应用数学和力学，第10卷第4期(1989年4月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

奇异摄动问题的一类变分差分格式*

林　平

(南京大学，1987年12月14日收到)

摘　要

本文讨论了奇异摄动二阶自伴常微分方程边值问题，采用有限元方法构造了一类变分差分格式，在对系数的光滑性假定很弱的情况下证明了一致收敛性．这类格式包括了[1]，[3]，[4]和[5]中讨论的格式．

一、引　言

我们考虑二阶自伴常微分方程边值问题：

$$\varepsilon y''-b(x,\varepsilon)y=f(x,\varepsilon)\qquad 0<x<1,\ \varepsilon\in(0,1]\tag{1.1a}$$

$$y(0)=\alpha_0,\ y(1)=\alpha_1\tag{1.1b}$$

其中函数$b(x,\varepsilon)$，$f(x,\varepsilon)$在区域$D=\{(x,\varepsilon)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0\}$上连续且有界，$b(x,\varepsilon)\geqslant\delta>0$。可以看到这里对系数光滑性的要求很低。为方便起见，我们还假定$\alpha_0=\alpha_1=0$。

许多作者研究了这个问题。Hegarty et al.[1]利用El-Mistikawy和Werle[2]的思想构造了一个二阶一致收敛差分格式。Niijima[3],[4],[5]则利用Liouville-Green变换构造出一阶一致收敛、二阶一致收敛和三阶一致收敛差分格式。可以看到，两者的构造思想本质上是一样的。都是先生成一个近似方程，然后在第i个和第$i-1$个子区间上精确求解近似方程，根据近似方程解的导数在第i个网格点x_i处连续，得到差分方程的第i个等式。本文用有限元方法构造一类差分格式，其中包括了[1]，[3]，[4]，[5]中讨论的格式。并对该类差分格式给出一致收敛估计。

二、差分格式的建立

设N是一个正整数，$h=1/N$为网格步长，网格点(在[0,1]中)$x_i=ih$，$i=0,1,\cdots,N$。在每一子区间(x_i,x_{i+1})上取充分光滑的函数$B_i(x,\varepsilon)$，$F_i(x,\varepsilon)$满足

$$|B_i(x,\varepsilon)-b(x,\varepsilon)|\leqslant Ch^p,\quad |F_i(x,\varepsilon)-b(x,\varepsilon)|\leqslant Ch^p\tag{2.1}$$

记　$B(x,\varepsilon)=B_i(x,\varepsilon)$，$F(x,\varepsilon)=F_i(x,\varepsilon)$，　$x\in(x_i,x_{i+1})$，$i=0,1,\cdots,N-1$

* 苏煜城推荐．

则可得问题（1.1）的近似方程如下：

$$\varepsilon Y''-B(x,\varepsilon)Y=F(x,\varepsilon) \tag{2.2a}$$

$$Y(0)=0,\ Y(1)=0 \tag{2.2b}$$

现在我们按照[6]（也见[7]）的思想构造问题（2.2）的变分差分格式。

试验函数 Φ_i $(i=1,\cdots,N-1)$，取为

$$\Phi_i(x)=\begin{cases}\varphi^{\mathrm{I}}_{i-1}(x) & x\in(x_{i-1},x_i]\\ \varphi^{\mathrm{I}}_i(x) & x\in(x_i,x_{i+1})\\ 0 & x\in[0,1]\setminus(x_{i-1},x_{i+1})\end{cases}$$

其中 $\varphi^{\mathrm{I}}_i(x)$，$\varphi^{\mathrm{II}}_i(x)$ 分别满足如下问题：

$$\varepsilon\varphi''-B(x,\varepsilon)\varphi=0,\ \varphi(x_i)=1,\ \varphi(x_{i+1})=0,\qquad x\in(x_i,x_{i+1}) \tag{2.3}$$

$$\varepsilon\varphi''-B(x,\varepsilon)\varphi=0,\ \varphi(x_i)=0,\ \varphi(x_{i+1})=1,\qquad x\in(x_i,x_{i+1}) \tag{2.4}$$

