应用数学和力学，第10卷第3期（1989年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

常差分方程奇异摄动问题的渐近方法

吴启光　苏煜城　孙志忠

（南京大学，1987年9月17日收到）

摘　　要

在本文中，我们讨论如下差分方程问题 (P_ε)：

$$(L_\varepsilon y)_k \equiv \varepsilon y(k+1)+a(k,\varepsilon)y(k)+b(k,\varepsilon)y(k-1)=f(k,\varepsilon) \qquad (1\leqslant k\leqslant N-1)$$

$$B_1y\equiv -y(0)+c_1y(1)=\alpha,\ B_2y\equiv -c_2y(N-1)+y(N)=\beta$$

这里ε是一个小参数，c_1，c_2，α，β为常数，$a(k,\varepsilon)$，$b(k,\varepsilon)$，$f(k,\varepsilon)$($1\leqslant k\leqslant N$)是k和ε的函数．首先，我们讨论了常系数的情形；接着引进伸长变换对变系数的情形进行了讨论，给出了解的一致渐近展开式；最后给出了一个数值例子．

一、引　　言

在数字模拟、样本数据控制系统、计算机的自适应控制系统以及经济学、生物学等领域中许多问题常用带小参数的差分方程来描述[1～6]．因而研究差分方程奇异摄动问题解的渐近性质是一个重要的研究课题．

带小参数的差分方程和带小参数的微分方程有许多类似的性质．我们考虑如下差分方程问题

$$\varepsilon y(k+1)+ay(k)+by(k-1)=0 \qquad (1\leqslant k\leqslant N-1) \tag{1.1}$$

$$y(0)=\alpha, \qquad y(N)=\beta \tag{1.2}$$

其中ε为小参数，a，b，α，β为常数．我们可求得(1.1～1.2)的解为

$$y(k)=(\alpha\lambda_2^N-\beta)\lambda_1^k/(\lambda_2^N-\lambda_1^N)+(\beta-\alpha\lambda_1^N)\lambda_2^k/(\lambda_2^N-\lambda_1^N),$$

其中

$$\lambda_1=-a\{1-(1-4b\varepsilon/a^2)^{1/2}\}/(2\varepsilon),$$

$$\lambda_2=-a\{1+(1-4b\varepsilon/a^2)^{1/2}\}/(2\varepsilon).$$

当ε充分小时，我们有

$$y(k)=\alpha\left(-\frac{b}{a}\right)^k+\left\{\beta-\alpha\left(-\frac{b}{a}\right)^N\right\}\left(-\frac{1}{a}\right)^{N-k}\varepsilon^{N-k}+O(\varepsilon) \tag{1.3}$$

对$0\leqslant k\leqslant N$一致成立．在(1.1)中令$\varepsilon=0$，我们得到

$$ay^{(0)}(k)+by^{(0)}(k-1)=0 \qquad (1\leqslant k\leqslant N) \tag{1.4}$$

这个方程为一阶的，称为退化方程．取

$$y^{(0)}(0)=y(0), \tag{1.5}$$

我们得到(1.4～1.5)的解为

$$y^{(0)}(k)=a\left(-\frac{b}{a}\right)^k \qquad (0\leqslant k\leqslant N)$$

它为(1.3)右端的第一项。一般地，$y^{(0)}(N)\neq y(N)$。我们看出当 $\varepsilon\to 0$时，$y(k)\to y^{(0)}(k)$ ($k\neq N$)，即这个收敛性在$k=N$处是非一致的。我们称$k=N$这个点为边界层点。$y^{(0)}(k)$ 在边界层之外可以作为(1.1～1.2)的近似解，称之为外解；(1.3)中含ε^{N-k}的项和外解结合在一起满足失去的边界条件，称之为边界层校正解；当$y^{(0)}(N)\neq y(N)$ 时，称(1.1～1.2)为奇异摄动问题，(1.4～1.5)为它的退化问题，(1.3)的右端为解的（零阶）渐近展开式。

C. Comstock和G. C. Hsiao(1976)[7]研究了齐次差分方程问题

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon y(k+1)+a(k)y(k)+b(k)y(k-1)=0 \qquad (1\leqslant k\leqslant N-1)\\&y(0)=\alpha, \qquad y(N)=\beta\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

