应用数学和力学，第10卷第4期(1989年4月)　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重庆出版社出版

饱水孔隙介质的质量耦合波动问题

李向维　　李向约

（中国建筑工程总公司）　（同济大学）

（钱伟长推荐，1987年8月11日收到）

摘　要

本文按照混合物理论严格地推导出了饱和孔隙介质的一般波传播理论。该理论的重要性在于包含了质量耦合作用，并为研究该问题提供了理性基础和实用方程。本文对所得方程中的系数的物理意义和热力学限制进行了讨论。通过比较认为本文的理论和Biot古典理论基本上一致。本文还对完全透水、完全不透水和具有刚性固体骨架的介质的无边界条件下的波传播问题进行了研究，得到了一些有意义的结论。

一、引　言

关于饱水孔隙介质波传播的研究始于Biot[1]，他以物理和理论上的直觉推导出了饱水线弹性孔隙体的波动方程，该理论考虑了固液相的压缩性以及两相的质量耦合等效应，极具概括性。从Biot的开创性工作至今，很多学者从不同的角度对该问题的研究都在一定程度上证实了Biot理论的正确性，Vardoulakis等[2]的文献曾总结了这方面的工作。针对Biot方程所包含的系数缺乏明确物理意义的缺陷，不少学者（如Rice等[3]）试图给出具有更确切含义的参数，最近的试验研究[4]更深化了这方面的工作。然而到目前为止，对于质量耦合波动问题的研究并不多。Derski曾推导出一组考虑耦合作用的运动方程，Kowalski[5]把该方程的系数与Biot方程的系数做过比较，认为两位作者的理论仅在数学形式上不同，具有相同的内涵。国内学者陈龙珠等[6]最近也研究了耦合波动问题，由于在他们得到的方程中所出现的参数均是可测量的，所以该理论具有很大的应用性。但是这个工作缺乏合理的理论基础，从文中结果中得不到非耦合问题的解答，该文的基本方程也有错误。

近年来在饱水孔隙介质的研究中，混合物理论得到了很多应用。这种从热力物质公理出发的理论，不但为研究饱水孔隙介质的古典模型提供了理性基础，更在考虑热、化学渗透、化学反应、电磁等多重耦合作用方面显示了优越性。在这方面，Bowen的工作[7,8]较为重要。但他的工作均未涉及波传播的质量耦合作用。基于上述的研究现状，本文的目的是：

（1）　利用混合物理论推导等温饱水线弹性孔隙介质的一般波动方程，介质的两相均可压缩并有质量耦合项存在；

（2）　讨论方程所包含的系数，给出物理含义和热力学意义上的限制条件；

（3）　给出不透水、完全透水和刚性体情形的波速值。本文中的张量采用下标记号，另

外的下标s和f分别表示固相和液相。

二、质量耦合波动方程

利用混合物理论来研究多孔介质模型的方法，由于Bowen的一系列工作已成为一种规范化的方法。为了节省篇幅，本文将直接引用前人[7,8]的一些理论结果。饱水多孔介质是由固液两相组成的混合物。考虑两相的应变均为无穷小，如果没有化学因素作用，固液相的质密可分别用下列线性化的式子表示：

$$\rho_s=\rho_s^+(1+w_{si,i}) \tag{2.1}$$

和

$$\rho_f=\rho_f^+(1+w_{fi,i}) \tag{2.2}$$

式中w_{si}和w_{fi}分别表示固液相的位移，上角符号"+"表示参考态的值。略去体力和温度影响，固液两相的线动量守恒方程分别具有以下的线性化形式

$$\rho_s^+\ddot{w}_{si}=-\rho_s^+K_{sij,j}+f_{si} \tag{2.3}$$

和

$$\rho_f^+\ddot{w}_{fi}=-\rho_f^+\mu_{f,i}+f_{fi} \tag{2.4}$$

式中K_{sij}和$\mu_f\delta_{ij}$分别为固液相的化学势函数，δ_{ij}为Kronecker符号，f_{si}和f_{fi}分别为两相的局部相互作用力。从混合物线动量平衡方程知

$$f_{fi}=-f_{si} \tag{2.5}$$

两相化学势和局部相互作用力的三个线性化本构关系式为

$$\rho_s^+K_{sij}=-\lambda_s w_{sk,k}\delta_{ij}-\mu_s(w_{si,j}+w_{sj,i})-\lambda_{sf}w_{fk,k}\delta_{ij} \tag{2.6}$$

