应用数学和力学，第10卷第4期(1989年4月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于常微分方程转点问题共振的必要条件*

江 福 汝

(上海市应用数学和力学研究所，1988年1月16日收到)

摘 要

本文首先修正带有转点的常微分方程共振必要条件中的一些误解，然后给出推导共振必要条件序列的递推过程。

一、引 言

自1970年以来，继 Ackerberg 和 O'Malley[1]的工作之后，已发表了很多关于下面形式的转点问题的论文，

$$\varepsilon y''+f(x,\varepsilon)y'+g(x,\varepsilon)y=0 \qquad (-a\leqslant x\leqslant b,\ 0<\varepsilon\ll 1) \tag{1.1}$$

$$y(-a)=\alpha,\ y(b)=\beta \tag{1.2}$$

其中 a，b 为正的常数，$f(0,0)=0$，$f_x(0,0)<0$。称边值问题(1.1)～(1.2)是共振的，若其解当 $\varepsilon\to 0$ 时，不以零为极限；否则称边值问题为非共振的。Ackerberg 和 O'Malley 给出的共振条件是

$$-\frac{g(0,0)}{f_x(0,0)}=N \qquad (N\text{：非负整数}) \tag{1.3}$$

1971年，Watt[2]举例说明条件（1.3）是不充分的。1973年，Cook 和 Eckhaus[3]又给出修正的共振条件：

$$-\frac{g(0,\varepsilon)}{f_x(0,\varepsilon)}=N+\mu_1\varepsilon \qquad (N\text{：非负整数}) \tag{1.4}$$

其中 $\mu_1=-[g_x^2+(N+1/2)g_{xx}]$。1975～1976年，Matkowsky[4]又考察了许多例子，提出依据相关特征值问题来判别共振的方法，并指出：若方程（1.1）的外部解 $Y_\varepsilon(x)$ 可以表示成

$$Y_\varepsilon(x)=\sum_{i=0}^{\infty}A_i(x)\varepsilon^i$$

* 中国科学院科学基金资助的课题。

其中系数$A_i(x)$ $(i=0,1,2,\cdots)$在区间$[-a,b]$上是有界，和至少有一系数不为零，则边值问题出现共振。不过我们仍需要能由方程的系数表示出的判别法。1978年，Olver[5]曾对一类特殊的微分方程，给出共振的充分条件。

本文，首先修正在共振必要条件中所存在的一些误解，包括Matkowsky在文[4]中依据相关特征值问题，所考察例子中的错误结果。然后给出推导共振必要条件序列的递推过程。并指出：如果$g(x,\varepsilon)\equiv 0$；或$f(x,\varepsilon)\equiv -xA$，$g(x,\varepsilon)\equiv B$，其中$A$，$B$是常数和满足条件$A/B=N$，$N$是非负整数，则边值问题出现共振。

二、例

考察以$x=0$为转点的边值问题：

$$\varepsilon y''-x(1+4\varepsilon)y'+(1+2x)y=0 \qquad (0<\varepsilon\ll 1,\ -a\leqslant x\leqslant b) \tag{2.1}$$

$$y(-a)=\alpha, \qquad y(b)=\beta \tag{2.2}$$

其中a，b为正的常数。假设其外部解具有展开式

$$Y_\varepsilon(x)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\cdots \tag{2.3}$$

将之代入方程（2.1），合并同类项和令ε的各次幂的系数为零，可以确定出

$$y_0(x)=C_0xe^{2x} \tag{2.4}$$

$$y_1(x)=C_1xe^{2x}+C_0xe^{2x}\left(\frac{-4}{x}-8x\right) \tag{2.5}$$

$$y_2(x)=C_2xe^{2x}+C_1xe^{2x}\left(\frac{-4}{x}-8x\right)$$

$$+C_0xe^{2x}\left(\frac{64}{3}x^3+16x^2-32x-24\ln|x|\right) \tag{2.6}$$

等等。因$y_2(x)$在$x=0$应是解析的，所以待定常数C_0应为零，即$y_0(x)$为零，边值问题是非共振的。但此时满足修正的共振条件（1.4），所以条件（1.4）是不充分的。

