H. Low Reynolds Number Hydrodynamics[M]. 4th print. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1986.

Stokes Flow Due to Fundamental Singularities Before a Plane Boundary

N. Aktar[1], F. Rahman[2], S. K. Sen[3]

(1. Department of Mathematics, Shahjalal University of Science and Technology, Sylhet Bangladesh;
2. Department of Mathematics, Bangladesh Institute of Technology, Khulna, Bangladesh;
3. Department of Mathematics, University of Chittagong, Chittagon_4331, Bangladesh)

Abstract: A representation for the velocity and pressure fields in three dimensional Stokes flow was presented in terms of a biharmonic function A and a harmonic function B. This representation was used to establish a general theorem for the calculation of Stokes flow due to fundamental singularities in a region bounded by a stationary no_slip plane boundary. Collins. s theorem for axisymmetric Stokes flow before a rigid plane follows as a special case of the theorem. A few illustrative examples are given to show its usefulness.

Key words: Stokes flow; Stokeslet; Fouries transform; harmonic function; biharmonic function