

一种基于无屈服概念的粘塑性模型*

周光泉 程经毅

(中国科学技术大学, 1987年 6 月10日收到)

摘 要

结合位错运动的热激活理论, 基于无屈服概念, 提出了一组描述金属材料变形规律的弹/粘塑性本构方程。方程从总体上考虑了应变率、应变历史、应变速率历史、硬化和温度等效应, 具有较强的物理基础。恒温单轴条件下商业纯钛的力学性能的理论预测与实验结果相比较, 存在着良好的一致性。

一、引 言

二次大战以来, 由于军事、航空、航天、石油、化工、核工业等的飞速发展, 随之而来的是人们对强动载(爆炸、冲击等)条件下的力学效应以及与大变形有关的非线性问题产生越来越大的兴趣。随着大型计算机的迅速发展和各种新的计算方法的提出, 过去不敢问津的这些复杂力学问题, 现在有了解决的门径。但是, 经验告诉我们, 再好的计算方法, 再高明的计算机, 都必须建立在正确的数学模型的前提之上, 否则, 其计算结果都是不足信赖的。这里最关紧要的是建立切合实际的方便应用的本构模型和动态断裂准则等。

迄今为止已发展了各种各样的本构模型, 就考虑应变率影响的弹/粘塑性类型的本构模型来讲, 比较著名的就有所谓 Bingham 模型、超应力模型、拟线性模型、经验型本构关系等^[1]。但这些模型的一个共同之点就是以存在屈服面为其前提。70年代, Bodner-Partom 基于位错动力学的启发, 首次提出了一种带经验性的粘塑性模型。这种模型的一个显著特点就是认为粘塑性变形发生在加卸载的整个过程中, 不引进任何屈服概念^[2], 这在工程应用中所带来的便利是不言而喻的。因而, 这种模型一经提出就受到许多人的重视。作者也曾在此方面作过一些工作, 完善了幂函数型的无屈服本构模型, 探讨了有关的物理基础, 并利用该模型对变截面杆中二维弹/粘塑性波传播问题进行过一定的理论和数值分析^{[3], [4]}。但综观 P-B 本构模型, 总觉得其物理根据并不充分, 且随着加载条件和环境条件不同, 其形式不断修改、变化, 给人一种随情试凑的感觉。本文试图根据金属塑性变形的微观机制——位错运动的热激活理论, 提出一种较为通用的能反映各种加卸载作用和温度影响的无屈服型弹/粘塑性本构模型, 用该模型进行了一系列理论预测, 并与实验结果进行了对比讨论。

* 刘人怀推荐。

国家自然科学基金资助项目。

二、本构方程的一般形式

假设总应变率张量 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 可分解为弹性分量 $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ 和非弹性分量 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (2.1)$$

弹性应变率 $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ 可通过对 Hooke 定律的时间微商与应力率相关联。非弹性应变率 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ 则通过经典塑性理论的相关流动法则与应力相联系:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \bar{\lambda} S_{ij} \quad (2.2)$$

其中 $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij}/3$ 为偏应力张量, $\bar{\lambda}$ 为一参数 (非常数)。

对方程(2.2)两边平方得:

$$\bar{\lambda}^2 = D_2^p / J_2^s \quad (2.3)$$

式中 D_2^p 是非弹性应变率张量的第二不变量 (可视为等效非弹性应变率),

$$D_2^p = \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (2.4)$$

而 J_2^s 是偏应力张量的第二不变量 (可视为等效应力),

$$J_2^s = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (2.5)$$

如能给出 D_2^p 与 J_2^s 之间的具体函数关系, 则可求得非弹性应变率。为此, 我们来考察金属塑性变形的微观机制。我们知道, 晶体塑性性质是一系列在微观尺度上发生的基本过程的结果, 最主要的是位错运动以及位错与晶格, 位错与位错, 和位错与其他缺陷 (如溶质原子等) 的复杂相互作用的结果^[5]。

