应用数学和力学，第10卷第3期（1989年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

缓变深度分层流体中的准周期波和准孤立波*

朱　勇　戴世强

（上海市应用数学和力学研究所，1987年12月23日收到）

摘　要

本文讨论具缓变深度二流体系统中的非线性波，该系统由一不规则底部与一水平固壁间的两层常密度无粘流体所组成。文中用约化摄动法导出了所考虑模型的变系数Korteweg-de Vries方程，并用多重尺度法求出了该方程的近似解，发现底部固壁的不规则变化将产生所谓准周期波和准孤立波，它们的周期、波速和波形将发生缓慢变化，文中给出了准周期波的周期随深度的变化关系式以及准孤立波波幅、波速随深度的变化关系式，底部水平情形和单层流体情形可看成是本文的特例。

一、引　言

近年来人们对内波的研究越来越重视[1][2][3]，有些作者研究了两水平固壁间两层流体界面上的内波，其中戴世强[4]对这种情况用约化摄动方法作了系统的讨论。在实际情况中，深度可能随流动方向有所变化，如海洋底部往往是不规则变化的。单层流体的深度变化对表面波的影响问题已有人作了研究[5][6]。本文讨论分层流体中深度变化对界面内波的影响，模型是由一缓变不规则底部、一水平上壁及两层常密度无粘流体所组成，文中建立了该模型的基本方程，用约化摄动方法[7]导出了变系数KdV方程，并用多重尺度法求出了近似解：求出了非线性准周期波的周期随深度的变化规律及准孤立波波幅、波速随深度变化的关系式，并以此来解释在海洋中观测到的一些现象[10][11]。

二、基 本 方 程

考虑两层不可溶混的不可压无粘流体的无旋流动，流体限制在两固壁间，其中上壁水平、下壁沿 x 向缓慢变化，如图1所示。

引进小参数 $\varepsilon=O(a/h_2)(0<\varepsilon\ll1)$，其中 a 为波幅，上、下层速度势分别为 φ_2，φ_1，假定分界面方程为 $z=\zeta(x,t)$，取特征长度为 h_2，特征速度为 $\sqrt{gh_2}$，特征时间为 $\sqrt{h_2/g}$，记 $r=h_1/h_2$，而且

$$r=r_0+F(\varepsilon^{3/2}x) \tag{2.1}$$

* 国家自然科学基金资助的课题。

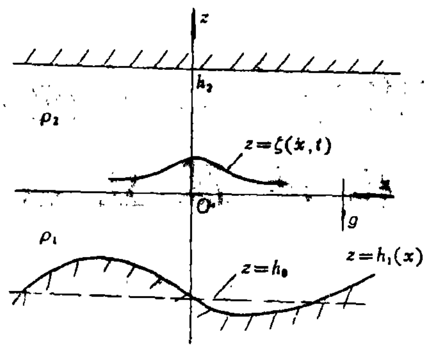

图　1

其中F为可微函数，且$F(0)=0$

假定该系统是静稳定的，即$\sigma=\rho_2/\rho_1<1$，而且流体在无穷远处静止，在此仅考虑二维的情况。

将方程无量纲化后保持原来记号，我们得到下列方程：

$$\varphi_{1,xx}+\varphi_{1,zz}=0 \qquad (-r<z<\zeta) \tag{2.2}$$

$$\varphi_{2,xx}+\varphi_{2,zz}=0 \qquad (\zeta<z<1) \tag{2.3}$$

壁面边界条件为

$$\varphi_{1,z}=-r_x\varphi_{1,x} \qquad (z=-r) \tag{2.4}$$

$$\varphi_{2,z}=0 \qquad (z=1) \tag{2.5}$$

界面条件为

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_{1,z}=\zeta_t+\varphi_{1,x}\zeta_x,\quad \varphi_{2,z}=\zeta_t+\varphi_{2,x}\zeta_x \\ &\left\{\varphi_{1,t}+\frac{1}{2}(\varphi_{1,x}^2+\varphi_{1,z}^2)+\zeta\right\} \\ &\qquad -\sigma\left\{\varphi_{2,t}+\frac{1}{2}(\varphi_{2,x}^2+\varphi_{2,z}^2)+\zeta\right\}=0 \end{aligned}\right\} z=\zeta \tag{2.6}$$

