应用数学和力学，第 10 卷第 4 期(1989年 4 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

应用功的互等定理法求立方体的位移解*

付 宝 连

（燕山大学，1986年 6 月 8 日收到）

摘　　要

本文推广功的互等定理法于求解弹性力学空间问题。

首先，我们给出作为基本系统的六面固定的立方体的基本解，然后在受单位集中载荷作用的基本系统与已知表面位移的实际系统之间应用功的互等定理，从而求得实际系统的位移解。

一、引　　言

在文章［1］～［4］中，我们提出了求解矩形弹性薄板弯曲与振动问题的功的互等定理法。在文章［5］中我们推广功的互等定理法于求解弹性力学平面问题。在本文中，我们将进一步推广此法于求解弹性力学空间问题。

我们定义六面固定的立方体为基本系统。三个单位集中载荷分别沿 x，y 和 z 三个方向作用于该基本系统域内的流动坐标点（ξ，η，ζ）处。受此三个单位集中载荷作用的基本系统的解称为基本解。在受此三个单位集中载荷作用的基本系统与具有已知表面位移的实际系统之间应用功的互等定理，我们将求得实际系统的位移解。

立方体的解析位移解可能是前所未有的。

本文再一次表明，功的互等定理法对于解决弹性力学某些问题是富有成效的。

二、基　本　解

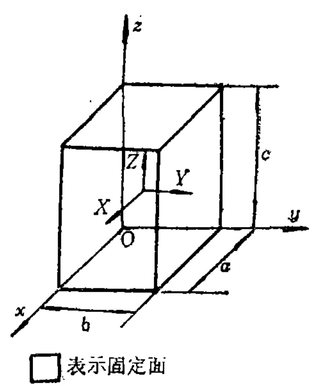


图　1

我们取图 1 所示六面固定的一立方体为基本系统。X，Y 和 Z 表示分别沿 x，y 和 z 方向的体力分量。

让我们应用最小势能原理解此问题。假设容许位移分量是

* 钱伟长推荐。

$$\left.\begin{aligned}U(x,y,z)&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}A_{ijk}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{k\pi z}{c}\\V(x,y,z)&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}B_{ijk}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{k\pi z}{c}\\W(x,y,z)&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}C_{ijk}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{k\pi z}{c}\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

在体力作用下，此立方体的总势能是

$$\begin{aligned}\Pi_P=&\int_0^a\int_0^b\int_0^c\Big\{\frac{E}{2(1+\nu)}\Big[\frac{\nu}{1-2\nu}\Big(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\Big)^2+\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial V}{\partial y}\Big)^2\\&+\Big(\frac{\partial W}{\partial z}\Big)^2+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\Big)^2+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}\Big)^2+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial W}{\partial x}\\&+\frac{\partial U}{\partial z}\Big)^2\Big]-XU-YV-ZW\Big\}dx\,dy\,dz\end{aligned}\tag{2.2}$$

应用最小势能原理和变分法预备定理，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_0^a\int_0^b\int_0^c\Big\{\frac{E}{2(1+\nu)}\Big[\frac{2\nu}{1-2\nu}\Big(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\Big)\frac{\partial}{\partial A_{ijk}}\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)+2\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial}{\partial A_{ijk}}\\&\cdot\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)+\Big(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\Big)\frac{\partial}{\partial A_{ijk}}\Big(\frac{\partial U}{\partial y}\Big)+\Big(\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z}\Big)\frac{\partial}{\partial A_{ijk}}\\&\cdot\Big(\frac{\partial U}{\partial z}\Big)\Big]-X\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{k\pi z}{c}\Big\}dx\,dy\,dz=0\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^a\int_0^b\int_0^c\Big\{\frac{E}{2(1+\nu)}\Big[\frac{2\nu}{1-2\nu}\Big(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\Big)\frac{\partial}{\partial B_{ijk}}\Big(\frac{\partial V}{\partial y}\Big)+2\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial}{\partial B_{ijk}}\\&\cdot\Big(\frac{\partial V}{\partial y}\Big)+\Big(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\Big)\frac{\partial}{\partial B_{ijk}}\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\Big)+\Big(\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}\Big)\frac{\partial}{\partial B_{ijk}}\\&\cdot\Big(\frac{\partial V}{\partial z}\Big)\Big]-Y\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{k\pi z}{c}\Big\}dx\,dy\,dz=0\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^a\int_0^b\int_0^c\Big\{\frac{E}{2(1+\nu)}\Big[\frac{2\nu}{1-2\nu}\Big(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\Big)\frac{\partial}{\partial C_{ijk}}\Big(\frac{\partial W}{\partial z}\Big)+2\Big(\frac{\partial W}{\partial z}\Big)\frac{\partial}{\partial C_{ijk}}\\&\cdot\Big(\frac{\partial W}{\partial z}\Big)+\Big(\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}\Big)\frac{\partial}{\partial C_{ijk}}\Big(\frac{\partial W}{\partial y}\Big)+\Big(\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z}\Big)\frac{\partial}{\partial C_{ijk}}\\&\cdot\Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)\Big]-Z\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{k\pi z}{c}\Big\}dx\,dy\,dz=0\end{aligned}\tag{2.5}$$