此外，再考察Matkowsky在文[4]中所考察的例子

$$\varepsilon y''-x(1+x^2)y'+(2+p_1\varepsilon+p_2\varepsilon^2+\cdots)y=0 \tag{2.7}$$

$$y(-a)=\alpha,\ y(b)=\beta \tag{2.8}$$

假设其外部解具有展开式

$$Y_\varepsilon(x)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\cdots \tag{2.9}$$

将（2.9）式代入方程（2.7），比较ε的同次幂的项，得到关于y_n $(n=0,1,2,\cdots)$的递推微分方程组：

$$-x(1+x^2)y_n'+2y_n=-y''_{n-1}-\sum_{i=1}^{n}p_iy_{n-i} \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{2.10}$$

视$y_{-1}(x)\equiv 0$。

在（2.10）式中取$n=0$，得到关于$y_0(x)$的微分方程：

$$-x(1+x^2)y_0'+2y_0=0 \tag{2.11}$$

具有解

$$y_0(x)=C_0\frac{x^2}{1+x^2} \tag{2.12}$$

其中 C_0 是待定常数。

在（2.10）式中取 $n=1$，考虑到（2.12）式得

$$-x(1+x^2)y_1'+2y_1=-y_0''-p_1y_0\equiv G_1(x) \tag{2.13}$$

其中

$$G_1(x)=\left[\frac{-2+6x^2}{x^2(1+x^2)^2}-p_1\right]C_0I_0(x)$$

符号 $I_0(x)\equiv x^2/(1+x^2)$。解此方程得

$$y_1(x)=C_1I_0(x)+\left[\frac{-1-9x^2-6x^4}{x^2(1+x^2)^2}-\left(6-\frac{1}{2}p_1\right)\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right]C_0I_0(x) \tag{2.14}$$

因 $y_1(x)$ 在 $x=0$ 应是解析的，所以必须

$$p_1=12 \tag{2.15}$$

（2.14）式化为

$$y_1(x)=\frac{-1-9x^2-6x^4}{x^2(1+x^2)^2}C_0I_0(x) \tag{2.16}$$

鉴于只需要确定 C_0 是否为零，为简单起见，今后只考察含 C_0 的项。

在（2.10）式中取 $n=2$ 得

$$-x(1+x)y_2'+2y_2=-y_1''-p_1y_1-p_2y_0\equiv G_2(x) \tag{2.17}$$

其中

$$G_2(x)=12\left[\frac{2+x^2+25x^4+24x^6+6x^8}{x^2(1+x^2)^4}-p_2\right]C_0I_0(x)$$

求解方程（2.17），得

$$\begin{aligned}y_2(x)&=I_0(x)\int^x\frac{G_2(s)}{-s(1+s^2)I_0(s)}ds\\&=12\left[\frac{1}{x^2(1+x^2)^4}+\frac{44}{8}\frac{1}{(1+x^2)^4}+\frac{3}{2}\frac{1}{(1+x^2)^3}+\frac{9}{4}\frac{1}{1+x^2}\right.\\&\left.+5\frac{x^2}{(1+x^2)^4}+\frac{3}{2}\frac{x^4}{(1+x^2)^4}+\frac{9}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{p_2}{24}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right]C_0I_0(x)\end{aligned} \tag{2.18}$$

所以必须也成立

$$p_2=-108$$

因此[4]中，依据相关特征值问题所考察例子得到的结论是错误的。

三、共振的必要条件序列

考察下面的边值问题：

$$\varepsilon y''-xA(x,\varepsilon)y'+B(x,\varepsilon)y=0 \qquad (0<\varepsilon\ll1,\ -a\leqslant x\leqslant b) \tag{3.1}$$

$$y(-a)=\alpha,\ \ y(b)=\beta \tag{3.2}$$

其中

$$A(x,\varepsilon)\sim A_0(x)+\varepsilon A_1(x)+\varepsilon^2 A_2(x)+\cdots$$
$$B(x,\varepsilon)\sim B_0(x)+\varepsilon B_1(x)+\varepsilon^2 B_2(x)+\cdots$$