设(2.2)、(2.4)的解和(2.3)、(2.5)的解分别为

$$\varphi_1=\sum_{n=0}^{\infty}(z+r)^n\Phi_n \tag{2.7}$$

$$\varphi_2=\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n\Psi_n \tag{2.8}$$

代入对应的方程后求得

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_1=-r_x\Phi_{0,x}/(1+r_x^2) \\ &\Phi_{n+2}=-[\Phi_{n,xx}+(n+1)(r_x\Phi_{n+1})_x+(n+1)r_x\Phi_{n+1,x}] \\ &\qquad \cdot[(n+1)(n+2)(1+r_x^2)]^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_{2n}=\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{\partial^{2n}\Psi_0}{\partial x^{2n}} \\ &\Psi_{2n+1}=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

其中$n=0$，1，…。

将(2.9)、(2.10)式代入(2.5)式，并令$\Phi_{0,z}=W_1$，$\Psi_{0,z}=W_2$，整理后可得下列基本方程组

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\left\{W_1+\sum_{n=1}^{\infty}[n(z+r)^{n-1}r_z\Phi_n+(z+r)^n\Phi_{n,z}]\right\}-\sum_{n=1}^{\infty}n(z+r)^{n-1}\Phi_n=0 \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\left\{W_2+\sum_{n=1}^{\infty}(z-1)^n\Psi_{n,z}\right\}-\sum_{n=1}^{\infty}n(z-1)^{n-1}\Psi_n=0 \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial t}+\Sigma_1+\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta+\frac{1}{2}W_1^2+\frac{1}{2}\Sigma_2\right)-\sigma\left[\frac{\partial W_2}{\partial t}+\Sigma_3+\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta+\frac{1}{2}W_2^2+\frac{1}{2}\Sigma_4\right)\right]=0 \tag{2.13}$$

其中

$$\Sigma_1=\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{n=1}^{\infty}n(z+r)^{n-1}r_z\Phi_n+(z+r)^n\Phi_{n,z}\right]$$

$$\Sigma_2=\left[\sum_{n=1}^{\infty}n(z+r)^{n-1}r_z\Phi_n+(z+r)^n\Phi_{n,z}\right]^2+2W_1\left[\sum_{n=1}^{\infty}n(z+r)^{n-1}\cdot r_z\Phi_n+(z+r)^n\Phi_{n,z}\right]+\left[\sum_{n=1}^{\infty}n(z+r)^{n-1}\Phi_n\right]^2$$

$$\Sigma_3=\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(z-1)^n\Psi_{n,z}\right]$$

$$\Sigma_4=\left[\sum_{n=1}^{\infty}(z-1)^n\Psi_{n,z}\right]^2+2W_2\left[\sum_{n=1}^{\infty}(z-1)^n\Psi_{n,z}\right]+\left[\sum_{n=1}^{\infty}n(z-1)^{n-1}\Psi_n\right]^2$$

在线性化近似下，(2.11)、(2.12)、(2.13)式变成

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\zeta}{\partial t}+r_0\frac{\partial W_1}{\partial x}=0\\&\frac{\partial\zeta}{\partial t}-\frac{\partial W_2}{\partial x}=0\\&\frac{\partial W_1}{\partial t}-\sigma\frac{\partial W_2}{\partial t}+(1-\sigma)\frac{\partial\zeta}{\partial t}=0\end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

可求得线性重力波的的波速为c_0，其中

$$c_0=\sqrt{\frac{(1-\sigma)r_0}{1+\sigma r_0}} \tag{2.15}$$

三、缓变KdV方程

假定$U_r=A\lambda^2/h_2=O(1)$，其中λ为波长，并采用Boussinesq浅水波假设，作变换

$$\xi=\varepsilon^{1/2}\left(\int\frac{dx}{c(x)}-t\right),\quad X=\varepsilon^{3/2}x \tag{3.1}$$

其中

$$c(x)=\sqrt{\frac{(1-\sigma)r}{1+\sigma r}} \tag{3.2}$$

则有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}&=-\varepsilon^{1/2}\frac{\partial}{\partial\xi}\\ \frac{\partial}{\partial x}&=\frac{1}{c}\varepsilon^{1/2}\frac{\partial}{\partial\xi}+\varepsilon^{3/2}\frac{\partial}{\partial X}\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