将(2.1)代入(2.3)～(2.5)且注意到

$$\left.\begin{aligned} X&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}x_{ijk}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{k\pi z}{c} \\ Y&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}y_{ijk}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{k\pi z}{c} \\ Z&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}z_{ijk}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{k\pi z}{c} \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

我们得到

$$A_{ijk}=\frac{x_{ijk}}{\pi^2E\left\{\frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left(\frac{i}{a}\right)^2+\frac{1}{2(1+\nu)}\left[\left(\frac{j}{b}\right)^2+\left(\frac{k}{c}\right)^2\right]\right\}} \tag{2.7}$$

$$B_{ijk}=\frac{y_{ijk}}{\pi^2E\left\{\frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left(\frac{j}{b}\right)^2+\frac{1}{2(1+\nu)}\left[\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{k}{c}\right)^2\right]\right\}} \tag{2.8}$$

$$C_{ijk}=\frac{z_{ijk}}{\pi^2E\left\{\frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left(\frac{k}{c}\right)^2+\frac{1}{2(1+\nu)}\left[\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{j}{b}\right)^2\right]\right\}} \tag{2.9}$$

将(2.7)～(2.9)代入(2.1)中，我们求得

$$U(x,y,z)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_{ijk}}{\pi^2E\left\{\frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left(\frac{i}{a}\right)^2+\frac{1}{2(1+\nu)}\left[\left(\frac{j}{b}\right)^2+\left(\frac{k}{c}\right)^2\right]\right\}}\cdot\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{k\pi z}{c} \tag{2.10}$$

$$V(x,y,z)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_{ijk}}{\pi^2E\left\{\frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left(\frac{j}{b}\right)^2+\frac{1}{2(1+\nu)}\left[\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{k}{c}\right)^2\right]\right\}}\cdot\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{k\pi z}{c} \tag{2.11}$$

$$W(x,y,z)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z_{ijk}}{\pi^2E\left\{\frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left(\frac{k}{c}\right)^2+\frac{1}{2(1+\nu)}\left[\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{j}{b}\right)^2\right]\right\}}\cdot\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{k\pi z}{c} \tag{2.12}$$

这些就是受分布体力作用六面固定立方体的位移解。

如图 2 所示，当沿 x 方向有一单位集中载荷作用在流动坐标点 (ξ,η,ζ) 处时，我们有

$$\begin{aligned} x_{ijk}&=\frac{8}{abc}\int_0^a\int_0^b\int_0^c X\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{k\pi z}{c}\,dx\,dy\,dz \\ &=\frac{8}{abc}\int_{\xi-\frac{d}{2}}^{\xi+\frac{d}{2}}\int_{\eta-\frac{e}{2}}^{\eta+\frac{e}{2}}\int_{\zeta-\frac{f}{2}}^{\zeta+\frac{f}{2}}\frac{1}{def}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{k\pi z}{c}\,dx\,dy\,dz \end{aligned}$$

$$=\frac{64}{\pi^3 ijkdef}\sin\frac{i\pi d}{2a}\sin\frac{j\pi e}{2b}\sin\frac{k\pi f}{2c}\sin\frac{i\pi\xi}{a}\sin\frac{j\pi\eta}{b}\sin\frac{k\pi\zeta}{c} \tag{2.13}$$

令 $a\to 0$，$b\to 0$ 和 $c\to 0$ 且应用罗皮塔法则，我们得

$$x_{ijk}=\frac{8}{abc}\sin\frac{i\pi\xi}{a}\sin\frac{j\pi\eta}{b}\sin\frac{k\pi\zeta}{c} \tag{2.14}$$