塑性剪切应变率与位错运动之间存在着著名的 Orowan 关系:

$$\dot{\gamma}^p = \rho b \bar{V} \quad (2.6)$$

这里 $\dot{\gamma}^p$ 是塑性剪切应变率, ρ 为可动位错密度, b 为可动位错密度之平均 Burgers 矢量, \bar{V} 为可动位错之平均速度。

方程(2.6)表明塑性应变率主要取决于可动位错密度与位错速度的乘积。显然, 要想从位错动力学出发得到塑性变形的定量描述结果, 其关键在于确定位错速度 \bar{V} 和可动位错密度 ρ 分别与应力、应变、温度、应变率等宏观力学量之间有什么样的关系。

如果位错运动由克服单一类型障碍的热激活控制, 则有:

$$\bar{V} = \frac{1}{l} A \Gamma \quad (2.7)$$

式中 l 是热激活区中之位错段长度, A 为一成功的热激活事件后位错所扫过的区域, Γ 为成功的热激活事件的频率。

从统计力学可以得到原子的共同热运动导致一成功的热激活事件的频率为^[6]:

$$\Gamma = \nu_1 \exp \left[\sum_{i=2}^N \ln \left(\frac{\nu_i}{\nu_1} \right) \right] \exp \left(-\frac{\Delta H}{KT} \right) \quad (2.8)$$

这里 ΔH 是激活焓, ν_i 为基态时晶格的 N 个简正振动频率, ν_1 为对应于激活态的振动频率, K 为 Boltzman 常数。

因为

$$\nu_1 = \nu_0 b / 2l \quad (2.9)$$

$$\Delta s = K \sum_{i=2}^N \ln \left(\frac{\nu_i}{\nu_i^0} \right) \quad (2.10)$$

式中 ν_0 为 Debye 频率, Δs 是激活熵, 从而

$$\Gamma = \frac{\nu_0 b}{2l} \exp(-\Delta G/KT) \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\nu_0 b A}{2l^2} \exp(-\Delta G/KT) \\ &\approx \frac{\nu_0 b}{2} \exp(-\Delta G/KT) \end{aligned} \quad (2.12)$$

其中 $\Delta G = \Delta H - T\Delta s$ 为 Gibbs 激活自由能.

位错段越过障碍运动的激活自由能 ΔG 为外加剪应力所决定:

$$\Delta G = \int_{\tau}^{\tau_0} V(\tau, T) d\tau \quad (2.13)$$

这里 V 是激活体积, τ_0 为没有热激活时位错运动克服障碍所需的最大剪应力, 也可称作绝热剪切流动强度.

上式表明, 只要能对具体的障碍形式给出激活体积 V 的表达式就可确定 Gibbs 激活自由能. 假定 V 对应力与温度的依赖关系可写成分离变量的形式, 即

$$V(\tau, T) = V_1(\tau) V_2(T) \quad (2.14)$$

这里 $V_1(\tau) > 0, V_2(T) > 0$

根据热力学条件可以推知 Gibbs 激活自由能是切应力的凸函数, 温度的凹函数, 于是有:

$$\frac{\partial V_1(\tau)}{\partial \tau} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 V_2(T)}{\partial T^2} < 0$$

这里可以假设如下的函数形式:

$$V_1(\tau) = \frac{a_1}{\tau_0} \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^m \quad (2.15)$$

$$V_2(T) = 1 - \frac{\lambda}{1 + T/T_m} \quad (2.16)$$

其中 T_m 为熔点温度, T/T_m 称为约化温度. $m \geq 0, a_1 > 0, 0 \leq \lambda < 1$ 均为材料常数.