和 $A_0(0)>0$。假设 $A_i(x)$，$B_i(x)$ （$i=0,1,2,\cdots$）在$[-a,b]$是解析的。

设边值问题的外部解具有展开式

$$Y_{e}(x)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\cdots \tag{3.3}$$

将（3.3）式代入方程（3.1），再比较 ε 的同次幂项，得到关于 $y_n(x)$ （$n=0,1,2,\cdots$）的递推方程：

$$-xA_0(x)y_n'+B_0(x)y_n=-y_{n-1}''+x\sum_{i=1}^{n}A_i y_{n-i}'-\sum_{i=1}^{n}B_i y_{n-i} \tag{3.4}$$

$$(n=0,1,2,\cdots)$$

视 $y_{-1}(x)\equiv 0$。

在（3.4）式中取 $n=0$，得到关于 $y_0(x)$的微分方程

$$-xA_0(x)y_0'+B_0(x)y_0=0 \tag{3.5}$$

其解为

$$y_0(x)=C_0\exp\left(\int^x\frac{B_0(s)}{sA_0(s)}ds\right)\equiv C_0 I_0(x) \tag{3.6}$$

在 $x=0$ 的邻域展开 $A_i(x)$，$B_i(x)$ （$i=0,1,2,\cdots$）为 x 的幂级数

$$A_i(x)=A_{i,0}+A_{i,1}x+A_{i,2}x^2+\cdots,\qquad B_i(x)=B_{i,0}+B_{i,1}x+B_{i,2}x^2+\cdots$$

和将 $A_i^{-1}(x)$，$A_i^{-3}(x)$表示成

$$A_i^{-1}(x)=\tilde{A}_{i,0}+\tilde{A}_{i,1}x+\tilde{A}_{i,2}x^2+\cdots,\qquad A_i^{-3}(x)=\hat{A}_{i,0}+\hat{A}_{i,1}x+\hat{A}_{i,2}x^2+\cdots$$

知 $I_0(x)$具有展开式

$$I_0(x)=x^{B_{0,0}\tilde{A}_{0,0}}\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}B_{0,i}\tilde{A}_{0,n-i}x^n\right) \tag{3.7}$$

由于 $y_0(x)$ 在 $x=0$ 应是解析的，所以必须

$$B_{0,0}\tilde{A}_{0,0}=N \qquad (N\text{：非负整数}) \tag{3.8}$$

或

$$\frac{B(0,0)}{A(0,0)}=N \tag{3.9}$$

此就是 Ackerberg 和 O'Malley[1]给出的条件。

在（3.4）式中取 $n=1$，得到关于 $y_1(x)$的微分方程：

$$-xA_0(x)y_1'+B_0(x)y_1=-y_0''+xA_1y_0'-B_1y_0\equiv L_0[y_0] \tag{3.10}$$

其中 L_0 是微分算子

$$L_0\equiv-\frac{d^2}{dx^2}+xA_1(x)\frac{d}{dx}-B_1 \tag{3.11}$$

求解方程（3.10），得

$$y_1(x)=I_0(x)\int^x\frac{L_0[y_0(s)]}{-sA_0(s)I_0(s)}ds \tag{3.12}$$

因

$$L_0[y_0(x)]=\left(\frac{-xA_0B_0'+xA_0'B_0+A_0B_0-B_0^2+x^2A_0B_0A_1}{x^2A_0^2}-B_1\right)$$

在（3.12）式中经积分得

$$\begin{aligned}y_1(x)=C_0I_0(x)\Big[&\frac{a_{0,-2}}{x^2}+\frac{a_{0,-1}}{x}+a_{0,0}\ln|x|+a_{0,1}x+a_{0,2}x^2+\cdots\\&+B_{1,0}\tilde{A}_{0,0}\ln|x|+(B_{1,0}\tilde{A}_{0,1}+B_{1,1}\tilde{A}_{0,0})x\\&+\frac{x^2}{2}\sum_{i=0}^{2}B_{1,i}\tilde{A}_{0,2-i}+\cdots\Big]\end{aligned}\tag{3.13}$$