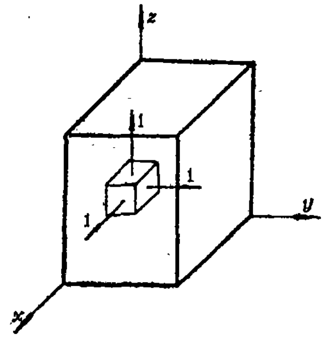


图 2

当两个单位集中载荷分别沿 y 和 z 方向作用在点 (ξ,η,ζ) 处时，用同样的方法，我们有

$$y_{ijk}=z_{ijk}=\frac{8}{abc}\sin\frac{i\pi\xi}{a}\sin\frac{j\pi\eta}{b}\sin\frac{k\pi\zeta}{c} \tag{2.15}$$

代入(2.14)和(2.15)到(2.10)～(2.12)中，我们最后求得

$$U(x,y,z;\ \xi,\eta,\zeta)=\frac{8}{\pi^2 Eabc}\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(i\pi\xi/a)\sin(j\pi\eta/b)\sin(k\pi\zeta/c)}{\left\{\frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left(\frac{i}{a}\right)^2+\frac{1}{2(1+\nu)}\left[\left(\frac{j}{b}\right)^2+\left(\frac{k}{c}\right)^2\right]\right\}}\cdot\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{k\pi z}{c} \tag{2.16}$$

$$V(x,y,z;\ \xi,\eta,\zeta)=\frac{8}{\pi^2 Eabc}\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(i\pi\xi/a)\sin(j\pi\eta/b)\sin(k\pi\zeta/c)}{\left\{\frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left(\frac{j}{b}\right)^2+\frac{1}{2(1+\nu)}\left[\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{k}{c}\right)^2\right]\right\}}\cdot\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{k\pi z}{c} \tag{2.17}$$

$$W(x,y,z;\ \xi,\eta,\zeta)=\frac{8}{\pi^2 Eabc}\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(i\pi\xi/a)\sin(j\pi\eta/b)\sin(k\pi\zeta/c)}{\left\{\frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left(\frac{k}{c}\right)^2+\frac{1}{2(1+\nu)}\left[\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{j}{b}\right)^2\right]\right\}}\cdot\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{k\pi z}{c} \tag{2.18}$$

这些便是基本系统的基本解。

为以后方便起见，我们将给出基本解表面反力的相应表达式，它们分别是

$$(\sigma_{xx1})_{x=a}=\frac{8}{\pi^2 abc}\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^i\left(\frac{i\pi}{a}\right)\sin\frac{i\pi\xi}{a}\sin\frac{j\pi\eta}{b}\sin\frac{k\pi\zeta}{c}}{\left\{\left(\frac{i}{a}\right)^2+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left[\left(\frac{j}{b}\right)^2+\left(\frac{k}{c}\right)^2\right]\right\}}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{k\pi z}{c}$$

$$(\tau_{xyx1})_{y=b}=\frac{8}{\pi^2abc}$$

$$\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^j\left(\dfrac{j\pi}{b}\right)\sin\dfrac{i\pi\xi}{a}\sin\dfrac{j\pi\eta}{b}\sin\dfrac{k\pi\zeta}{c}}{\left\{\left(\dfrac{j}{b}\right)^2+\left[\dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\dfrac{i}{a}\right)^2+\left(\dfrac{k}{c}\right)^2\right]\right\}}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{k\pi z}{c}$$

$$(\tau_{zxx1})_{z=c}=\frac{8}{\pi^2abc}$$

$$\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\dfrac{k\pi}{c}\right)\sin\dfrac{i\pi\xi}{a}\sin\dfrac{j\pi\eta}{b}\sin\dfrac{k\pi\zeta}{c}}{\left\{\left(\dfrac{k}{c}\right)^2+\left[\dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\dfrac{i}{a}\right)^2+\left(\dfrac{j}{b}\right)^2\right]\right\}}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}$$

$$(\sigma_{yy1})_{y=b}=\frac{8}{\pi^2abc}$$

$$\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^j\left(\dfrac{j\pi}{b}\right)\sin\dfrac{i\pi\xi}{a}\sin\dfrac{j\pi\eta}{b}\sin\dfrac{k\pi\zeta}{c}}{\left\{\left(\dfrac{j}{b}\right)^2+\dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left[\left(\dfrac{i}{a}\right)^2+\left(\dfrac{k}{c}\right)^2\right]\right\}}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{k\pi z}{c}$$

$$(\tau_{zyy1})_{z=c}=\frac{8}{\pi^2abc}$$

$$\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\dfrac{k\pi}{c}\right)\sin\dfrac{i\pi\xi}{a}\sin\dfrac{j\pi\eta}{b}\sin\dfrac{k\pi\zeta}{c}}{\left\{\left(\dfrac{k}{c}\right)^2+\left[\dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\dfrac{j}{b}\right)^2+\left(\dfrac{i}{a}\right)^2\right]\right\}}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}$$