证明了当ε充分小时，有

$$y(k)=y^{(0)}(k)+\varepsilon^{N-k}w^{(0)}(k)+O(\varepsilon)$$

对$0\leqslant k\leqslant N$一致成立。其中$y^{(0)}(k)$为(1.6)的退化问题

$$a(k)y^{(0)}(k)+b(k)y^{(0)}(k-1)=0 \qquad (1\leqslant k\leqslant N)$$
$$y^{(0)}(0)=\alpha$$

的解；$w^{(0)}(k)$为

$$w^{(0)}(k+1)+a(k)w^{(0)}(k)=0 \qquad (0\leqslant k\leqslant N-1)$$
$$w^{(0)}(N)=\beta-y^{(0)}(N)$$

的解。

N. S. Naidu和A. K. Rao(1985)[8]在他们的专著中对差分方程问题

$$\varepsilon y(k+1)+ay(k)+by(k-1)=f(k) \qquad (1\leqslant k\leqslant N-1) \tag{1.7}$$
$$y(0)=\alpha, \qquad y(N)=\beta \tag{1.8}$$

进行了讨论，给出了任意阶的形式解

$$\bar{y}(k)=\sum_{r=0}^{P}\varepsilon^r y^{(r)}(k)+\varepsilon^{N-k}\sum_{r=0}^{P}\varepsilon^r w^{(r)}(k) \qquad (P=0,1,\cdots)$$

它满足(1.8)，且在不计$O(\varepsilon^{P+1})$的意义下满足(1.7)。此外他们应用边界层校正方法对带有小参数的高阶常差分方程、几种状态空间模型、开环最优控制和闭环最优控制等问题进行了讨论。

在本文中，我们考虑带小参数的差分方程问题(P_ε)：

$$\begin{aligned}(L_\varepsilon y)_k\equiv{}&\varepsilon y(k+1)+a(k,\varepsilon)y(k)\\&+b(k,\varepsilon)y(k-1)=f(k,\varepsilon) \qquad (1\leqslant k\leqslant N-1)\end{aligned} \tag{1.9}$$

$$B_1y\equiv -y(0)+c_1y(1)=\alpha,\ B_2y\equiv -c_2y(N-1)+y(N)=\beta \tag{1.10}$$

这里ε是小参数，c_1，c_2，α，β为常数，$a(k,\varepsilon)$，$b(k,\varepsilon)$，$f(k,\varepsilon)$ $(1\leqslant k\leqslant N)$为$k$和$\varepsilon$的函数。当$\varepsilon$趋于零时，(1.9)退化为

$$\begin{aligned}(L_0y^{(0)})_k\equiv{}&a(k,0)y^{(0)}(k)+b(k,0)y^{(0)}(k-1)\\&=f(k,0) \qquad (1\leqslant k\leqslant N)\end{aligned} \tag{1.11}$$

它为一阶差分方程，只需一个定解条件，其解就可确定。由下面的第二节分析可知，对于(1.11)应取定解条件

$$B_1 y^{(0)} \equiv -y^{(0)}(0) + c_1 y^{(0)}(1) = \alpha \tag{1.12}$$

我们将(1.11～1.12)称为(1.9～1.10)的退化问题，记为(P_0)。一般地说，(P_0)的解不能满足失去的一个定解条件。在这种情况下，我们称 (P_ε) 为奇异摄动问题。我们主要研究它的解的渐近性态并构造解的一致渐近展开式。

问题(1.9～1.10)包含了用差分逼近带小参数的二阶常微分方程第三边值问题所得到的差分方程问题。

为了能对(P_ε)解的性态有一个直观的认识，我们在第二节考虑(P_ε)中的系数为常数的情形。在这种情形下，问题 (P_ε)的解能够用显式表示出来，因而我们可获得解的渐近展开式。根据这个简单而带有启发性的例子，我们在第三节给出了处理问题(P_ε)的一般方法。第四节中，我们给出了一个数值例子。