其中

$$a_{0,-2}=-\frac{1}{2}(-A_{0,0}B_{0,0}+B_{0,0}^2)\hat{A}_{0,0}$$

$$a_{0,-1}=-(-A_{0,0}B_{0,0}+B_{0,0}^2)\hat{A}_{0,1}-(-2A_{0,1}B_{0,0}+2B_{0,0}B_{0,1})\hat{A}_{0,0}$$

$$\begin{aligned}a_{0,0}=&(-A_{0,0}B_{0,0}+B_{0,0}^2)\hat{A}_{0,2}+(-2A_{0,1}B_{0,0}+2B_{0,0}B_{0,1})\hat{A}_{0,1}\\&+\Big(-\sum_{i=0}^{2}A_{0,i}B_{0,2-i}+\sum_{i=0}^{2}B_{0,i}B_{0,2-i}+\sum_{i=1}^{2}iB_{0,i}A_{0,2-i}\\&-\sum_{i=1}^{2}iA_{0,i}B_{0,2-i}-A_{0,0}B_{0,0}A_{1,0}\Big)\hat{A}_{0,0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{0,n}=\frac{1}{n}\Big\{&(-A_{0,0}B_{0,0}+B_{0,0}^2)\hat{A}_{0,n+2}+(-2A_{0,1}B_{0,0}+2B_{0,0}B_{0,1})\hat{A}_{0,n+1}\\&+\sum_{p=2}^{n+2}\Big[-\sum_{i=0}^{p}A_{0,i}B_{0,p-i}+\sum_{i=0}^{p}B_{0,i}B_{0,p-i}+\sum_{i=1}^{p}iB_{0,i}A_{0,p-i}\\&-\sum_{i=1}^{p}iA_{0,i}B_{0,p-i}-\sum_{j=0}^{p-2}\Big(\sum_{i=0}^{j}A_{0,i}B_{0,j-i}\Big)A_{1,p-2-j}\Big]\hat{A}_{0,n+2-p}\Big\}\end{aligned}$$

$$(n=1,2,3,\cdots)$$

由于 $y_1(x)$ 在 $x=0$ 应是解析的，所以必须

$$\bar{a}_{0,0}\equiv a_{0,0}+B_{1,0}\tilde{A}_{0,0}=0\tag{3.14}$$

此是共振的第二必要条件。若 $A(x,\varepsilon)\equiv1$，$B(x,\varepsilon)\equiv g(x,\varepsilon)$，则条件（3.14）化为

$$g_\varepsilon(0,0)=-[g_x^2(0,0)+(N+1/2)g_{xx}(0,0)]\tag{3.15}$$

其中 N 是由第一必要条件定义的非负整数。对于 $g_\varepsilon(0,\varepsilon)\equiv0$ 的特殊情形，上式与修正的共振条件（1.4）给出的结果是一致的。对于方程[3]

$$\varepsilon y''-x(\alpha+\bar{\alpha}\varepsilon)y'+(\rho+\bar{\rho}\varepsilon+\gamma x+\delta x^2)y=0$$

第二共振条件取形式

$$\alpha\delta+2\rho\delta+\gamma^2-\rho\alpha\bar{\alpha}+\bar{\rho}\alpha^2=0\tag{3.16}$$