$$\rho_f^+\mu_f=-\lambda_{fs}w_{sk,k}-\lambda_f w_{fk,k} \tag{2.7}$$

和

$$f_{fi}=-E_{ij}v_{fj}-D_{ij}\rho_f^+a_{fj} \tag{2.8}$$

其中$v_{fi}=\dot{w}_{fi}-\dot{w}_{si}$表示相对速度，$a_{fi}=\ddot{w}_{fi}-\ddot{w}_{si}$为相对加速度。$\lambda_s$, μ_s, λ_{sf}, λ_{fs}, λ_f, E_{ij}和D_{ij}均为表征介质性质的参数，其物理意义将在下节中详述。另外，液相化学势还可以用孔隙液真压力变化值P_f表示

$$\rho_f^+\mu_{f,i}=\phi_f^+P_{f,i} \tag{2.9}$$

其中ϕ_f为液相体积分数，它与ρ_f的关系是：$\rho_f=\phi_f\gamma_f$，γ_f为液相真质密；对于固相同样有$\rho_s=\phi_s\gamma_s$。

考察式(2.8)可看出，液体的局部相互作用力由两部分组成，一部分是渗透压力，它表示了固液界面处的流体阻力，另一部分为质量耦合作用力，也就是固液界面处的液体惯性阻力。

如果固液两相单位体积Helmholtz自由能在参考态为零，两相的部分应力分别具有以下形式

$$T_{sij}=-\rho_s^+K_{sij} \tag{2.10}$$

和

$$T_{fij}=-\phi_f^+P_f\delta_{ij} \tag{2.11}$$

(2.10)表示了固体骨架的粒间相互作用力，(2.11)表示了对于整个混合物而言的孔隙液平均压力。忽略扩散速度二次项，混合物应力可表为

$$T_{ij}=T_{sij}+T_{fij} \tag{2.12}$$

不难看出，上式即为熟知的Terzaghi有效应力原理的一种理论表述。

现在考虑介质为各向同性体，则有$E_{ij}=\xi\delta_{ij}$，$D_{ij}=\alpha\delta_{ij}$，这时(2.3)～(2.8)一起给出

$$(\lambda_s+\mu_s)w_{sj,ji}+\mu_s w_{si,jj}+\lambda_{sf}w_{fj,ji}$$

$$=(\rho_s^+ + \alpha\rho_f^+)\ddot{w}_{si} - \alpha\rho_f^+\ddot{w}_{fi} - \xi(\dot{w}_{fi} - \dot{w}_{si}) \qquad (2.13)$$

$$\lambda_{fs} w_{sj,ji} + \lambda_f w_{fj,ji} = -\alpha\rho_f^+\ddot{w}_{si} + (1+\alpha)\rho_f^+\ddot{w}_{fi} + \xi(\dot{w}_{fi} - \dot{w}_{si}) \qquad (2.14)$$

以上两式即是惯性耦合波动方程，它们分别是固相和液相的运动方程。将(2.13)、(2.14)相加可得到混合物运动方程

$$(\lambda_s + \mu_s + \lambda_{fs}) w_{sj,ji} + \mu_s w_{si,jj} + (\lambda_f + \lambda_{sf}) w_{fj,ji} = \rho_s^+\ddot{w}_{si} + \rho_f^+\ddot{w}_{fi} \qquad (2.15)$$

由上式可看出质量耦合项已消失，这个从混合物理论体系中得出的结果也有其明显的物理意义：固液两相的局部耦合作用是大小相等、方向相反的相互作用，对于整个混合物来说，内部相互作用互相抵消，整体性状并不受影响。根据[1,5]，本文得到的运动方程与Biot和Derski的方程是一致的；但与陈龙珠等[6]的方程不同，陈等的方程用本文的记号表示为

$$\left(\rho_s^+ + \frac{2}{3}\rho_f^+\right)\ddot{w}_{si} + \frac{1}{3}\rho_f^+\ddot{w}_{fi} = T_{sij,j} - \phi_f^+ P_{f,i} \qquad (2.16)$$