令列向量

$$U(\xi,X)=(\zeta,\ W_1,\ W_2)^T \tag{3.4}$$

将U按ε的幂次展开

$$\begin{aligned}U&=\varepsilon U^{(1)}+\varepsilon^2U^{(2)}+\cdots\\ &=\varepsilon(\zeta^{(1)},W_1^{(1)},W_2^{(1)})^T+\varepsilon^2(\zeta^{(2)},W_1^{(2)},W_2^{(2)})^T+\cdots\end{aligned} \tag{3.5}$$

将(3.3)、(3.5)式代入(2.11)、(2.12)、(2.13)式，整理后取到$O(\varepsilon^{3/2})$，得到

$$M_0\frac{\partial U^{(1)}}{\partial\xi}=0 \tag{3.6}$$

其中

$$M_0=\begin{pmatrix}-c & 0 & -1\\ -c & r & 0\\ 1-\sigma & -c & \sigma c\end{pmatrix} \tag{3.7}$$

可求得M_0的左、右本征矢分别为

$$L=\left(1,\ \frac{1}{r\sigma},\ \frac{1}{\sigma c}\right) \tag{3.8}$$

$$R=\left(1,\ \frac{c}{r},\ -c\right)^T \tag{3.9}$$

(3.6)式的解为

$$U^{(1)}=\zeta^{(1)}(\xi,X)R \tag{3.10}$$

取到$O(\varepsilon^{5/2})$，并利用(3.9)、(3.10)式，可以得到：

$$\frac{1}{c}M_0\frac{\partial U^{(2)}}{\partial\xi}+S_1\frac{\partial\zeta^{(1)}}{\partial X}+S_2\zeta^{(1)}\frac{\partial\zeta^{(1)}}{\partial\xi}+S_3\frac{\partial^3\zeta^{(1)}}{\partial\xi^3}+S_4\zeta^{(1)}=0 \tag{3.11}$$

其中

$$S_1=\begin{pmatrix} c \\ c \\ 1-\sigma \end{pmatrix},\qquad S_2=\begin{pmatrix} -2 \\ \dfrac{2}{r} \\ c\left(\dfrac{1}{r^2}-\sigma\right) \end{pmatrix}$$

$$S_3=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{6c^2} \\ -\dfrac{r^2}{6c^2} \\ \dfrac{r+\sigma}{2c} \end{pmatrix},\qquad S_4=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial X} \\ \dfrac{\beta c}{r}+r\dfrac{\partial(c/r)}{\partial X} \\ 0 \end{pmatrix}$$

用左本征波L矢乘上式整理后可得

$$\frac{\partial\zeta^{(1)}}{\partial X}+\alpha_1\zeta^{(1)}\frac{\partial\zeta^{(1)}}{\partial\xi}+\alpha_2\frac{\partial^3\zeta^{(1)}}{\partial\xi^3}+\alpha_3\zeta^{(1)}=0 \tag{3.12}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1=\frac{3c(1-r^2\sigma)}{2(1-\sigma)r^2},\quad \alpha_2=\frac{r+\sigma}{6(1-\sigma)c} \\ &\alpha_3=\frac{c\left[r^2\sigma\dfrac{\partial c}{\partial X}+\beta c+r^2\dfrac{\partial(c/r)}{\partial X}\right]}{2(1-\sigma)r^2}\qquad(\beta=F'(X)) \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

作变换

$$\zeta^{(1)}=Q\exp\left[-\int\alpha_3 dX\right] \tag{3.14}$$

(3.12)式可化为

$$\frac{\partial Q}{\partial X}+n_1(X)Q\frac{\partial Q}{\partial\xi}+n_2(X)\frac{\partial^3 Q}{\partial\xi^3}=0 \tag{3.15}$$

其中 $$n_1=\alpha_1\exp\left[-\int\alpha_3 dX\right],\quad n_2=\alpha_2 \tag{3.16}$$

(3.15)式为变系数KdV方程。

四、准周期波和准孤立波

方程(3.15)在一般情况下无解析解，只能用数值方法求解，但当方程的系数缓慢变化时，有摄动解。假定系数n_1，n_2为X的缓变函数，即

$$n_1=n_1(\mu X),\quad n_2=n_2(\mu X) \tag{4.1}$$

其中μ是小量$0<\mu\ll 1$。

令$\tau=\mu X$，把Q作如下展开

$$Q(\theta,\tau)=Q_0(\theta,\tau)+\mu Q_1(\theta,\tau)+\cdots \tag{4.2}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\theta&=\xi-\int b(X)dX\\ b(X)&=b_0+\mu b_1+\cdots\end{aligned}\right\}\tag{4.3}$$