$$(\bar{\tau}_{xyy1})_{x=a}=\frac{8}{\pi^2abc}$$

$$\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^i\left(\dfrac{i\pi}{a}\right)\sin\dfrac{i\pi\xi}{a}\sin\dfrac{j\pi\eta}{b}\sin\dfrac{k\pi\zeta}{c}}{\left\{\left(\dfrac{i}{a}\right)^2+\left[\dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\dfrac{j}{b}\right)^2+\left(\dfrac{k}{c}\right)^2\right]\right\}}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{k\pi z}{c}$$

$$(\sigma_{zz1})_{z=c}=\frac{8}{\pi^2abc}$$

$$\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\dfrac{k\pi}{c}\right)\sin\dfrac{i\pi\xi}{a}\sin\dfrac{j\pi\eta}{b}\sin\dfrac{k\pi\zeta}{c}}{\left\{\left(\dfrac{k}{c}\right)^2+\dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left[\left(\dfrac{i}{a}\right)^2+\left(\dfrac{j}{b}\right)^2\right]\right\}}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}$$

$$(\tau_{zxz1})_{x=a}=\frac{8}{\pi^2abc}$$

$$\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^i\left(\dfrac{i\pi}{a}\right)\sin\dfrac{i\pi\xi}{a}\sin\dfrac{j\pi\eta}{b}\sin\dfrac{k\pi\zeta}{c}}{\left\{\left(\dfrac{i}{a}\right)^2+\left[\dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\dfrac{k}{c}\right)^2+\left(\dfrac{j}{b}\right)^2\right]\right\}}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{k\pi z}{c}$$

$$(\tau_{zyz1})_{y=b}=\frac{8}{\pi^2abc}$$

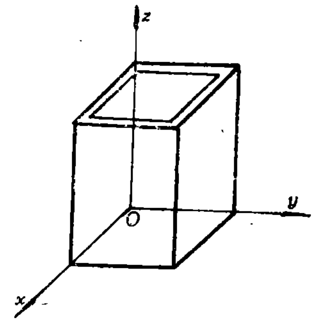
$$\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j}\left(\frac{j\pi}{b}\right)\sin\frac{i\pi\xi}{a}\sin\frac{j\pi\eta}{b}\sin\frac{k\pi\zeta}{c}}{\left\{\left(\frac{j}{b}\right)^{2}+\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{k}{c}\right)^{2}+\left(\frac{i}{a}\right)^{2}\right]\right\}}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{k\pi z}{c}$$

(2.19a～i)

三、具有已知简单表面位移立方体的位移解

如图 3 所示，在立方体 $z=c$ 表面上的已知表面位移分量为

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}_{z=c}(x,y)&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}d_{ij}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\\ \bar{v}_{z=c}(x,y)&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}e_{ij}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\\ \bar{w}_{z=c}(x,y)&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}f_{ij}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\end{aligned}\right\}\quad(3.1)$$



表示全部棱边固定域内给定位移的平面

图 3

其它表面均为固定。

现在让我们来解这一问题。在图 3 所示实际系统与图 2 所示基本系统之间应用功的互等定理，我们有

$$U(\xi,\eta,\zeta)+\int_0^a\int_0^b(\tau_{zx x1})_{z=c}\,\bar{u}_{z=c}(x,y)\,dxdy=0\qquad(3.2)$$

$$V(\xi,\eta,\zeta)+\int_0^a\int_0^b(\tau_{zyy1})_{z=c}\,\bar{v}_{z=c}(x,y)\,dxdy=0\qquad(3.3)$$

$$W(\xi,\eta,\zeta)+\int_0^a\int_0^b(\sigma_{zz1})_{z=c}\,\bar{w}_{z=c}(x,y)\,dxdy=0\qquad(3.4)$$

将 (2.19c, e, g) 和 (3.1) 代入 (3.2)～(3.4)，且注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n\sin nZ}{n^2+\alpha^2}=-\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{sh}\,\alpha Z}{\mathrm{sh}\,\alpha\pi}$$

我们得到

$$U(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{j}{b}\right)^2\right]c^2}\;\frac{\pi\zeta}{c}}{\mathrm{sh}\sqrt{\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{j}{b}\right)^2\right]c^2}\;\pi}\,d_{ij}\sin\frac{i\pi\xi}{a}\sin\frac{j\pi\eta}{b}$$