设 $\{\Phi_i\}$ 为基本函数，试验函数空间 $T^h=\mathrm{span}\{\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_{N-1}\}$，在 T^h 中，对 $Y(x)$ 的有限元近似解取为

$$Y^h(x)=\sum_{i=1}^{N-1}Y_i^h\Phi_i(x)\qquad x\in[0,1]$$

于是，得到一类变分差分格式如下

$$Y^h_{i-1}a(\Phi_{i-1},\Phi_i)+Y^h_ia(\Phi_i,\Phi_i)+Y^h_{i+1}a(\Phi_{i+1},\Phi_i)=-(F,\Phi_i)$$
$$(i=1,2,\cdots,N-1) \tag{2.5a}$$

$$Y^h_0=Y^h_N=0 \tag{2.5b}$$

其中
$$a(\Phi_k,\Phi_i)=\int_0^1(\varepsilon\Phi'_k\Phi'_i+B\Phi_k\Phi_i)dx\qquad(k=i-1,i,i+1)$$

$$(F,\Phi_i)=\int_0^1F\Phi_idx$$

对 $B(x,\varepsilon)$ 和 $F(x,\varepsilon)$ 作不同的选择可得到不同的格式。

三、一致收敛估计

我们首先引入一个函数类 $Q^k_\tau[0,1]$，这里 k 是一个自然数，$\tau=\{0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_{N-1}<1\}$ 是 $N-1$ 个结点 τ_i $(i=1,\cdots,N-1)$ 的集合。我们说 $v(x)\in Q^k_\tau[0,1]$，是指 $v(x)$ 及其直到 k 阶的导数分段连续且在 τ_i，$i=1,\cdots,N-1$，具有第一类不连续点。

为估计近似解的收敛性，我们将给出四个引理。

引理1（[6]，引理2） 如果系数 $b(x,\varepsilon)$，$f(x,\varepsilon)\in Q^k_\tau[0,1]$，$k\geqslant0$，那么

a. 存在唯一解 $y(x)\in Q^{k+2}_\tau[0,1]$，且 $y(x)\in C[0,1]$；

b. 下列不等式成立：

$$\max_{0\leqslant x\leqslant1}|y(x)|\leqslant\max(|y(0)|,|y(1)|)+\delta^{-1}\sup_{0<x<1}|f(x,\varepsilon)| \tag{3.1}$$

引理2（[6]，引理3） 如果函数 $b(x,\varepsilon)$，$f(x,\varepsilon)$，$B(x,\varepsilon)$，$F(x,\varepsilon)\in Q^k_\tau[0,1]$ $(k\geqslant0)$，且记 $z(x)=y(x)-Y(x)$，这里 $y(x)$ 是问题(1.1)的解，$Y(x)$ 是问题(2.2)的解，那么估计式

$$\max_{0\le x\le 1}|z(x)|\leqslant C\Big(\sup_{0<x<1}|b(x,\varepsilon)-B(x,\varepsilon)|+\sup_{0<x<1}|f(x,\varepsilon)-F(x,\varepsilon)|\Big)$$

成立，其中 C 是不依赖于 ε 的正数。

引理 3 差分方程(2.5)的系数矩阵是正定矩阵。

证 设 A^h 为系数矩阵，则有

$$(A^h y^h, y^h)=a(y,y)$$

其中 $y^h=(y_i^h)_{i=1}^{N-1},\ y=\sum_{i=1}^{N-1}y_i^h\Phi_i$

由 $a(y,y)=\int_0^1(\varepsilon y'^2+By^2)\,dx>0$

可知引理成立。 证毕

引理 4 设 Y_i^h 是问题(2.5)的解。如果 $Y(x)\in C^1[0,1]$，那么 $Y(x_i)=Y_i^h$ $(i=0,1,\cdots,N)$。

证 我们先验证下面的等式：

$$\begin{aligned}&Y(x_{i-1})a(\Phi_{i-1},\Phi_i)+Y(x_i)a(\Phi_i,\Phi_i)+Y(x_{i+1})a(\Phi_{i+1},\Phi_i)\\&\quad=-(F,\Phi_i)\qquad(i=1,2,\cdots,N-1)\end{aligned}\tag{3.2}$$