由此可以推得 Gibbs 自由能的具体函数形式为:

$$\Delta G(\tau, T) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda}{1 + T/T_m} \right) \frac{a_1}{1-m} \left[1 - \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{m-1} \right] & (m \neq 1) \\ \left(1 - \frac{\lambda}{1 + T/T_m} \right) a_1 \ln \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right) & (m = 1) \end{cases} \quad (2.17)$$

至于绝热剪切流动强度 τ_0 , 根据实验观察并参照有关文献^[7], 可以假设为剪切应变率 $\dot{\gamma}$ 的递减函数:

$$\tau_0 = \tau_m (\dot{\gamma})^{-B} \quad (2.18)$$

其中 τ_m, B 为材料常数.

可动位错密度可以视为表征材料变形过程中内部结构变化的内状态变量, 它与宏观力学

量之间的联系也需要加以确定。我们知道，总位错密度随塑性变形的增大而增大。事实上由位错的物理过程不难得出总位错密度的变化率 $\dot{\rho}_t$ 应该满足如下关系：

$$\dot{\rho}_t = b p \tau \dot{\gamma} \rho$$

其中 $p (\geq 0)$ 为位错增殖系数。利用 Orowan 公式，上式可化为

$$\dot{\rho}_t = p \tau \dot{\gamma}^2$$

积分后可得：

$$\rho_t = \rho_0 + p W_p \quad (2.19)$$

这儿 W_p 为塑性功。

总位错密度的增大一方面使塑性流动容易发生，即产生加工软化，另一方面由于位错间的相互作用频率增大而使可动位错的百分数减小，从而使塑性流动更加困难，即产生加工硬化。真实的材料行为应该是硬化与软化综合作用的结果，这种综合作用可以用可动位错密度加以表示：

$$\rho = f \rho_t \quad (2.20)$$

其中 f 为可动位错密度的百分数。显然， f 是一随变形增大而减小的函数，其具体函数形式应根据材料的加工硬化特性而选取，对于递减硬化材料（如 Ti）一般可取为如下形式：

$$f = \frac{1}{1 + \Phi W_p^q} \quad (2.21)$$

其中 $\Phi \geq 0$ ， $q < 1$ 为新的材料常数。

综上所述可以给出热激活理论下的塑性应变率方程：

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\gamma} = c_0 \rho \exp(-\Delta G/KT) \\ \rho = (\rho_0 + p W_p) \left(\frac{1}{1 + \Phi W_p^q} \right) \\ \Delta G = \begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda}{1 + T/T_m} \right) a_1 / (1 - m) \left[1 - \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{m-1} \right] & (m \neq 1) \\ \left(1 - \frac{\lambda}{1 + T/T_m} \right) a_1 \ln \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right) & (m = 1) \end{cases} \\ \tau_0 = \tau_m (\dot{\gamma})^{-B} \end{array} \right. \quad (2.22)$$

其中 $c_0 = b^2 v_0 / 2$ 为新的材料常数。

利用各向同性材料其等效应力-应变曲线与单轴应力-应变曲线相同之假定，容易将方程 (2.22) 推广到三维情况：

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} c_0 \rho \exp[-\Delta G(\sqrt{J_2}, T)/KT] S_{ij} / \sqrt{J_2} \\ \rho = (\rho_0 + p W_p) \left(\frac{1}{1 + \Phi W_p^q} \right) \\ \Delta G(\sqrt{J_2}, T) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda}{1 + T/T_m} \right) \frac{a_1}{1 - m} \left[1 - \left(\frac{\tau_0}{\sqrt{J_2}} \right)^{m-1} \right] & (m \neq 1) \\ \left(1 - \frac{\lambda}{1 + T/T_m} \right) a_1 \ln \left(\frac{\tau_0}{\sqrt{J_2}} \right) & (m = 1) \end{cases} \\ \tau_0 = \tau_m (\dot{\gamma})^{-B} \\ \dot{\gamma} = 2\sqrt{D_2} = \sqrt{2\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}} \end{array} \right. \quad (2.23)$$

弹性应变率张量由广义虎克定律的时间微商得到:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{\dot{\sigma}_{ij}}{2\mu} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} \quad (2.24)$$