二、常 系 数 的 情 形

我们考虑如下问题

$$(L_\varepsilon y)_k \equiv \varepsilon y(k+1) + a y(k) + b y(k-1) = f \qquad (1 \leqslant k \leqslant N-1) \tag{2.1}$$

$$B_1 y \equiv -y(0) + c_1 y(1) = \alpha, \quad B_2 y \equiv -c_2 y(N-1) + y(N) = \beta \tag{2.2}$$

这里ε是小参数，a, b, f, c_1, c_2, α, β 为常数，且 $a \neq 0$, $a+bc_1 \neq 0$, $a+b \neq 0$。我们可求得(2.1～2.2)的解如下:

$$y(k) = \lambda_1 m_1^k + \lambda_2 m_2^k + f/(a+b+\varepsilon) \qquad (0 \leqslant k \leqslant N)$$

其中

$$m_1 = -a\{1-(1-4b\varepsilon/a^2)^{1/2}\}/(2\varepsilon), \quad m_2 = -a\{1+(1-4b\varepsilon/a^2)^{1/2}\}/(2\varepsilon),$$

$$\lambda_1 = \frac{[\alpha+(1-c_1)f/(a+b+\varepsilon)]m_2^{N-1}(m_2-c_2) - [\beta+(c_2-1)f/(a+b+\varepsilon)](c_1 m_2 - 1)}{(c_1 m_1 - 1)m_2^{N-1}(m_2-c_2) - m_1^{k-1}(m_1-c_2)(c_1 m_2 - 1)},$$

$$\lambda_2 = \frac{[\beta+(c_2-1)f/(a+b+\varepsilon)](c_1 m_1 - 1) - [\alpha+(1-c_1)f/(a+b+\varepsilon)]m_1^{N-1}(m_1-c_1)}{(c_1 m_1 - 1)m_2^{N-1}(m_2-c_2) - m_1^{N-1}(m_1-c_2)(c_1 m_2 - 1)}.$$

为了得到$y(k)$的渐近展开式，当ε充分小时，将m_1, m_2用泰勒展开得到

$$m_1 = -\{b/a + b^2\varepsilon/a^3 + O(\varepsilon^2)\},$$

$$m_2 = -\{a - b\varepsilon/a - b^2\varepsilon^2/a^3 + O(\varepsilon^3)\}/\varepsilon.$$

显然$m_2^{-1} = O(\varepsilon)$, $m_2^{-1} m_1 = O(\varepsilon)$。由此，我们易得

$$\lambda_1 = \frac{\alpha+(1-c_1)f/(a+b)}{c_1(-b/a)-1} + O(\varepsilon),$$

$$\lambda_2 = \left\{\beta + \frac{(c_2-1)f}{a+b} - \left[\alpha + \frac{(1-c_1)f}{a+b}\right]\right.$$

$$\left.\cdot\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^N - c_2\left(-\frac{b}{a}\right)^{N-1}\right] \Big/ \left[c_1\left(-\frac{b}{a}\right)-1\right] + O(\varepsilon)\right\}\left(-\frac{\varepsilon}{a}\right)^N.$$

因而对充分小的ε我们有

$$y(k) = \frac{\alpha+(1-c_1)f/(a+b)}{c_1(-b/a)-1}\left(-\frac{b}{a}\right)^k + \frac{f}{a+b}$$

$$+\left\{\beta-\left[-c_2\left(\frac{\alpha+(1-c_1)f/(a+b)}{c_1(-b/a)-1}\left(-\frac{b}{a}\right)^{N-1}+\frac{f}{a+b}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\alpha+(1-c_1)f/(a+b)}{c_1(-b/a)-1}\left(-\frac{b}{a}\right)^{N}+\frac{f}{a+b}\right)\right]\right\}$$

$$\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)^{N-k}\varepsilon^{N-k}+O(\varepsilon)\qquad(0\leqslant k\leqslant N)\tag{2.3}$$

我们可以看出当$\varepsilon\to0$时，

$$y(k)\to\frac{\alpha+(1-c_1)f/(a+b)}{c_1(-b/a)-1}\left(-\frac{b}{a}\right)^{k}+\frac{f}{a+b}\qquad(k\neq N)\tag{2.4}$$