应用分部积分公式和(2.3)，(2.4)，我们得到

$$a(\Phi_{i-1},\Phi_i)=\varepsilon\Phi_{i-1}\Phi_i'\Big|_{x_{i-1}}^{x_i}=-\varepsilon\varphi_{i-1}^{\mathrm{I}\,\prime}(x_{i-1})$$

$$a(\Phi_i,\Phi_i)=\varepsilon\Phi_i\Phi_i'\Big|_{x_{i-1}}^{x_i}+\varepsilon\Phi_i\Phi_i'\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}=\varepsilon\varphi_{i-1}^{\mathrm{I}\,\prime}(x_i)-\varepsilon\varphi_i^{\mathrm{I}\,\prime}(x_i)$$

$$a(\Phi_{i+1},\Phi_i)=\varepsilon\Phi_{i+1}\Phi_i'\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}=\varepsilon\varphi_i^{\mathrm{I}\,\prime}(x_{i+1})$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}-(F,\Phi_i)&=-(\varepsilon Y''-BY,\ \Phi_i)=-\int_{x_{i-1}}^{x_i}(\varepsilon\varphi_{i-1}^{\mathrm{I}\,\prime\prime}-B_{i-1}\varphi_{i-1}^{\mathrm{I}})Y\,dx\\&-\varepsilon\varphi_{i-1}^{\mathrm{I}}Y'\Big|_{x_{i-1}}^{x_i}+\varepsilon\varphi_{i-1}^{\mathrm{I}\,\prime}Y\Big|_{x_{i-1}}^{x_i}-\int_{x_i}^{x_{i+1}}(\varepsilon\varphi_i^{\mathrm{I}\,\prime\prime}-B_i\varphi_i^{\mathrm{I}})Y\,dx-\varepsilon\varphi_i^{\mathrm{I}}Y'\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}\\&+\varepsilon\varphi_i^{\mathrm{I}\,\prime}Y\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}=-\varepsilon\varphi_{i-1}^{\mathrm{I}\,\prime}(x_{i-1})Y(x_{i-1})+(\varepsilon\varphi_{i-1}^{\mathrm{I}\,\prime}(x_i)-\varepsilon\varphi_i^{\mathrm{I}\,\prime}(x_i))Y(x_i)\\&+\varepsilon\varphi_i^{\mathrm{I}\,\prime}(x_{i+1})Y(x_{i+1})\end{aligned}$$

可见，等式(3.2)成立。

将(3.2)，(2.2b)与(2.5)相减，得

$$z_{i-1}a(\Phi_{i-1},\Phi_i)+z_ia(\Phi_i,\Phi_i)+z_{i+1}a(\Phi_{i+1},\Phi_i)=0\qquad(i=1,2,\cdots,N-1)$$

$$z_0=z_N=0$$

其中 $z_i=Y(x_i)-Y_i^h$ $(i=0,1,\cdots,N)$。由引理 3 立刻有 $z_i=0$ $(i=0,1,\cdots,N)$。从而引理成立。 证毕。

现在可以来证明一致收敛性定理。

定理 1 如果 $Y(x)\in C^1[0,1]$，那么问题(2.5)的解 Y_i^h $(i=0,1,\cdots,N)$，p 阶一致收敛于问题(1.1)的解 $y(x)$，即

$$|Y_i^h - y(x_i)| \leqslant Ch^p \qquad (i=0,1,\cdots,N)$$

这里 C 是与 ε 和 h 无关的正数。

证 问题(2.2)与(1.1)相减，得

$$\varepsilon z'' - b(x,\varepsilon)z = (b(x,\varepsilon) - B(x,\varepsilon))Y + (f(x,\varepsilon) - F(x,\varepsilon))$$

$$z(0)=0,\ z(1)=0$$

其中，$z(x)=y(x)-Y(x)$。由引理 1，我们获得

和 $$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} |z(x)| \leqslant \delta^{-1} \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} (|b-B||Y| + |f-F|)$$

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} |Y(x)| \leqslant C \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |F(x,\varepsilon)| \leqslant C$$

于是，注意到不等式(2.1)，可知估计式

$$|y(x) - Y(x)| \leqslant Ch^p \tag{3.3}$$

成立。从而由引理 4，可得

$$|y(x_i) - Y_i^h| = |y(x_i) - Y(x_i)| \leqslant Ch^p \qquad (i=0,1,\cdots,N)$$

这就是所要证的结果。 证毕。

四、几 个 特 例

我们首先证明下面的引理。

引理 5 如果 $B(x,\varepsilon)$ 和 $F(x,\varepsilon)$ 是分段常数，那么 $Y(x)\in C^1[0,1]$。

证 考虑下面的问题

$$LY \equiv \varepsilon Y'' - B(x,\varepsilon)Y = F(x,\varepsilon), \quad x_{j-1} < x < x_{j+1} \tag{4.1a}$$