(3.5)

$$V(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{j}{b}\right)^2+\left(\frac{i}{a}\right)^2\right]c^2}\;\frac{\pi\zeta}{c}}{\mathrm{sh}\sqrt{\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{j}{b}\right)^2+\left(\frac{i}{a}\right)^2\right]c^2}\;\pi}\,e_{ij}\sin\frac{i\pi\xi}{a}\sin\frac{j\pi\eta}{b}$$

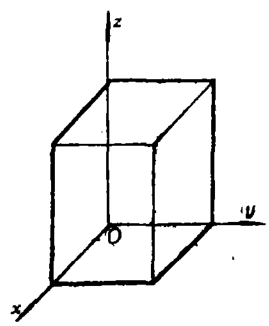
(3.6)

$$W(\xi, \eta, \zeta)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left[\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{j}{b}\right)^2\right]c^2}\ \frac{\pi\zeta}{c}}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left[\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{j}{b}\right)^2\right]c^2}\ \pi}f_{ij}\sin\frac{i\pi\xi}{a}\ \sin\frac{j\pi\eta}{b} \tag{3.7}$$

表达式(3.5)～(3.7)即是图3所示实际系统的位移解。

四、具有已知复杂表面位移立方体的位移解

如图4所示，立方体的三个表面 $x=0$，$y=0$ 和 $z=0$ 是固定的，其它三个表面 $x=a$，$y=b$ 和 $z=c$ 的位移是已知的，且假定它们具有形式



□ 表示部分棱边固定部分棱边给定位移的平面

图 4

$$\bar{u}_{x=a}(y, z)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\ \frac{j\pi z}{b}}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\ \frac{j\pi c}{b}}d_j\sin\frac{j\pi y}{b}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\ \frac{k\pi y}{c}}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\ \frac{k\pi b}{c}}g_k\sin\frac{k\pi z}{c}+\frac{yz}{bc}k_x$$

$$\bar{v}_{x=a}(y, z)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{2}{1-\nu}}\ \frac{j\pi z}{b}}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{2}{1-\nu}}\ \frac{j\pi c}{b}}e_j\sin\frac{j\pi y}{b}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\ \frac{k\pi y}{c}}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\ \frac{k\pi b}{c}}h_k\sin\frac{k\pi z}{c}+\frac{yz}{bc}k_y$$

$$\bar{w}_{x=a}(y, z)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\ \frac{j\pi z}{b}}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\ \frac{j\pi c}{b}}f_j\sin\frac{j\pi y}{b}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{2}{1-\nu}}\ \frac{k\pi y}{c}}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{2}{1-\nu}}\ \frac{k\pi b}{c}}i_k\sin\frac{k\pi z}{c}+\frac{yz}{bc}k_z$$

$$\bar{u}_{y=b}(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{2}{1-\nu}}\ \frac{i\pi z}{a}}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{2}{1-\nu}}\ \frac{i\pi c}{a}}a_i\sin\frac{i\pi x}{a}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\ \frac{k\pi x}{c}}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\ \frac{k\pi a}{c}}g_k\sin\frac{k\pi z}{c}+\frac{xz}{ac}k_x$$

$$\bar{v}_{y=b}(x,z)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\frac{i\pi z}{a}}{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\frac{i\pi c}{a}}b_i\sin\frac{i\pi x}{a}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\frac{k\pi x}{c}}{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\frac{k\pi a}{c}}h_k\sin\frac{k\pi z}{c}+\frac{xz}{ac}k_y$$

$$\bar{w}_{y=b}(x,z)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\frac{i\pi z}{a}}{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\frac{i\pi c}{a}}c_i\sin\frac{i\pi x}{a}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{2}{1-\nu}}\frac{k\pi x}{c}}{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{2}{1-\nu}}\frac{k\pi a}{c}}i_k\sin\frac{k\pi z}{c}+\frac{xz}{ac}k_z$$

$$\bar{u}_{z=c}(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{2}{1-\nu}}\frac{i\pi y}{a}}{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{2}{1-\nu}}\frac{i\pi b}{a}}a_i\sin\frac{i\pi x}{a}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\frac{j\pi x}{b}}{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\frac{j\pi a}{b}}d_j\sin\frac{j\pi y}{b}+\frac{xy}{ab}k_x$$

$$\bar{v}_{z=c}(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\frac{i\pi y}{a}}{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\frac{i\pi b}{a}}b_i\sin\frac{i\pi x}{a}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{2}{1-\nu}}\frac{j\pi x}{b}}{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{2}{1-\nu}}\frac{j\pi a}{b}}e_j\sin\frac{j\pi y}{b}+\frac{xy}{ab}k_y$$

$$\bar{w}_{z=c}(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\frac{i\pi y}{a}}{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\frac{i\pi b}{a}}c_i\sin\frac{i\pi x}{a}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\frac{j\pi x}{b}}{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\frac{j\pi a}{b}}f_j\sin\frac{j\pi y}{b}+\frac{xy}{ab}k_z$$