此即文[3]中给出的共振条件。

在（3.4）式中取 $n=2$，得到关于 $y_2(x)$ 的微分方程

$$-xA_0(x)y_2'+B_0(x)y_2=L_0[y_1]+L_1[y_0]\tag{3.17}$$

其中 L_0 是由（3.11）式定义的微分算子，和

$$L_1 \equiv xA_2\frac{d}{dx}-B_2 \tag{3.18}$$

方程（3.17）只含待定常数 C_0 的解为

$$y_2(x)=I_0(x)\int^x \frac{L_0[y_1(s)]+L_1[y_0(s)]}{-sA_0(s)I_0(s)}ds$$

$$=C_0I_0(x)\Big[\frac{a_{1,-4}}{x^4}+\frac{a_{1,-3}}{x^3}+\frac{a_{1,-2}}{x^2}+\frac{a_{1,-1}}{x}+a_{1,0}\ln|x|+\cdots+a_{1,n}x^n$$

$$+\cdots+(-A_{0,0}B_{0,0}A_{2,0}\hat{A}_{0,0}+B_{2,0}\tilde{A}_{0,0})\ln|x|$$

$$+b_{1,1}x+\cdots+b_{1,n}x^n+\cdots\Big] \tag{3.19}$$

其中

$$a_{1,-4}=\frac{-1}{4}[(-5A_{0,0}B_{0,0}+B^2_{0,0})\hat{A}_{0,0}+6\tilde{A}_{0,0}]\bar{a}_{0,-2}$$

$$a_{1,-3}=\frac{-1}{3}\{[(-6A_{0,1}B_{0,0}-4A_{0,0}B_{0,1}+2B_{0,0}B_{0,1})\hat{A}_{0,0}+(-5A_{0,0}B_{0,0}$$

$$+B^2_{0,0})\hat{A}_{0,1}+6\tilde{A}_{0,1}]\bar{a}_{0,-2}+[(-3A_{0,0}B_{0,0}+B^2_{0,0})\hat{A}_{0,0}+2\tilde{A}_{0,0}]\bar{a}_{0,-1}\}$$

$$a_{1,-4+n}=\frac{1}{n-4}\Big\{\Big\{\sum_{j=0}^{n}\bar{a}_{0,n-2-j}\Big\{\sum_{i=0}^{j}\sum_{p=0}^{j-i}[(2n-2p-j-i-5)A_{0,p}B_{0,j-i-p}$$

$$+B_{0,p}B_{0,j-i-p}]\hat{A}_{0,i}+(n-2-j)(n-2-j-1)\tilde{A}_{0,j}\Big\}$$

$$-\sum_{j=0}^{n-2}\bar{a}_{0,n-4-j}\Big\{\sum_{i=0}^{j}\Big[\sum_{p=0}^{j-i}\Big(\sum_{q=0}^{p}A_{0,q}B_{0,p-q}\Big)A_{1,j-i-p}\Big]\tilde{A}_{0,i}\Big\}$$

$$-\sum_{j=0}^{n-2}\Big[\sum_{p=0}^{n-2-j}(n-4-j-p)\bar{a}_{0,n-4-j-p}A_{1,p}\Big]\tilde{A}_{0,j}$$

$$+\sum_{j=0}^{n-2}\Big(\sum_{p=0}^{n-2-j}\bar{a}_{0,n-4-j-p}B_{1,p}\Big)\tilde{A}_{0,j}\Big\}\Big\}$$

$$(n=2,3,\cdots;\ n\neq 4)$$

$$a_{1,0}=\sum_{j=0}^{4}\bar{a}_{0,2-j}\Big\{\sum_{i=0}^{j}\sum_{p=0}^{j-i}\Big[(3-2p-j-i)A_{0,p}B_{0,j-i-p}+B_{0,p}B_{0,j-i-p}\Big]\hat{A}_{0,i}$$

$$+(2-j)(1-j)\tilde{A}_{0,j}\Big\}$$

$$-\sum_{j=0}^{2}\bar{a}_{0,-j}\Big\{\sum_{i=0}^{j}\Big[\sum_{p=0}^{j-i}\sum_{q=0}^{p}A_{0,q}B_{0,p-q}A_{1,j-i-p}\Big]\tilde{A}_{0,i}\Big\}$$

$$-\sum_{j=0}^{2}\sum_{p=0}^{2-j}(-j-p)\bar{a}_{0,-j-p}A_{1,p}\tilde{A}_{0,j}+\sum_{j=0}^{2}\sum_{p=0}^{2-j}\bar{a}_{0,-j-p}B_{1,p}\tilde{A}_{0,j}$$