其中 μ 为剪切弹性模量, E 为杨氏模量, ν 为泊松比。

方程 (2.1), (2.23), (2.24) 给出了无屈服型弹/粘塑性材料的一般本构微分方程组:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{\dot{\sigma}_{ij}}{2\mu} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{1}{2} c_0 \rho \exp[-\Delta G(\sqrt{J_2}, T)/KT] S_{ij} / \sqrt{J_2} \\ \rho = (\rho_0 + pW_p) \left(\frac{1}{1 + \bar{\Phi} W_p^q} \right) \\ \Delta G = \begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda}{1 + T/T_m}\right) \frac{a_1}{1-m} \left[1 - \left(\frac{\tau_0}{\sqrt{J_2}}\right)^{m-1}\right] & (m \neq 1) \\ \left(1 - \frac{\lambda}{1 + T/T_m}\right) a_1 \ln\left(\frac{\tau_0}{\sqrt{J_2}}\right) & (m = 1) \end{cases} \\ \tau_0 = \tau_m (\bar{\psi})^{-B} \end{array} \right. \quad (2.25)$$

三、单轴应力条件下的理论和实验结果

在恒温、单轴拉压条件下, 上述本构方程 ($m=1$) 可以简化为如下形式:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p \\ \dot{\varepsilon}^e = \dot{\sigma}/E \\ \dot{\varepsilon}^p = c'_0 (\rho_0 + \bar{p}W_p) \left(\frac{1}{1 + \bar{\Phi} W_p^q} \right) \left(\frac{\sigma}{\tau_0} \right)^n \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \tau_0 = \tau_m (\dot{\varepsilon})^{-B} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

这里 c'_0 , \bar{p} , $\bar{\Phi}$, n 为新的材料常数, \bar{W}_p 为无量纲塑性功 ($\bar{W}_p = W_p/W_{p0}$, 而 W_{p0} 取为 1Nmm^{-2}).

为了确定材料常数并考察本文所建议的本构方程的适用性, 我们采用 Bodner 等在 10 吨级 Instron 材料试验机上对商业纯钛试件所进行的实验结果^[2].

材料常数通过对 $\dot{\varepsilon} = 1.6 \times 10^{-5} \text{sec}^{-1}$, $\dot{\varepsilon} = 3.2 \times 10^{-3} \text{sec}^{-1}$ 下两条应力-应变实验曲线的最小二乘法拟合而得到, 其结果为:

$$c'_0 = \sqrt{3}/2 (\text{mm}^2 \text{sec}^{-1}), \quad \rho_0 = 1.0 \times 10^6 (\text{mm}^{-2}), \quad \bar{p} = 1.0 \times 10^4 (\text{mm}^{-2})$$

$$\bar{\Phi} = 0.3356, \quad q = 0.7161, \quad n = 4.777, \quad B = 0.1817$$

$$\tau_m = 5.916 \times 10^3 (\text{N} \cdot \text{mm}^{-2} \text{sec}^{-B}), \quad E = 1.18 \times 10^5 (\text{Nmm}^{-2})$$

拟合曲线的结果表示在图 1 中, 可以看出理论计算曲线与实验曲线的吻合程度是令人相当满意的。

一组有生命力的本构方程, 当材料常数从相对少的一些实验点确定后, 应能在大的加载条件范围内预言材料响应。在此我们使用上面所确定的材料常数对钛在不同应变率, 应变率突变, 加载-卸载-再加载等条件下的力学响应进行考察。