$$Y(x_{j-1}) = Y_{j-1},\ Y(x_{j+1}) = Y_{j+1} \tag{4.1b}$$

其中 Y_{j-1}，Y_{j+1} 认为已知。对任何给定的 Y_j，满足边界条件 $Y(x_{j-1})=Y_{j-1}$，$Y(x_j)=Y_j$ 的方程(4.1a) $LY=F$ (x_{j-1},x_j) 存在唯一解 $\bar{Y}_1(x), x\in(x_{i-1},x_i)$；满足边界条件 $Y(x_j)=Y_j$，$Y(x_{j+1})=Y_{j+1}$ 的方程(4.1a) $LY=F(x_i,x_{j+1})$ 存在唯一解 $\bar{Y}_2(x), x\in(x_i,x_{i+1})$。事实上，我们可以解出

$$\bar{Y}_1(x) = K_{11}\exp[\sqrt{B_{i-1}/\varepsilon}\,x] + K_{12}\exp[-\sqrt{B_{i-1}/\varepsilon}\,x] - F_{i-1}/B_{i-1}$$

以及

$$\bar{Y}_2(x) = K_{21}\exp[\sqrt{B_i/\varepsilon}\,x] + K_{22}\exp[-\sqrt{B_i/\varepsilon}\,x] - F_i/B_i$$

其中 $$K_{11} = \frac{1}{\Delta_{i-1}}\left[\left(Y_{i-1} + \frac{F_{i-1}}{B_{i-1}}\right)\exp\left[-\sqrt{\frac{B_{i-1}}{\varepsilon}}x_i\right] - \left(Y_i + \frac{F_{i-1}}{B_{i-1}}\right)\exp\left[-\sqrt{\frac{B_{i-1}}{\varepsilon}}x_{i-1}\right]\right]$$

$$K_{12} = \frac{1}{\Delta_{i-1}}\left[\left(Y_i + \frac{F_{i-1}}{B_{i-1}}\right)\exp\left[\sqrt{\frac{B_{i-1}}{\varepsilon}}x_{i-1}\right] - \left(Y_{i-1} + \frac{F_{i-1}}{B_{i-1}}\right)\exp\left[\sqrt{\frac{B_{i-1}}{\varepsilon}}x_i\right]\right]$$

$$K_{21} = \frac{1}{\Delta_i}\left[\left(Y_i + \frac{F_i}{B_i}\right)\exp\left[-\sqrt{\frac{B_i}{\varepsilon}}x_{i+1}\right] - \left(Y_{i+1} + \frac{F_i}{B_i}\right)\exp\left[-\sqrt{\frac{B_i}{\varepsilon}}x_i\right]\right]$$

$$K_{22} = \frac{1}{\Delta_i}\left[\left(Y_{i+1} + \frac{F_i}{B_i}\right)\exp\left[\sqrt{\frac{B_i}{\varepsilon}}x_i\right] - \left(Y_i + \frac{F_i}{B_i}\right)\exp\left[\sqrt{\frac{B_i}{\varepsilon}}x_{i+1}\right]\right]$$

$$\Delta_i = -2\sinh(\sqrt{B_i/\varepsilon}\,h),\quad \Delta_{i-1} = -2\sinh(\sqrt{B_{i-1}/\varepsilon}\,h)$$

从而可唯一选择 Y_j 使等式

$$\bar{Y}_1'(x_j)=\bar{Y}_2'(x_j) \tag{4.2}$$

成立。这是因为，从(4.2)我们可以得到一个关于 Y_j 的线性方程，该线性方程的系数为

$$-\sqrt{B_i/\varepsilon}\coth(\sqrt{B_i/\varepsilon}h)-\sqrt{B_{i-1}/\varepsilon}\coth(\sqrt{B_{i-1}/\varepsilon}h)\neq 0$$

因此我们知问题(4.1)的解 $Y(x)\in C^1(x_{j-1},x_{j+1})$。$j$ 从 1 取到 $N-1$。由解的唯一性(引理1)知引理的结论成立。 证毕。