即这个收敛性在$k=N$是非一致的．我们把点$k=N$称为(2.1～2.2)的边界层点．由上式可知，在边界层点以外，(2.4)的右端（即(2.3)中不含ε^{N-k}的项）可作为(2.1～2.2)的近似解，且满足(2.2)的前一个定解条件，我们称之为外解．(2.3)中含ε^{N-k}的项和外解结合在一起，满足失去的定解条件，我们称之为边界层校正解．

(2.1)的退化方程为

$$ay^{(0)}(k)+by^{(0)}(k-1)=f\qquad(1\leqslant k\leqslant N)\tag{2.5}$$

在定解条件

$$-y^{(0)}(0)+c_1y^{(0)}(1)=\alpha\tag{2.6}$$

下，可求得解为

$$y^{(0)}(k)=\frac{\alpha+(1-c_1)f/(a+b)}{c_1(-b/a)-1}\left(-\frac{b}{a}\right)^{k}+\frac{f}{a+b}\qquad(0\leqslant k\leqslant N)\tag{2.7}$$

它恰为外解．

校正解中出现的因子ε^{N-k}提示我们作如下伸长变换

$$w(k)=y(k)/\varepsilon^{N-k}.$$

它将原来的算子L_ε变换为

$$(L_\varepsilon y)_k=\varepsilon^{N-k}[w(k+1)+aw(k)+bw(k-1)].$$

由其主要部分可得如下方程

$$w^{(0)}(k+1)+aw^{(0)}(k)=0\tag{2.8}$$

若我们要求

$$w^{(0)}(N)=\beta-[-c_2y^{(0)}(N-1)+y^{(0)}(N)]\tag{2.9}$$

则我们可得到(2.8～2.9)的解为

$$w^{(0)}(k)=[\beta-(-c_2y^{(0)}(N-1)+y^{(0)}(N))]\left(-\frac{1}{a}\right)^{N-k}.$$

由此，我们看出（参看(2.3)(2.7)）$\varepsilon^{N-k}w^{(0)}(k)$ 恰为边界层校正解．于是我们得到如下定理：

定理1 设$a\neq0$，$a+b\neq0$，$a+bc_1\neq0$，则(2.1～2.2)的解有如下渐近展开式

$$y(k)=y^{(0)}(k)+\varepsilon^{N-k}w^{(0)}(k)+O(\varepsilon),$$

它对$0\leqslant k\leqslant N$一致成立．其中$y^{(0)}(k)$和$w^{(0)}(k)$分别为(2.5～2.6)和(2.8～2.9)的解．

三、变系数的情形

上节中，我们对常系数的情形进行了讨论，得到了解的零阶一致渐近展开式。现在我们来讨论 (P_ε)（参见(1.9～1.10)）的系数为变数的情形。本节中我们假设这些系数为 ε 的充分光滑的函数。根据前一节的讨论，我们设 (P_ε) 的解可写成两项的和：

$$y(k)=y_i(k)+\varepsilon^{N-k}w(k) \tag{3.1}$$

这里

$$y_i(k)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r y^{(r)}(k) \tag{3.2a}$$

及

$$w(k)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r w^{(r)}(k) \tag{3.2b}$$

分别称为外级数解和边界层校正级数解。

将(3.1)代入(1.9)，分离外级数解和校正级数解，我们得到两个独立的方程：

$$\varepsilon y_i(k+1)+a(k,\varepsilon)y_i(k)+b(k,\varepsilon)y_i(k-1)=f(k,\varepsilon) \tag{3.3a}$$

$$w(k+1)+a(k,\varepsilon)w(k)+\varepsilon b(k,\varepsilon)w(k-1)=0 \tag{3.3b}$$

以上两方程，前一个是外级数解所满足的方程，后一个是校正级数解所满足的方程，同时我们也看到第一个方程和(1.9)是相同的。为了定出（3.2）中的系数 $y^{(r)}$ 和 $w^{(r)}$，我们分别将(3.2a)和(3.2b)代入(3.3a)和(3.3b)，且将 $a(k,\varepsilon)$，$b(k,\varepsilon)$，$f(k,\varepsilon)$ 关于 ε 展开成泰勒级数，比较两端 ε^r 的系数，我们得到外级数解和校正级数解的各系数所应满足的方程如下：