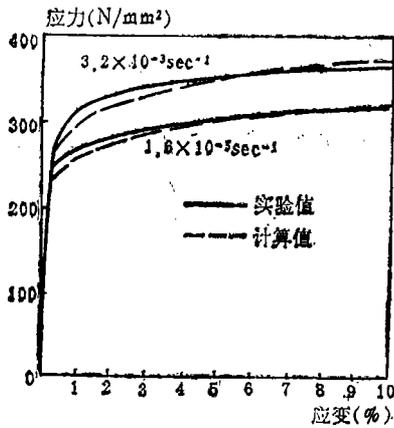


图 1 恒应变率下钛的实验与计算(拟合)应力-应变曲线

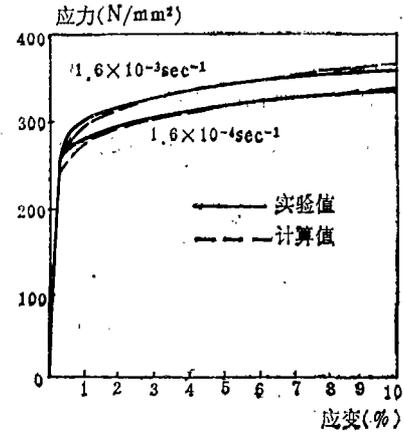


图 2 恒应变率下钛的实验与计算(预言)应力-应变曲线

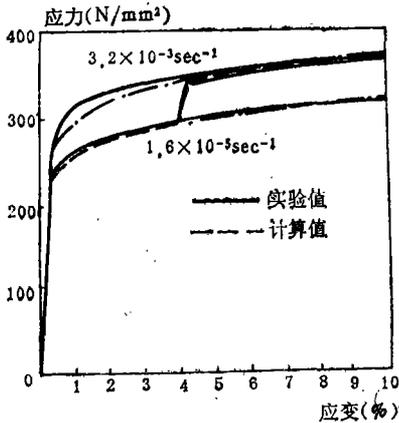


图 3 应变率突然增加时钛的实验与计算应力-应变曲线

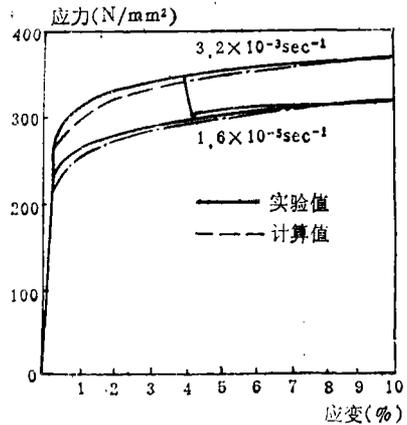


图 4 应变率突然减小时钛的实验与计算应力-应变曲线

在 $\dot{\epsilon} = 1.6 \times 10^{-4} \text{sec}^{-1}$ 和 $\dot{\epsilon} = 1.6 \times 10^{-3} \text{sec}^{-1}$ 条件下理论预测曲线与实验曲线的比较表示在图 2 中, 不难看出二者是相当一致的。

在 4% 的应变下, 应变率突然变化时材料的响应见图 3 和图 4。

对于应变率突然从 $1.6 \times 10^{-5} \text{sec}^{-1}$ 增大到 $3.2 \times 10^{-3} \text{sec}^{-1}$ 的情况, 实验与理论计算的曲线都表现出其瞬态响应接近于弹性性质, 并从下面趋近于常应变率下发生变形所得到的应力-应变曲线(图 3)。实验曲线显示出上屈服点现象, 而计算曲线是平滑的, 这在细节上表现了稍许的差别。上屈服现象可能是由于诸如可动位错密度等微观结构参数的改变所产生的, 本构方程未能反映出此种现象。

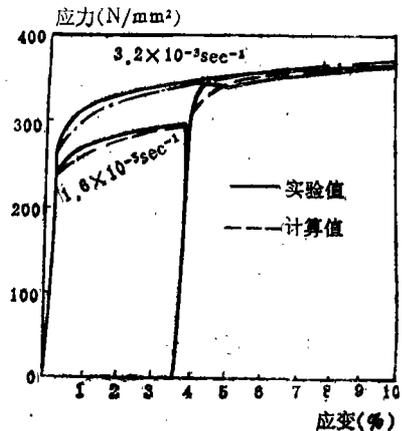


图 5 加载、卸载、在更高的应变率下再加载时钛的实验与计算应力-应变曲线

对于应变率突然从 $3.2 \times 10^{-3} \text{sec}^{-1}$ 减小到 $1.6 \times 10^{-5} \text{sec}^{-1}$ 的情形, 实验与理论计算曲线的瞬态响应几乎都是弹性的卸载, 然后从下面趋于恒应变率的情况 (图4)。实验曲线显示了类似于反向屈服效应的下降与上升。