这个具有质量耦合项的混合物运动方程缺乏理论基础和物理意义，是错误的。

三、系数的讨论

在这一节我们将逐一讨论耦合波动方程所包含的各系数。

略去(2.4)的惯性并结合(2.8)和(2.9)不难发现系数ξ和固体组分的本征渗透系数k的关系为

$$\xi = \phi_f^{+2}\nu_f / k \qquad (3.1)$$

其中ν_f为液体粘滞系数。本文所述的混合物模型的熵不等式为

$$-v_{fi} f_{fi} \geqslant 0 \qquad (3.2)$$

在略去惯性项后可得到限制条件：$\xi \geqslant 0$，根据(3.1)此条件显然满足。为了讨论耦合系数α，将(2.8)代入(3.2)后得到

$$\xi v_{fi} v_{fi} + \alpha\rho_f^+ v_{fi} a_{fi} \geqslant 0 \qquad (3.3)$$

上式满足的条件是

$$\left.\begin{aligned} a_{fi}v_{fi} > 0\text{时} \quad & \alpha \geqslant -\alpha_1 \\ a_{fi}v_{fi} < 0\text{时} \quad & \alpha \leqslant \alpha_1 \end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

其中$\alpha_1 = (\xi v_{fi} v_{fi}) / (|a_{fi} v_{fi}|)$，这表明$\alpha$的正负号是不定的。Biot曾经提出对$\alpha$值的限制条件是$\alpha \geqslant 0$[1]，由本文的结果可看出这个结论是不全面的。就这一点而言本文与文[6]相吻合。还应指出，混合物的标架无差异公理对耦合效应提出了这样的限制[7]：如果质量耦合作用存在，速度梯度应该很小；如果速度梯度不能忽略，耦合作用不应存在。显然，本文的模型是满足这一限制条件的。

为了考虑(2.13)和(2.14)所包含的弹性常数的意义，我们先观察一下本文得到的耦合波动方程与Biot方程的区别。用本文的记号表示，Biot方程[1,2]可写为

$$(\lambda+\mu) w_{sj,ji} + \mu w_{si,jj} - (\phi_s^+ - \gamma)\phi_f^+ P_{f,i}$$
$$= \rho_{11}\ddot{w}_{si} + \rho_{12}\ddot{w}_{fi} - \xi(\dot{w}_{fi} - \dot{w}_{si}) \qquad (3.5)$$

$$-\phi_f^{+2} P_{f,i} = \rho_{12}\ddot{w}_{si} + \rho_{22}\ddot{w}_{fi} + \xi(\dot{w}_{fi} - \dot{w}_{si}) \qquad (3.6)$$

和 $$\phi_f^+ w_{fi,i} + (\phi_s^+ - \gamma) w_{si,i} = -[\phi_f^+\beta_f + (\phi_s^+ - \gamma)\beta_s]\phi_f^+ P_f \qquad (3.7)$$

式中λ和μ为Lamè弹性常数，β_s和β_f分别为固液相的压缩系数，$\gamma = \beta_s/\beta$，$\beta = 1/(\lambda + 2\mu)$。与这个方程组比较，(2.13)、(2.14)方程组似乎缺少1个方程。实事上此方程可由(2.7)

和（2.9）一起给出

$$\phi_f^+ P_f = -\lambda_{fs} w_{si,i} - \lambda_f w_{fi,i} \tag{3.8}$$

该方程与连续性方程（3.7）等价。把（2.13）与(3.5)、(2.14)与(3.6)、(3.8)与(3.7)比较，可得到系数间的关系

$$\left.\begin{aligned}
&\mu_s=\mu,\ \lambda_s=\lambda+\frac{(\phi_s^+-\gamma)^2}{a},\ \lambda_f=\frac{\phi_s^+-\gamma}{a}\\
&\lambda_{sf}=\frac{(\phi_s^+-\gamma)\phi_f^+}{a},\quad \lambda_{fs}=\frac{\phi_f^+}{a},\quad a=\phi_f^+\beta_f+(\phi_s^+-\gamma)\beta_s\\
&\rho_{11}=\rho_s^++\alpha\rho_f^+,\quad \rho_{12}=-\alpha\rho_f^+,\quad \rho_{22}=(1+\alpha)\rho_f^+
\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

(2.14)与（3.6）的比较可看出 Biot 方程（3.6）的左边比（2.14）多乘了ϕ_f^+。(3.9) 还指出$\lambda_{sf}=\lambda_{fs}(\phi_s^+-\gamma)$，但在混合物理论中$\lambda_{sf}=\lambda_{fs}$。这些结果都表明，本文的模型与 Biot 理论基本等价；此外，我们还得到了各弹性系数的确切物理含义。还应指出，混合物理论对弹性系数的限制为（令$\lambda_{fs}=\lambda_{sf}$）

$$\mu_s>0,\quad \lambda_f>0,\ \lambda_f\left(\lambda_s+\frac{2}{3}\mu_s\right)>\lambda_{fs}^2 \tag{3.10}$$