1） 外级数

$$\left.\begin{aligned}
&a(k,0)y^{(0)}(k)+b(k,0)y^{(0)}(k-1)=f(k,0) \qquad (1\leqslant k\leqslant N)\\
&a(k,0)y^{(r)}(k)+b(k,0)y^{(r)}(k-1)=\frac{f^{(r)}(k,0)}{r!}-\sum_{l=0}^{r-1}\frac{a^{(r-l)}(k,0)}{(r-l)!}y^{(l)}(k)\\
&\qquad -\sum_{l=0}^{r-1}\frac{b^{(r-l-1)}(k,0)}{(r-l-1)!}y^{(l)}(k-1)-y^{(r-1)}(k+1)\\
&y^{(r-1)}(N+1)\equiv 0 \qquad (1\leqslant k\leqslant N) \qquad (r=1,2,\cdots)
\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

这里 $a^{(r)}(k,0)=\dfrac{d^r}{d\varepsilon^r}a(k,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}$，$b^{(r)}(k,0)=\dfrac{d^r}{d\varepsilon^r}b(k,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}$

及 $f^{(r)}(k,0)=\dfrac{d^{(r)}}{d\varepsilon^r}f(k,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}$

(3.4) 的第一个方程为退化方程，阶数为 1，其它方程跟它的差别只是右端项。由递推过程知，这些右端项均为已知函数。

2）校正级数

$$\left.\begin{aligned}
&w^{(0)}(k+1)+a(k,0)w^{(0)}(k)=0,\ w^{(0)}(0)\equiv 0 \qquad (1\leqslant k\leqslant N-1)\\
&w^{(r)}(k+1)+a(k,0)w^{(r)}(k)=-\sum_{l=0}^{r-1}\frac{(a^{r-l)}(k,0)}{(r-l)!}w^{(l)}(k)\\
&\qquad -\sum_{l=0}^{r-1}\frac{b^{(r-l)}(k,0)}{(r-l)!}w^{(l)}(k-1)\\
&w^{(r)}(0)\equiv 0 \qquad (1\leqslant k\leqslant N-1,\ r=1,2,\cdots)
\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

上面的第一个方程为一阶齐次方程，其它方程跟它所不同的也只是右端项。由递推过程知，这些右端项也均为已知函数。

将（3.1）代入（1.10），我们得到外级数解和边界层校正级数解所满足的定解条件分别为：

1） 外级数

$$\left.\begin{aligned}&-y^{(0)}(0)+c_1y^{(0)}(1)=\alpha\\&-y^{(r)}(0)+c_1y^{(r)}(1)=0\qquad(r=1,2,\cdots)\end{aligned}\right\}\tag{3.6}$$

2） 校正级数

$$\left.\begin{aligned}&w^{(0)}(N)=\beta-[-c_2y^{(0)}(N-1)+y^{(0)}(N)]\\&w^{(r)}(N)=c_2w^{(r-1)}(N-1)-[-c_2y^{(r)}(N-1)+y^{(r)}(N)]\\&\qquad\qquad(r=1,2,\cdots)\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

由（3.4～3.7），我们可依次求得 $y^{(0)}$，$w^{(0)}$；$y^{(1)}$，$w^{(1)}$；$y^{(2)}$，$w^{(2)}$；…。于是我们得到了(P_ε)的形式级数解如下：

$$y(k)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^ry^{(r)}(k)+\varepsilon^{N-k}\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^rw^{(r)}(k).$$

一般地，我们只取有限项的和

$$\bar{y}^{(P)}(k)=\sum_{r=0}^{P}\varepsilon^ry^{(r)}(k)+\varepsilon^{N-k}\sum_{r=0}^{P}\varepsilon^rw^{(r)}(k).$$

作为(P_ε)的近似解。为此，我们来估计余项

$$R(k)\equiv y(k)-\bar{y}^{(P)}(k).$$

以下我们假设$P<N-1$。由下文我们可以看出P取为一位整数就足够了。

简单的计算表明$R(k)$满足如下问题

$$(L_\varepsilon R)_k\equiv\varepsilon R(k+1)+a(k,\varepsilon)R(k)+b(k,\varepsilon)R(k-1)=g(k,\varepsilon)\quad(1\leqslant k\leqslant N-1)$$

$$B_1R=-c_1\varepsilon^{N-1}\sum_{r=0}^{P}\varepsilon^rw^{(r)}(1),\quad B_2R=c_2\varepsilon^{P+1}w^{(P)}(N-1),$$