(4.1a～i)

现在让我们应用功的互等定理解这一问题．在图 4 所示实际系统与图 2 所示基本系统之间应用功的互等定理，我们有

$$U(\xi,\eta,\zeta)+\int_0^b\int_0^c(\sigma_{xx1})_{x=a}\bar{u}_{x=a}(y,z)dydz+\int_0^a\int_0^c(\tau_{xyx1})_{y=b}\bar{u}_{y=b}(x,z)dxdz+\int_0^a\int_0^b(\tau_{xzx1})_{z=c}\bar{u}_{z=c}(x,y)dxdy=0 \tag{4.2}$$

$$V(\xi,\eta,\zeta)+\int_0^a\int_0^c(\sigma_{yy1})_{y=b}\bar{v}_{y=b}(x,z)dxdz+\int_0^a\int_0^b(\tau_{yzy1})_{z=c}\bar{v}_{z=c}(x,y)dxdy+\int_0^b\int_0^c(\tau_{xyy1})_{x=a}\bar{v}_{x=a}(y,z)dydz=0 \tag{4.3}$$

$$W(\xi,\eta,\zeta)+\int_0^a\int_0^b(\sigma_{zz1})_{z=c}\bar{w}_{z=c}(x,y)dxdy+\int_0^b\int_0^c(\tau_{xzz1})_{x=a}\bar{w}_{x=a}(y,z)dydz+\int_0^a\int_0^c(\tau_{yzz1})_{y=b}\bar{w}_{y=b}(x,z)dxdz=0 \tag{4.4}$$

将 (2.19a, b, c) 和 (4.1a, d, g) 代入 (4.2)，将(2.19d, e, f) 和 (4.1b, e, h) 代入 (4 3) 和将 (2.19g, h, i) 和 (4.1c, f, i) 代入 (4.4)，我们得

$$U(\xi,\eta,\zeta)=-\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left[\left(\frac{j}{b}\right)^2+\left(\frac{k}{c}\right)^2\right]a^2}\frac{\pi\xi}{a}}{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left[\left(\frac{j}{b}\right)^2+\left(\frac{k}{c}\right)^2\right]a^2}\pi}\left\{\frac{(-1)^k k}{k^2+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{jc}{b}\right)^2}\right.$$

$$\cdot\sin\frac{k\pi\zeta}{c}d_j\sin\frac{j\pi\eta}{b}+\frac{(-1)^j j}{j^2+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{kb}{c}\right)^2}\sin\frac{j\pi\eta}{b}g_k\sin\frac{k\pi\zeta}{c}$$

$$-\frac{\pi}{2}(-1)^{j+1}\frac{2}{j\pi}\sin\frac{j\pi\eta}{b}(-1)^{k+1}\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi\zeta}{c}k_x\Bigg\}$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{k}{c}\right)^2\right]b^2}\frac{\pi\eta}{b}}{\mathrm{sh}\sqrt{\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{k}{c}\right)^2\right]b^2}\pi}\Bigg\{\frac{(-1)^k k}{k^2+\frac{2}{1-\nu}\left(\frac{ic}{a}\right)^2}$$

$$\cdot\sin\frac{k\pi\zeta}{c}a_i\sin\frac{i\pi\xi}{a}+\frac{(-1)^i i}{i^2+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{ka}{c}\right)^2}\sin\frac{i\pi\xi}{a}g_k\sin\frac{k\pi\zeta}{c}$$

$$-\frac{\pi}{2}(-1)^{i+1}\frac{2}{i\pi}\sin\frac{i\pi\xi}{a}(-1)^{k+1}\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi\zeta}{c}k_x\Bigg\}$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{j}{b}\right)^2\right]c^2}\frac{\pi\zeta}{c}}{\mathrm{sh}\sqrt{\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{j}{b}\right)^2\right]c^2}\pi}\Bigg\{\frac{(-1)^j j}{j^2+\frac{2}{1-\nu}\left(\frac{ib}{a}\right)^2}$$

$$\cdot\sin\frac{j\pi\eta}{b}a_i\sin\frac{i\pi\xi}{a}+\frac{(-1)^i i}{i^2+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{ja}{b}\right)^2}\sin\frac{i\pi\xi}{a}d_j\sin\frac{j\pi\eta}{b}$$