现在我们给出函数 $B(x,\varepsilon)$，$F(x,\varepsilon)$ 的几种特殊的选取。

(a) 取 $B_i(x,\varepsilon)=b(x_i,\varepsilon)$，$F_i(x,\varepsilon)=f(x_i,\varepsilon)$，这是[3]和[6]讨论过的情况。按照引理 5 和定理 1，容易看到收敛阶数 $p=1$。由简单的计算得

$$a(\Phi_{i-1},\Phi_i)=-\varepsilon\sqrt{b(x_{i-1},\varepsilon)/\varepsilon}/\sinh(h\sqrt{b(x_{i-1},\varepsilon)/\varepsilon})$$

$$a(\Phi_i,\Phi_i)=\varepsilon\sqrt{b(x_{i-1},\varepsilon)/\varepsilon}\coth(h\sqrt{b(x_{i-1},\varepsilon)/\varepsilon})+\varepsilon\sqrt{b(x_i,\varepsilon)/\varepsilon}\coth(h\sqrt{b(x_i,\varepsilon)/\varepsilon})$$

$$a(\Phi_{i+1},\Phi_i)=-\varepsilon\sqrt{b(x_i,\varepsilon)/\varepsilon}/\sinh(h\sqrt{b(x_i,\varepsilon)/\varepsilon})$$

所以(2.5)的左端系数与[3]中构造的格式的左端系数相同，又(2.5)的解与[3]中格式的解相等，因为它们都等于近似问题(2.2)的解。所以这两个格式的右端也相等，从而两个差分格式是一样的，即[3]中的格式属于我们的格式类。容易看到，这儿收敛性的证明较[3]简单得多。

(b) 取 $B_i(x,\varepsilon)=1\Big/\left(\beta_i\dfrac{x-x_i}{h}+\alpha_i\right)^4$

$$F_i(x,\varepsilon)=\left\{\alpha_{i+1}(\alpha_{i+1}^3f_{i+1}-\alpha_i^3f_i)\frac{x-x_i}{\beta_i(x-x_i)+\alpha_ih}+\alpha_i^3f_i\right\}$$

其中，$\beta_i=\alpha_{i+1}-\alpha_i$，$\alpha_i=1/\sqrt[4]{b(x_i,\varepsilon)}$。这时问题(2.2)即[4]中的近似问题。由[4]中的结果及定理 1，我们可以看出一致收敛阶数 $p=2$。计算可得

$$a(\Phi_{i-1},\Phi_i)=\varepsilon\sigma_{i-1}/\sinh(\sigma_{i-1})$$

$$a(\Phi_i,\Phi_i)=-\varepsilon\left\{\frac{\rho}{\alpha_i^2}(\coth(\sigma_{i-1})+\coth(\sigma_i))\frac{\alpha_{i+1}-2\alpha_i+\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right\}$$

$$a(\Phi_{i+1},\Phi_i)=\varepsilon\sigma_i/\sinh(\sigma_i)$$

这里，$\sigma_i=h/(\alpha_i\alpha_{i+1}\sqrt{\varepsilon})$，$\rho=h/\sqrt{\varepsilon}$。按照与(a)相同的讨论可知，[4]中讨论的格式属于我们的格式类。

(c) 取 $B_i(x,\varepsilon)=1/(a_i(x-x_{i+1})^2+\beta_i(x-x_{i+\frac{1}{2}})+\gamma_i)^2$

$$F_i(x,\varepsilon)=B_i(x,\varepsilon)^{3/4}\{p_i(\varphi(x)-\varphi(x_{i+\frac{1}{2}}))^2+q_i(\varphi(x)-\varphi(x_{i+\frac{1}{2}}))+r_i\}$$

这儿，α_i，β_i，γ_i 分别表示 $\alpha_i=2(d_i-2d_{i+\frac{1}{2}}+d_{i+1})/h^2$，$\beta_i=(\alpha_{i+1}-\alpha_i)/h$ 及 $\gamma_i=d_{i+\frac{1}{2}}$，其中 $d_i=1/\sqrt{b(x_i,\varepsilon)}$ 和 $x_{i+\frac{1}{2}}=x_i+h/2$。并且 $\varphi(x)$ 由

$$\varphi(x)=\varphi(x_{i+\frac{1}{2}})+\int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_i}\sqrt{B(t,\varepsilon)}\,dt$$

定义，$x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$，$p_i$，$q_i$ 和 r_i 分别为

$$p_i=\frac{(g_{i+1}-g_{i+\frac{1}{2}})k_1^{(i)}+g_{i+\frac{1}{2}}-g_i)k_2^{(i)}}{k_1^{(i)}k_2^{(i)}(k_2^{(i)}-k_1^{(i)})}$$

$$q_i=-\frac{(g_{i+1}-g_{i+\frac{1}{2}})k_1^{(i)2}+(g_{i+\frac{1}{2}}-g_i)k_2^{(i)2}}{k_1^{(i)}k_2^{(i)}(k_2^{(i)}-k_1^{(i)})}$$