θ为正常变量，τ为慢变量。

将(4.2)式代入(3.15)式可得

$$-b_0Q_{0,\theta}+n_1Q_0Q_{0,\theta}+n_2Q_{0,\theta\theta\theta}=0\tag{4.4}$$

$$-b_0Q_{1,\theta}+n_1(Q_0Q_1)_\theta+n_2Q_{1,\theta\theta\theta}=-Q_{0,\tau}+b_1Q_{0,\theta}\tag{4.5}$$

由(4.4)式可求得[8][6]

$$Q_0=H\left[\left(\frac{1}{m}-1-\frac{E}{Km}\right)+C_n^2\left(\sqrt{\frac{n_1H}{12n_2m}}\theta\right)\right]\tag{4.6}$$

其中K，E分别是第一、二类完全椭圆积分，m为它们的模数，H为无量纲波高。

解(4.6)式的时间周期为

$$P==2K\sqrt{\frac{12n_2m}{n_1H}}\tag{4.7}$$

上式中含有两个慢变函数n_1，n_2，因此周期P也是缓慢变化的，因此(4.6)式为准周期解，b_0与m，H间有约束关系

$$b_0=\frac{n_1H}{3m}\left(2-m-\frac{3E}{K}\right)\tag{4.8}$$

方程(4.5)式的解为

$$Q_1=Q_{0,\theta}\int_0^\theta\left\{\frac{1}{n_2Q_{0,\theta}^2}\int_0^\theta\left[Q_{0,\theta}\int_0^\theta Q_{0,\tau}d\theta\right]d\theta\right\}d\theta\tag{4.9}$$

为了保证一阶解的周期与零阶解的周期相同，m，H的约束条件为

$$2\sqrt{\frac{12n_2H^3}{n_1m^3}}\left\{\frac{-1}{K}[E-(1-m)K]^2+\frac{2}{3}(2m-1)E\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}(1-m)(2-3m)K\right\}=\text{常数}\tag{4.10}$$

从而Q可表示为准周期解

$$Q=Q_0+\mu Q_1+\cdots\tag{4.11}$$

(4.6)式当$m\to0$时，为无限小振幅波解，当$m\to1$时为孤立波解

$$Q_0=a\,\mathrm{sech}^2l\theta\tag{4.12}$$

$$Q_1=Q_{0,\theta}\int_0^\theta\left\{\frac{1}{n_2Q_{0,\theta}^2}\int_0^\theta\left[Q_{0,\theta}\int_0^\theta Q_{0,\tau}d\theta\right]d\theta\right\}d\theta\tag{4.13}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}a&=\frac{3b_0}{n_1}\\ l&=\left(\frac{b_0}{4n_2}\right)^{1/2}\end{aligned}\right\}\tag{4.14}$$

把(4.13)式直接积分，然后乘以$Q_{0,\theta}$，再从$-\infty$到$+\infty$积分可得

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}Q_0^2d\theta=0$$

即
$$(a^2/l)_\tau=0 \tag{4.15}$$
再利用(4.14)式可得
$$a\propto\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{1/3} \tag{4.16}$$
注意到变换(3.14)式，上式可写成
$$\zeta^{(1)}\propto\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{1/3}\exp\left[-\int\alpha_3dX\right]=\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{1/3}\exp\left[-\frac{4}{3}\int\alpha_3dX\right] \tag{4.17}$$
上式表明了波幅随流体总深度而变化。

现求孤立波波速与波幅关系式。(4.12)可写成
$$Q_0=a\operatorname{sech}^2\left\{\sqrt{\frac{n_1a\varepsilon}{12n_2}}\left[\int\frac{dx}{c}-t-\int\frac{\varepsilon an_1}{3}dx\right]\right\} \tag{4.18}$$
进一步写成
$$\zeta^{(1)}=a'\operatorname{sech}^2\left\{\sqrt{\frac{n_1a'\varepsilon\exp\left[\int\alpha_3dX\right]}{12n_2}}\left[\int\left(\frac{1}{c}-\frac{\varepsilon an_1}{3}\right)dx-t\right]\right\} \tag{4.19}$$
由上式可得波速
$$c_1=c\Big/\left(1-\frac{ca'n_1\exp\left[\int\alpha_3dX\right]\varepsilon}{3}\right) \tag{4.20}$$
忽略$O(\varepsilon^2)$项可得
$$c_1=c+\frac{\varepsilon a'\alpha_1c^2}{3} \tag{4.21}$$