显然，按照（3.9）的定义这些限制均满足。

最后值得一提的是，令$\alpha=0$，(2.13)和（2.14）立即转变为非耦合波动方程[7]。显而易见，下文得到的波速也具有此特征，这是文[6]所不能得到的。

四、几种情形下的波速

这一节我们将利用（2.13）和（2.14）讨论几种特殊情形下波传播特征。为此，设

$$w_{si}=\chi_{s,i}-\varepsilon_{ijk}\psi_{sj,k} \tag{4.1}$$

和

$$w_{fi}=\chi_{f,i}-\varepsilon_{ijk}\psi_{fj,k} \tag{4.2}$$

并且有

$$\psi_{si,i}=\psi_{fi,i}=0 \tag{4.3}$$

χ和ψ_i分别为膨胀势和旋转势，ε_{ijk}为变换符号

1．孔隙水自由流动介质($\xi=0$)

这时，(2.13）和（2.14）一起给出

$$c_1^2\psi_{si,jj}=\ddot{\psi}_{si} \tag{4.4}$$

$$c_1^2=\left[\mu_s+\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\lambda_s\right]\Big/\left[\rho_s^++\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\rho_f^+\right] \tag{4.5}$$

c_1即为固体S波波速。另外的关系式为

$$(\lambda_s+2\mu_s)\chi_{s,jj}+\lambda_{sf}\chi_{f,jj}=(\rho_s^++\alpha\rho_f^+)\ddot{\chi}_s-\alpha\rho_f^+\ddot{\chi}_f \tag{4.6}$$

$$\lambda_{sf}\chi_{s,jj}+\lambda_f\chi_{f,jj}=-\alpha\rho_f^+\ddot{\chi}_s+(1+\alpha)\rho_f^+\ddot{\chi}_f \tag{4.7}$$

按照[7]的做法，令波速u满足

$$u^2\chi_{s,jj}=\ddot{\chi}_s,\quad u^2\chi_{f,jj}=\ddot{\chi}_f \tag{4.8}$$

代入(4.6)、(4.7)后得

$$\begin{bmatrix}(\lambda_s+2\mu_s)-u^2(\rho_s^++\alpha\rho_f^+) & \lambda_{sf}+u^2\alpha\rho_f^+\\ \lambda_{sf}+u^2\alpha\rho_f^+ & \lambda_f-u^2(1+\alpha)\rho_f^+\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\chi_{s,jj}\\ \chi_{f,jj}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \tag{4.9}$$

由上式左边系数矩阵奇异的条件可得

$$u^2=\frac{1}{2}\left\{c_2^2+c_3^2\pm\sqrt{(c_2^2-c_3^2)^2+4\Omega^2}\right\} \tag{4.10}$$

$$c_2^2=\frac{\lambda_s+2(1+\alpha)\mu_s+\alpha\lambda_{sf}}{(1+\alpha)\rho_s^++\alpha\rho_f^+} \tag{4.11}$$

$$c_3^2=\frac{(\rho_s^++\alpha\rho_f^+)\lambda_f+\alpha\rho_f^+\lambda_{sf}}{\rho_f^+[(1+\alpha)\rho_s^++\alpha\rho_f^+]} \tag{4.12}$$

$$\Omega^2=\frac{[\alpha\rho_f^+(\lambda_s+2\mu_s)+(\rho_s^++\alpha\rho_f^+)\lambda_{sf}][\alpha\lambda_f+(1+\alpha)\lambda_{sf}]}{\rho_f^+[(1+\alpha)\rho_s^++\alpha\rho_f^+]^2} \tag{4.13}$$

c_2和c_3分别为质量耦合情形下固体和液体的P波波速，若$\alpha=0$，(4.10)～(4.13)与文[7]的结果相吻合。若$\alpha=0$，$\lambda_{sf}=0$，c_2和c_3变为通常所见到的形式，$c_2^2=(\lambda_s+2\mu_s)/\rho_s^+$，$c_3^2=\lambda_f/\rho_f^+$。可以证明，(3.10)保证了$u^2$值总为正。

2. 孔隙水不能流动介质($1/\xi=0$)