其中$g(k,\varepsilon)$满足：对于适当小的ε_0，当$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$时，存在一个不依赖于$\varepsilon$的常数$c_0$使得

$$|g(k,\varepsilon)|\leqslant c_0\cdot\varepsilon^{P+1}$$

关于$1\leqslant k\leqslant N-1$一致成立。为了根据$g(k,\varepsilon)$，$B_1R$，$B_2R$得到关于$R$的估计，我们需要如下引理。

引理 给定问题(P_ε)。假设系数$a(k,\varepsilon)$，$b(k,\varepsilon)$为关于ε在区间$[0,\varepsilon_0]$上的 Lipschitz 函数，且满足

$$a(1,0)+b(1,0)c_1\neq0,\ a(2,0)\neq0,\cdots,a(N,0)\neq0,\tag{3.8}$$

则当ε充分小时，(P_ε)有唯一解，且存在一个不依赖于ε的常数c使得

$$\|Y\|_X\leqslant c\cdot\max\{|\alpha|,|\beta|,\|f\|_Y\},$$

这里 $\|Y\|_X=\max_{0\leqslant k\leqslant N}|y(k)|$，$\|f\|_Y=\max_{1\leqslant k\leqslant N-1,0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}|f(k,\varepsilon)|$。

证明 我们将(P_ε)写成矩阵的形式

$$A(\varepsilon)Y=F(\varepsilon),$$

这里

$$A(\varepsilon)=\begin{bmatrix} -1 & c_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b(1,\varepsilon) & a(1,\varepsilon) & \varepsilon & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b(2,\varepsilon) & a(2,\varepsilon) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \ddots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a(N-1,\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Y=\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N-1) \\ y(N) \end{bmatrix},\quad F(\varepsilon)=\begin{bmatrix} \alpha \\ f(1,\varepsilon) \\ f(2,\varepsilon) \\ \vdots \\ f(N-1,\varepsilon) \\ \beta \end{bmatrix}.$$

由条件可知$A(0)$可逆且存在一个不依赖于ε的常数c_3使得

$$\|A(\varepsilon)-A(0)\|_\infty\leqslant c_3\cdot\varepsilon \qquad (0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0).$$

改写$A(\varepsilon)$为

$$A(\varepsilon)=A(0)[E+A^{-1}(0)(A(\varepsilon)-A(0))].$$

由Banach引理知，当$\varepsilon\leqslant\min\{(2c_3\|A^{-1}(0)\|_\infty)^{-1},\ \varepsilon_0\}$时，$A(\varepsilon)$可逆，且

$$\|A^{-1}(\varepsilon)\|_\infty\leqslant\frac{\|A^{-1}(0)\|_\infty}{(1-\|A^{-1}(0)\|_\infty\|A(\varepsilon)-A(0)\|_\infty)}\leqslant 2\|A^{-1}(0)\|_\infty.$$

从而

$$\begin{aligned}\|Y\|_X&\leqslant\|A^{-1}(\varepsilon)\|_\infty\|F(\varepsilon)\|_\infty\\ &\leqslant 2\|A^{-1}(0)\|_\infty\max\{|\alpha|,|\beta|,\|f\|_Y\}.\end{aligned}$$

于是引理得证。

由引理我们很易得到

定理2 设(P_ε)中的系数 $a(k,\varepsilon)$，$b(k,\varepsilon)$，$f(k,\varepsilon)$为关于ε的充分光滑的函数，且满足(3.8)。则当ε充分小时，(P_ε)有唯一解

$$y(k)=\sum_{r=0}^{P}\varepsilon^r y^{(r)}(k)+\varepsilon^{N-k}\sum_{r=0}^{P}\varepsilon^r w^{(r)}(k)+R(k,\varepsilon) \tag{3.9}$$