及 $$r_i=g_{i+\frac{1}{2}}$$

其中 $g_i=b(x_i,\varepsilon)^{-3/4}f(x_i,\varepsilon)$，$k_1^{(i)}=\varphi(x_i)-\varphi(x_{i+\frac{1}{2}})$ 和 $k_2^{(i)}=\varphi(x_{i+1})-\varphi(x_{i+\frac{1}{2}})$

由类似的讨论可知这时的格式(2.5)与[5]中讨论的格式相同，且一致收敛阶数 $p=3$。

(d) 取 $B(x,\varepsilon)$ 同 (b)，$F(x,\varepsilon)=f(x,\varepsilon)$。这时我们仍然有 $p=2$。不难验证，此情形下(2.5a)的左端系数与(b)相同，右端较(b)简单。而当积分

$$\int_0^1 f(x,\varepsilon)\Phi_i(x)dx$$

不能精确求出时，可采用数值积分公式。

(e) 取 $B_i(x,\varepsilon)=(b(x_i,\varepsilon)+b(x_{i+1},\varepsilon))/2$，$F_i(x,\varepsilon)=(f(x_i,\varepsilon)+f(x_{i+1},\varepsilon))/2$。这时的近似问题(2.2)与[1]相同。我们有

$$a(\Phi_{i-1},\Phi_i)=-\varepsilon\sqrt{B_{i-1}(x,\varepsilon)}/\sinh(\sqrt{B_{i-1}(x,\varepsilon)}\,h)$$

$$a(\Phi_i,\Phi_i)=\varepsilon[\sqrt{B_{i-1}(x,\varepsilon)}\coth(\sqrt{B_{i-1}(x,\varepsilon)}\,h)+\sqrt{B_i(x,\varepsilon)}\coth(\sqrt{B_i(x,\varepsilon)}\,h)]$$

$$a(\Phi_{i+1},\Phi_i)=-\varepsilon\sqrt{B_i(x,\varepsilon)}/\sinh(\sqrt{B_i(x,\varepsilon)}\,h)$$

与(a)的讨论类似，可得这时的(2.5)与[1]中讨论的格式相同。由引理5和定理1，得 $p=1$。但经过更为仔细的推导，可以证明该格式是二阶 ($O(h^2)$) 一致收敛 (见[1]或[8])。与(b)相比，该格式要大大简单于(b)，而具有相同的一致收敛阶数。

最后，谨在此感谢两位导师苏煜城教授、吴启光副教授的指导与帮助。

参 考 文 献

[1] Hegarty, A.F., J.J.H. Miller and E. O'Riordan, Uniform second order difference schemes for singular perturbation problems, *Boundary and Interior Layers——Computational and Asymptotic Methods* (J. J. H. Miller ed.), Boole Press, Dublin (1980), 301—305.

[2] El-Mistikawy, T.M. and M.J. Werle, Numerical method for boundary layers with blowing——The exponential box scheme, *AIAA J.*, 16 (1978), 749—751.

[3] Niijima, K., An error analysis of some difference method for a singular perturbation problem, *Mem. Numer. Math.*, 8-9 (1981/1982), 1—19.

[4] Niijima, K., On a three-point difference scheme for a singular perturbation problem without a first derivative term, Ⅰ, *Mem. Numer. Math.*, 7 (1980), 1—10.

[5] Niijima, K., On a three-point difference scheme for a singular perturbation problem without a first derivative term, Ⅱ, *Mem. Numer. Math.*, 7 (1980), 11—27.

[6] Boglaev, I.P., A variational difference scheme for a boundary value problem with a small parameter in the highest derivative, *U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys.*, 21, 4 (1981), 71—81.

[7] 林平，一些奇异摄动问题的数值解，南京大学数学系硕士论文，南京 (1987).

[8] 林平，自伴常微分方程奇异摄动边值问题的二阶一致收敛差分格式，南京大学学报数学半年刊 (待发表).

A Class of Variational Difference Schemes for a Singular Perturbation Problem

Lin Ping

(*Nanjing University, Nanjing*)

Abstract

In this paper, a singularly perturbed boundary value problem for second order self-adjoint ordinary differential equation is discussed. A class of variational difference schemes is constructed by the finite element method. Uniform convergence about small parameter is proved under a weaker smooth condition with respect to the coefficients of the equation. The schemes studied in refs. [1,3,4] and [5] belong to the class.