此时 $w_{si}=w_{fi}$，$\chi_s=\chi_f=\chi$，$\psi_{si}=\psi_{fi}=\psi_i$，(2.13)和(2.14)变为

$$c_4^2\psi_{i,jj}=\ddot{\psi}_i,\quad c_4^2=\mu_s/(\rho_s^++\rho_f^+) \tag{4.14}$$

$$c_5^2\chi_{jj}=\ddot{\chi},\quad c_5^2=(\lambda_s+2\mu_s+2\lambda_{sf}+\lambda_f)/(\rho_s^++\rho_f^+) \tag{4.15}$$

c_4和c_5分别为S波和P波波速，可以看出，质量耦合项对这种情形下的两种波速都不产生影响。

3. 固体骨架为刚性的介质

此时 $w_{si}=0$，$\chi_s=0$，$\psi_{si}=0$，(2.13)和(2.14)变为

$$c_6^2\chi_{f,jj}=\ddot{\chi}_f,\quad c_6^2=(\lambda_f+\lambda_{sf})/\rho_f^+ \tag{4.16}$$

$$c_7^2\chi_{f,jj}=\ddot{\chi}_f+\xi/[(1+\alpha)\rho_f^+]\dot{\chi}_f,\quad c_7^2=\lambda_f/[(1+\alpha)\rho_f^+] \tag{4.17}$$

以上两式表明存在着两种P波。波速为c_6的波是在整个混合物中传播，它不受阻尼干扰和质量耦合的影响；波速为c_7的波仅在液相中传播，但它与质量耦合和阻尼项有关。

五、结 束 语

1.本文依照混合物理论，严格地推导出质量耦合波动方程，为研究此问题提供了理性基础和实用方程。利用此方程，本文还纠正了前人的某些错误，表明混合物理论在解决此类问题时具有很大的优越性。

2.与 Biot 经典理论的比较指出，本理论与 Biot 理论除个别之处有些小的差别外基本一致。本文还据此定义了混合物模型所包含系数的明确物理含义，这些系数除耦合系数外均可通过物理试验独立地测定。质量耦合系数可以利用试验拟合或统计力学的方法求出。

3.多孔饱水介质中波的传播性状在很大程度上受介质渗透性质的控制。质量耦合作用对完全透水介质有较大的影响，但对完全不透水介质不产生任何影响。在刚性固体组分的介质中存在着两种P波。

参 考 文 献

[1] Biot, M. A., Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, I. Low-frequency, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **28** (1956), 168.

[2] Vardoulakis, I. and D. E. Beskos, Dynamic behavior of nearly saturated porous media, *Mechanics of Materials*, 5 (1986), 87—108.

[3] Rice, J. R. and M. P. Cleary, Some basic stress-diffusion solutions for fluid saturated elastic porous media with compressible constituents, *Rev. Geophys. Space Phys.*, **14** (1976), 227—241.

[4] Lipkin, J., R. H. Bennett and D. F. McTigue, Consolidation under an isotropic total stress increase; Part Ⅱ, Experimental results for marine clay, *Geotechnique*, **36**, 1 (1986), 11—25.

[5] Kowalski, S. J., Identification of the coefficients in the equations of motion for a fluid-saturated porous medium, *Acta Mechanica*, **47** (1983), 263—276.

[6] 陈龙珠、吴世明、曾国熙，弹性波在饱和土层中的传播，力学学报，**19**，3 (1987)，283—291.

[7] Bowen, R. M., *Theory of Mixtures*, in *Continuum Physics*, A. C. Eringen, ed., **Vol. Ⅲ**, Academic Press, N. Y. (1976). 中译本，《混合物理论》，许慧已等译，江苏科学技术出版社 (1983).

[8] Bowen, R. M., Compressible porous media models by use of the theory of mixtures, *Internat. J. Engng. Sci.*, **20** (1982), 697—735.

Wave Propagation with Mass-Coupling Effect in Fluid-Saturated Porous Media

Li Xiang-wei

(*China State Construction Engineering Corporation, Beijing*)

Li Xiang-yue

(*Tongji University, Shanghai*)

Abstract

This article utilizes the theory of mixtures to formulate a general theory of wave propagation with mass-coupling effect in fluid-saturated porous media. An attempt is made to discuss the physical interpretation and the thermodynamic restriction of the coefficients appearing in the equations obtained. By the comparison it is shown that Biot's classical theory and the present one are essentially consistent. Also, wave velocities in some special cases are calculated, from which it is concluded that mass-coupling and permeability of media greatly affect wave propagation behavior.