对于加载-卸载-再加载的情况, 理论计算曲线也非常接近于实验曲线 (图5)。

四、结论与讨论

从以上分析不难看出, 本文发展的弹/粘塑性本构方程能够较准确地反映应变率敏感材料特别是钛的应变率效应、应变率历史效应、应变历史效应、加工硬化特性、卸载特性和重复加载特性等真实力学行为。方程较之 Bodner-Partom 模型具有更为坚实的物理基础, 其各材料常数也都具有较为清楚的物理意义。

由于本文发展的本构模型是基于位错动力学的热激活机制而提出的, 没有引入屈服判据和加卸载条件, 在整个变形过程中材料用同一本构关系描述。这样, 在求解问题时, 便无需寻找屈服函数, 且加载过程与卸载过程用同一数学关系描述, 因而给数学处理带来很大方便, 这使本理论有着良好的工程实际应用前景。

该本构模型具有较丰富的内涵, 在某些特定条件下, 它很容易转化为其他一些已知的本构方程。例如, 在 $m > 1$ 的情况下, 加上引入修正指数 n , 得到 Bodner-Partom 模型: $D_2^m = D_0^m \exp[-(z^2/J_2^m)^n]$; 幂函数型的经验本构关系式 $\tau/\tau_0 = (\dot{\gamma}^m/\dot{\gamma}_0^m)^m$ 对应于 $m=1$; 对数型经验公式 $\tau/\tau_0 = 1 + \lambda \ln(\dot{\gamma}^m/\dot{\gamma}_0^m)$ 对应于 $m=0$ 。

对于该本构方程能够反映不同温度下材料的力学行为的能力已进行了相应的理论分析与实验验证工作, 这将在另文中报道。

该本构方程对描述循环加载等力学行为的能力尚需作进一步的研究与发展。对此, 作者已有所考虑。

参 考 文 献

- [1] 杨绪灿、杨桂通、徐秉业编著, 《粘塑性力学》, 中国铁道出版社 (1985)。
- [2] Bodner, S. R. and Y. Partom, Constitutive equations for elastic-viscoplastic strain-hardening materials, *JAM*, **42**, June (1975), 385—389.
- [3] 周光泉, 关于无屈服面粘塑性理论, *爆炸与冲击*, **3**, 4 (1983), 10, 25—34.
- [4] Zhou, G. Q., H. Ghoneim and Y. Chen, Numerical experiments with two-dimensional elastic-viscoplastic bars, *Int. Journal of Computer and Structure*, **18**, 4 (1984), 591—601.
- [5] Fried, J., *Les Dislocations*, Gaethier-Villars (1956). (中译本, 《位错》, 科学出版社)
- [6] Granato, A. V., K. Lücke, J. Schlipt and L. J. Teutonico, *J. Appl. Phys.*, **35** (1964), 2732—2745.
- [7] Yu Chen, Power-formula viscoplasticity, its modification and some applications, *J. Eng. Mater. Tech.*, **106**, 4 (1984), 383—387.

A Viscoplastic Model Based on No-Yield-Surface Concept

Zhou Guang-quan Cheng Jing-yi

(University of Science and Technology of China, Hefei)

Abstract

The elastic/viscoplastic constitutive equation which describes deformation law of metal materials was suggested based on no-yield-surface concept and thermal activation theory of dislocation. The equation which takes account of effects of strain-rate, strain history, strain-rate history, hardening and temperature has stronger physical basis.

Comparison of theoretical prediction with experimental results of mechanical behaviours of Ti under conditions of uniaxial stress and room temperature shows good consistency.