且存在一个不依赖于ε的常数c使得

$$|R(k,\varepsilon)|\leqslant c\cdot\varepsilon^{P+1}$$

对$0\leqslant k\leqslant N$一致成立。这里$y^{(r)}$和$w^{(r)}$由（3.4～3.7）定义。特别$y^{(0)}$为（P_ε）的退化问题的解。

注1 由(3.9)我们看出当$\varepsilon\to0$时，

$$y(k)\to y^{(0)}(k),\qquad (k\neq N).$$

注2 我们可以把(3.9)右端第二项中关于ε的高于P次幂的项放到余项$R(k,\varepsilon)$中去，即可改写(3.9)为

$$y(k)=\sum_{r=0}^{P}\varepsilon^r y^{(r)}(k)+\varepsilon^{N-k}\sum_{r=0}^{P-(N-k)}\varepsilon^r w^{(r)}(k)+\bar{R}(k,\varepsilon) \tag{3.10}$$

易知对于充分小的ε存在一个不依赖于ε的常数c_4使得

$$|\bar{R}(k,\varepsilon)|\leqslant c_4\cdot\varepsilon^{P+1} \tag{3.11}$$

对$0\leqslant k\leqslant N$一致成立。

观察（3.10～3.11），我们知道 $\bar{y}^{(0)}(k)=y^{(0)}(k)$ $(0\leqslant k\leqslant N-1)$；$\bar{y}^{(0)}(N)=y^{(0)}(N)+w^{(0)}(N)$，为$y(k)$ $(0\leqslant k\leqslant N)$的零阶一致近似。若已求得$y(k)$的$P-1$阶近似，则要求$y(k)$的$P$阶近似，我们只要通过(3.4～3.7)求出$y^{(P)}(k)$ $(0\leqslant k\leqslant N)$和$w^{(P-k)}(N-k)$ $(0\leqslant k\leqslant P)$于是由下列各式定义的$\bar{y}^{(P)}(k)$为$y(k)$的$P$阶一致近似：

$$\bar{y}^{(P)}(k)=\bar{y}^{(P-1)}(k)+\varepsilon^P y^{(P)}(k)\qquad (0\leqslant k\leqslant N-P-1),$$

$$\bar{y}^{(P)}(N-P+k)=\bar{y}^{(P-1)}(N-P+k)+\varepsilon^P\left(y^{(P)}(N-P+k)+w^{(k)}(N-P+k)\right)\qquad (0\leqslant k\leqslant P).$$

四、数 值 例 子

我们考虑如下差分方程

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon y(k+1)-(0.11+2\varepsilon)y(k)+(0.1+\varepsilon)y(k-1)\\ \qquad =-0.015\qquad (1\leqslant k\leqslant 9)\\ -y(0)+y(1)/1.1=-0.1,\\ -y(9)/1.1+y(10)=-0.21/1.1\end{array}\right\} \tag{4.1}$$

当$\varepsilon\to0$时，它退化为

$$\left.\begin{array}{ll}-0.11y^{(0)}(k)+0.1y^{(0)}(k-1)=-0.015 & (1\leqslant k\leqslant 10)\\ -y^{(0)}(0)+y^{(0)}(1)/1.1=-0.1 & \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

我们应用高斯消去法求解(4.1)。在表1中，我们给出了(4.1)当$\varepsilon=10^{-1}$，10^{-2}，10^{-3}，10^{-4}时的精确解以及它的退化解。由表1可以看出，当ε趋于零且$k\neq10$时，(4.1)的解趋于它的退化问题的解，而$k=10$时，(4.1)的解不趋于它的退化问题的解。因而(4.1)在$k=10$处出现边界层点。

表2我们给出了(4.1)当$\varepsilon=0.01$时的退化解，零至三阶近似解以及精确解。由表2可以看出当逼近阶数增加时，近似解逼近于精确解。因而这里的数值结果和我们的理论结果是符合的。