当$r=r_0$时，对应于两水平固壁间的情形。此时$\alpha_3=0$；n_1，n_2为常数，(4.7)式表示的周期P为常数，(4.11)式的周期解与文献[9]的结果一致；孤立波的波幅、波速关系式(4.17)、(4.21)变成
$$\zeta^{(1)}\propto\left[\frac{9(1-r_0^2\sigma)c_0^2}{r_0^2(r_0+\sigma)}\right]^{1/3} \tag{4.22}$$
$$c_1=c+\frac{\varepsilon a'(1-r_0^2\sigma)c_0}{2r_0(1+r_0\sigma)} \tag{4.23}$$
恢复到文献[4]的特征长度h_1，它们与文献[4]给出的结果一致。

当$\sigma=0$时，对应于单层流体的情形。孤立波波幅关系式、波速关系式为
$$\zeta^{(1)}\propto\frac{1}{r} \tag{4.24}$$
$$c_1=c+\frac{\varepsilon a}{2\sqrt{r}}=(r+\varepsilon a)^{1/2}+O(\varepsilon^2) \tag{4.25}$$
与文献[5]的结果相同；周期解(4.11)与文献[6]的结果相一致。

(4.17)、(4.21)式表明了在深度变化的情况下，孤立波波幅和波速有缓慢变化，这时的孤立波不是真正的永形波，我们可称它为准孤立波。采用周显初[6]描述的方法可以分析这种准孤立波的分裂，这里不予详述了。

有人通过卫星观测发现：在某些地区陆架的海洋中有运动着的准周期波存在[10][11]。从上面我们求得的非线性准周期波和准孤立波可推测：海洋中深度的变化是产生准周期波的原因之一。

参考文献

[1] Yih, C.-S., *Stratified flow*, Academic Press, New York (1980).

[2] Miles, J. W., Solitary waves, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **12** (1980), 11—43.

[3] Garrett, C. and W. Munk, Internal waves in the ocean, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **11** (1979), 339—369.

[4] 戴世强，两层流体界面上的孤立波，应用数学和力学，3，6 (1982)，721—731.

[5] 周显初，缓变的任意截面渠道中的孤立波，应用数学和力学，2 (1981)，397—406.

[6] 周显初，缓变任意截面渠道中的非线性周期波以及孤立波的分裂，中国科学，3，4 (1983)，238—246.

[7] 戴世强，约化摄动法和非线性波远场分析，力学进展，12 (1982)，2—23.

[8] 梅强中（戴世强、周显初整理），《水波动力学》，科学出版社 (1984).

[9] 刘宇陆，两层流体界面上的二阶椭圆余弦波，上海力学，3 (1987)，23—28.

[10] Apel, J. R., Satellite sensing of ocean surface dynamics, *Ann. Rev. Earth Planet Sci.*, **8** (1980), 302—342.

[11] Osborne, A. R. and T. L. Burch, Internal solitons in the Andaman sea, *Science*, **208** (1980), 451—460.

Quasi-Periodic Waves and Quasi-Solitary Waves in Stratified Fluid of Slowly Varying Depth

Zhu Yong Dai Shi-qiang

(*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai*)

Abstract

The nonlinear waves in a stratified fluid of slowly varying depth are investigated in this paper. The model considered here consists of a two-layer incompressible-constant-density inviscid fluid confined by a slightly uneven bottom and a horizontal rigid wall. The Korteweg-de Vries (KdV) equation with varying coefficients is derived with the aid of the reductive perturbation method. By using the method of multiple scales, the approximate solutions of this equation are obtained. It is found that the unevenness of bottom may lead to the generation of so-called quasi-periodic waves and quasi-solitary waves, whose periods, propagation velocities and wave profiles vary slowly. The relations of the period of quasi-periodic waves and of the amplitude, propagation velocity of quasi-solitary waves varying with the depth of fluid are also presented. The models with two horizontal rigid walls or single-layer fluid can be regarded as particular cases of those in this paper.