$$-\frac{\pi}{2}(-1)^{i+1}\frac{2}{i\pi}\sin\frac{i\pi\xi}{a}(-1)^{j+1}\frac{2}{j\pi}\sin\frac{j\pi\eta}{b}k_x\Bigg\}\tag{4.5}$$

$$V(\xi,\eta,\zeta)=-\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left[\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{k}{c}\right)^2\right]b^2}\frac{\pi\eta}{b}}{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left[\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{k}{c}\right)^2\right]b^2}\pi}\Bigg\{\frac{(-1)^i i}{i^2+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{ka}{c}\right)^2}$$

$$\cdot\sin\frac{i\pi\xi}{a}h_k\sin\frac{k\pi\zeta}{c}+\frac{(-1)^k k}{k^2+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{ic}{a}\right)^2}\sin\frac{k\pi\zeta}{c}b_i\sin\frac{i\pi\xi}{a}$$

$$-\frac{\pi}{2}(-1)^{k+1}\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi\zeta}{c}(-1)^{i+1}\frac{2}{i\pi}\sin\frac{i\pi\xi}{a}k_y\Bigg\}$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{j}{b}\right)^2+\left(\frac{i}{a}\right)^2\right]c^2}\frac{\pi\zeta}{c}}{\mathrm{sh}\sqrt{\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{j}{b}\right)^2+\left(\frac{i}{a}\right)^2\right]c^2}\pi}\Bigg\{\frac{(-1)^i i}{i^2+\frac{2}{1-\nu}\left(\frac{ja}{b}\right)^2}$$

$$\cdot\sin\frac{i\pi\xi}{a}e_j\sin\frac{j\pi\eta}{b}+\frac{(-1)^j j}{j^2+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{ib}{a}\right)^2}\sin\frac{j\pi\eta}{b}b_i\sin\frac{i\pi\xi}{a}$$

$$-\frac{\pi}{2}(-1)^{j+1}\frac{2}{j\pi}\sin\frac{j\pi\eta}{b}(-1)^{i+1}\frac{2}{i\pi}\sin\frac{i\pi\xi}{a}k_y\Bigg\}$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{j}{b}\right)^2+\left(\frac{k}{c}\right)^2\right]a^2}\ \frac{\pi\xi}{a}}{\operatorname{sh}\sqrt{\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{j}{b}\right)^2+\left(\frac{k}{c}\right)^2\right]a^2}\ \pi}\Bigg\{\frac{(-1)^k k}{k^2+\frac{2}{1-\nu}\left(\frac{jc}{b}\right)^2}$$

$$\cdot\sin\frac{k\pi\zeta}{c}e_j\sin\frac{j\pi\eta}{b}+\frac{(-1)^j j}{j^2+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{kb}{c}\right)^2}\sin\frac{j\pi\eta}{b}h_k\sin\frac{k\pi\zeta}{c}$$

$$-\frac{\pi}{2}(-1)^{j+1}\frac{2}{j\pi}\sin\frac{j\pi\eta}{b}(-1)^{k+1}\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi\zeta}{c}k_y\Bigg\} \qquad (4.6)$$

$$W(\xi,\eta,\zeta)=-\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left[\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{j}{b}\right)^2\right]c^2}\ \frac{\pi\zeta}{c}}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left[\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{j}{b}\right)^2\right]c^2}\ \pi}\Bigg\{\frac{(-1)^j j}{j^2+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{ib}{a}\right)^2}$$

$$\cdot\sin\frac{j\pi\eta}{b}c_i\sin\frac{i\pi\xi}{a}+\frac{(-1)^i i}{i^2+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{ja}{b}\right)^2}\sin\frac{i\pi\xi}{a}f_j\sin\frac{j\pi\eta}{b}$$

$$-\frac{\pi}{2}(-1)^{i+1}\frac{2}{i\pi}\sin\frac{i\pi\xi}{a}(-1)^{j+1}\frac{2}{j\pi}\sin\frac{j\pi\eta}{b}k_z\Bigg\}$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{k}{c}\right)^2+\left(\frac{j}{b}\right)^2\right]a^2}\ \frac{\pi\xi}{a}}{\operatorname{sh}\sqrt{\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{k}{c}\right)^2+\left(\frac{j}{b}\right)^2\right]a^2}\ \pi}\Bigg\{\frac{(-1)^j j}{j^2+\frac{2}{1-\nu}\left(\frac{kb}{c}\right)^2}$$

$$\cdot\sin\frac{j\pi\eta}{b}i_k\sin\frac{k\pi\zeta}{c}+\frac{(-1)^k k}{k^2+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{jc}{b}\right)^2}\sin\frac{k\pi\zeta}{c}f_j\sin\frac{j\pi\eta}{b}$$