表 1　**解的渐近性态**

	$\varepsilon=10^{-1}$	$\varepsilon=10^{-2}$	$\varepsilon=10^{-3}$	$\varepsilon=10^{-4}$	退化解
$u(0)$	1.28156	1.28966	1.29034	1.29047	1.29048
$u(1)$	1.29971	1.30863	1.30943	1.30952	1.30952
$u(2)$	1.31600	1.32588	1.32674	1.32683	1.32684
$u(3)$	1.33016	1.34158	1.34248	1.34257	1.34258
$u(4)$	1.34151	1.35587	1.35679	1.35688	1.35689
$u(5)$	1.34836	1.36886	1.36980	1.36989	1.36990
$u(6)$	1.34689	1.38067	1.38162	1.38172	1.38173
$u(7)$	1.32864	1.39125	1.39238	1.39247	1.39248
$u(8)$	1.27500	1.39882	1.40213	1.40225	1.40226
$u(9)$	1.14523	1.38088	1.40807	1.41083	1.41114
$u(10)$	0.85021	1.06443	1.08916	1.09167	1.41922

表 2　**近似解和精确解的比较**（$\varepsilon=10^{-2}$）

	退化解	零阶解	一阶解	二阶解	三阶解	精确解
$u(0)$	1.29048	1.29048	1.28965	1.28966	1.28966	1.28966
$u(1)$	1.30952	1.30952	1.30862	1.30863	1.30863	1.30863
$u(2)$	1.32684	1.32694	1.32587	1.32588	1.32588	1.32588
$u(3)$	1.34258	1.34258	1.34157	1.34158	1.34158	1.34158
$u(4)$	1.35689	1.35689	1.35586	1.35587	1.35587	1.35587
$u(5)$	1.36990	1.36990	1.36885	1.36887	1.36886	1.36886
$u(6)$	1.38173	1.38173	1.38068	1.38069	1.38069	1.38067
$u(7)$	1.39248	1.39248	1.39144	1.39145	1.39120	1.39125
$u(8)$	1.40226	1.40226	1.40122	1.39853	1.39844	1.39882
$u(9)$	1.41114	1.41114	1.38038	1.38089	1.38088	1.38088
$u(10)$	1.41022	1.09195	1.06398	1.06444	1.06443	1.06443

参 考 文 献

[1] Hildebrand, F. B., *Finite Difference Equations and Simulations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (1968).

[2] Gadzow, J. A. and H. R. Martons, *Discrete-Time and Computer Control Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (1970).

[3] Kuo, B. C., Digital control systems, *SRL Publ. Com.*, Champaign (1977).

[4] Cadzow, J. A., *Discrete-Time System: An Introduction with Interdisciplinary Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (1973).

[5] Bishop, A. B., *Introduction to Discrete Linear Controls: Theory and Application*, Academic Press, New York (1975).

[6] Dorato, P. and A. H. Levis, Optimal linear regulators: the discrete-time case, *IEEE Trans. On Aut. Control*, AC-**16** (1971), 613—620.

[7] Comstock, C. and G. C. Hsiao, Singular perturbations for difference equation, *Rocky Mountain J. Mathematics*, **6** (1976), 561—567.

[8] Naidu, D. S. and A. K. Rao, Singular perturbation analysis of discrete control systerms, *Lecture Notes in Math.*, 1154.

Asymptotic Method for Singular Perturbation Problem of Ordinary Difference Equations

Wu Chi-kuang Su Yu-cheng Sun Zhi-zhong

(*Nanjing University, Nanjing*)

Abstract

This paper is taken up for the following difference equation problem(P_ε):

$$(L_\varepsilon y)_k \equiv \varepsilon y(k+1)+a(k,\varepsilon)y(k)+b(k,\varepsilon)y(k-1)=f(k,\varepsilon) \qquad (1\leqslant k\leqslant N-1)$$

$$B_1 y=-y(0)+c_1 y(1)=\alpha,\ B_2 y=-c_2 y(N-1)+y(N)=\beta$$

where ε is a small parameter, c_1, c_2, α, β constants and $a(k,\varepsilon)$, $b(k,\varepsilon)$, $f(k,\varepsilon)$ $(1\leqslant k\leqslant N)$ functions of k and ε. Firstly, the case with constant coefficients is considered. Secondly, a general method based on extended transformation is given to handle (P_ε), where the coefficients may be variable and uniform asymptotic expansions are obtained. Finally, a numerical example is provided to illustrate the proposed method.