和

$$b_{1,n}=\frac{1}{n}\Big[-\sum_{j=0}^{n}\Big(\sum_{i=0}^{n-j}\sum_{p=0}^{i}A_{0,p}B_{0,i-p}A_{2,n-j-i}\Big)+\sum_{p=0}^{n}\tilde{A}_{0,p}B_{2,n-p}\Big]$$

$$(n=1,2,3,\cdots)$$

其中

$$\bar{a}_{0,n}=\begin{cases}a_{0,n}, & \text{当 } n<0\\ a_{0,n}+\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n}B_{1,i}\tilde{A}_{0,n-i}, & \text{当 } n\geqslant 1\end{cases}$$

由于 $y_2(x)$ 在 $x=0$ 是解析的，所以必须

$$\bar{a}_{1,0}\equiv a_{1,0}-A_{0,0}B_{0,0}A_{2,0}\hat{A}_{0,0}+B_{2,0}\tilde{A}_{0,0}=0 \tag{3.20}$$

此是共振的第三必要条件。对于方程（2.7）是

$$p_2=-108$$

如此继续下去，假设已求得

$$y_k(x)=C_0I_0(x)\sum_{i=-r}^{\infty}\bar{a}_{k-1,i}x^i \tag{3.21}$$

其中 r 是不大于非负整数 $N=B(0,0)/A(0,0)$ 的非负整数，和第 $k+1$ 个共振的必要条件

$$\bar{a}_{k-1,0}=0 \tag{3.22}$$

再在（3.4）式中取 $n=k+1$，则得到关于 $y_{k+1}(x)$ 的微分方程

$$-xA_0(x)y'_{k+1}+B_0(x)y_{k+1}=\sum_{i=0}^{k}L_i[y_{k-i}]\equiv I_0(x)F_k(x) \tag{3.23}$$

其中 L_0,L_1 是由(3.11)，(3.18)式定义的微分算子，和

$$L_i\equiv xA_{i+1}\frac{d}{dx}-B_{i+1}\qquad (i=1,2,\cdots,k) \tag{3.24}$$

求解方程（3.23）得

$$y_{k+1}(x)=C_0I_0(x)\int^x\frac{F_k(s)}{-sA_0(s)}ds \tag{2.25}$$

令上面被积函数展开式中的 s^{-1} 项的系数为零，则得到第 $k+2$ 个共振的必要条件。

如果 $A(x,\varepsilon)\equiv A$, $B(x,\varepsilon)\equiv B$, 其中 A, B 是满足 Ackerberg-O'Malley 条件 $B/A=N$（N: 非负整数）的常数；或是 $B(x,\varepsilon)\equiv 0$，则可由数学归纳法证知 $\bar{a}_{n,0}=0$ $(n=0,1,2,\cdots)$，这时将出现共振。

参 考 文 献

[1] Ackerberg, R. C. and R. E. O'Malley, Jr., Boundary layer problem exhibiting resonance, *Studies Appl. Math.*, **49**, 3 (1970), 277—295.

[2] Watt, A.M., A singular perturbation problem with a turning point, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **5** (1971), 61—73.

[3] Cook, L. P. and W. Eckhaus, Resonance in a boundary value problem of singular

perturbation type, *Studies in Appl. Math.*, 7, 2 (1973), 129—139.

[4] Matkowsky, B. J., On boundary layer problems exhibiting resonance, *SIAM Rev.*, **17** (1975), 82—100; Errata, Ibid., **18** (1976), 112.

[5] Olver, F. W. J., Sufficient conditions for Ackerberg-O'Malley resonance, *SIAM J. Math. Anal.*, **9** (1978), 328—355.

On Necessary Conditions for Resonance in Turning Point Problems for Ordinary Differential Equations

Jiang Fu-ru

(*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai*)

Abstract

In this paper, some misunderstandings concerning the necessary conditions for resonance for ordinary differential equations with turning point have been corrected, and a recursive process for finding the sequence of necessary conditions for resonance has been offered.