$$-\frac{\pi}{2}(-1)^{k+1}\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi\zeta}{c}(-1)^{j+1}\frac{2}{j\pi}\sin\frac{j\pi\eta}{b}k_z\Bigg\}$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{k}{c}\right)^2+\left(\frac{i}{a}\right)^2\right]b^2}\ \frac{\pi\eta}{b}}{\operatorname{sh}\sqrt{\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{k}{c}\right)^2+\left(\frac{i}{a}\right)^2\right]b^2}\ \pi}\Bigg\{\frac{(-1)^i i}{i^2+\frac{2}{1-\nu}\left(\frac{ka}{c}\right)^2}$$

$$\cdot\sin\frac{i\pi\xi}{a}i_k\sin\frac{k\pi\zeta}{c}+\frac{(-1)^k k}{k^2+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{ic}{a}\right)^2}\sin\frac{k\pi\zeta}{c}c_i\sin\frac{i\pi\xi}{a}$$

$$-\frac{\pi}{2}(-1)^{k+1}\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi\zeta}{c}(-1)^{i+1}\frac{2}{i\pi}\sin\frac{i\pi\xi}{a}k_z\Bigg\} \qquad (4.7)$$

表达式(4.5)～(4.7)是此问题的位移解。

让我们验证该解的正确性。令 $\xi=a$, $\eta=b$ 和 $\zeta=c$ 且注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin nZ}{n^2+\alpha^2}=-\frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{sh}\alpha Z}{\operatorname{sh}\alpha\pi}$$

我们有

$$U(a,\eta,\zeta)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\frac{j\pi\zeta}{b}}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\frac{j\pi c}{b}}d_j\sin\frac{j\pi\eta}{b}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\frac{k\pi\eta}{c}}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\frac{k\pi b}{c}}g_k\sin\frac{k\pi\zeta}{c}$$

$$+\frac{\eta\zeta}{bc}k_z=\bar{u}_{x=a}(y\to\eta,\ z\to\zeta)$$

$$U(\xi,b,\zeta)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{2}{1-\nu}}\frac{i\pi\zeta}{a}}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{2}{1-\nu}}\frac{i\pi c}{a}}a_i\sin\frac{i\pi\xi}{a}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\frac{k\pi\xi}{c}}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\frac{k\pi a}{c}}g_k\sin\frac{k\pi\zeta}{c}$$

$$+\frac{\xi\zeta}{ac}k_z=\bar{u}_{y=b}(x\to\xi,\ z\to\zeta)$$

$$U(\xi,\eta,c)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{2}{1-\nu}}\frac{i\pi\eta}{a}}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{2}{1-\nu}}\frac{i\pi b}{a}}a_i\sin\frac{i\pi\xi}{a}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\frac{j\pi\xi}{b}}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\frac{j\pi a}{b}}d_j\sin\frac{j\pi\eta}{b}$$

$$+\frac{\xi\eta}{ab}k_z=\bar{u}_{z=c}(x\to\xi,\ y\to\eta)$$

用同样的方法我们可以验证，令 $\xi=a$，$\eta=b$ 和 $\zeta=c$，$V(\xi,\eta,\zeta)$ 和 $W(\xi,\eta,\zeta)$ 都可以还原为相应的已知表面位移。

参 考 文 献

[1] 付宝连，一个求解位移方程的新方法，东北重型机械学院第三届学术报告会（1981，1）。

[2] 付宝连，应用功的互等定理求解具有复杂边界条件矩形板的挠曲面方程，应用数学和力学，3，3（1982），315—325.

[3] 付宝连，关于功的互等定理与叠加原理的等价性，应用数学和力学，6，9（1985），813—818.

[4] 付宝连，应用功的互等定理计算矩形弹性薄板的自然频率，应用数学和力学，6，11（1985），985—998.

[5] 付宝连，关于求解弹性力学平面问题的功的互等定理法，应用数学和力学，10，5（1989）.（待发表）

[6] 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社（1956）.

Application of the Method of the Reciprocal Theorem to Finding Displacement Solutions of Cubes

Fu Bao-lian

(*Yanshan University, Qinhuangdao*)

Abstract

In this paper the method of reciprocal theorem is extended to find solutions of three-D problems of elasticity.

First we give the basic solution of the cube with six surfaces fixed as the basic system and then using the reciprocal theorem between the basic system acted on by unit concentrated loads and actual system with prescribed surface displacements we find displacement solution of the actual system.