应用数学和力学，第10卷第3期（1989年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

守恒型自共轭奇摄动常微分方程一致收敛二阶格式*

郭 雯 林鹏程

（福州大学计算机科学系，1987年6月3日收到）

摘 要

本文对守恒型自共轭奇异摄动常微分方程，利用El-Mistikawy 和 Werle[1] 的思想构造一个差分格式，并证明该格式为关于ε一致收敛的二阶格式。

一、引 言

考虑以下守恒型自共轭奇异摄动问题：

$$\begin{cases} L_\varepsilon u(x)\equiv-\varepsilon(p(x)u')'+q(x)u=f(x) & (x\in(0,1)) \\ u(0)=\alpha_0,\ u(1)=\alpha_1 \end{cases} \tag{1.1}$$

其中$\varepsilon>0$是小参数，α_0，α_1为给定常数，p，q及f是与ε无关的光滑函数，且

$$p(x)\geqslant\alpha>0,\quad q(x)\geqslant\beta>0\quad(x\in[0,1]) \tag{1.2}$$

Hegarty等[2]曾对此问题的特殊情况$p\equiv1$构造一个二阶精度的差分格式。我们也对他们的结果用不同的方法给予了证明（见[3]）。本文利用El-Mistikawy 和 Werle 的思想，对(1.1)构造了一个差分格式。并从微分方程解的一个分解式出发，对所构造的格式进行误差分析，从而证明该格式为关于ε一致收敛的二阶格式。

在文中，c均表示正常数。尽管在不同的式中它的值也许不同，但它总与h和ε无关。阶的估计也是在与h和ε无关的意义下进行的。

二、格 式 的 构 造

将(1.1)化为与之等价的

$$\begin{cases} -\varepsilon u''(x)-\varepsilon a(x)u'+b(x)u=F(x) & (x\in(0,1)) \\ u(0)=\alpha_0,\ u(1)=\alpha_1 \end{cases} \tag{2.1}$$

其中$a(x)=p'(x)/p(x)$，$b(x)=q(x)/p(x)$，$F(x)=f(x)/p(x)$。设J为正整数，并定义网格步长$h=1/J$和网格$x_j=jh$，考虑

$$L_\varepsilon U\equiv-\varepsilon U''-\varepsilon\bar{a}U'+\bar{b}U=\bar{F}\qquad(x\in(x_{j-1},x_{j+1}))$$

---

* 林宗池推荐.

$$U(x_{j-1})=u_{j-1},\ U(x_{j+1})=u_{j+1}\qquad (j=1,\cdots,J-1)$$

这里u_j为$u(x_j)$的近似，$\bar{a}$，$\bar{b}$和$\bar{F}$分别为$a(x)$，$b(x)$和$F(x)$的某种近似。按El-Mistikawy和Werle方法取

$$\bar{b}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(b_{j-1}+b_j)\triangleq b^- & (\text{当}x\in[x_{j-1},x_j))\\ \frac{1}{2}(b_j+b_{j+1})\triangleq b^+ & (\text{当}x\in(x_j,x_{j+1}])\end{cases}\tag{2.2}$$

其中$b_j=b(x_j)$，我们还将这样表示F_j等。$\bar{F}(x)$可类似定义。但对$\bar{a}(x)$，由于$a(x)$中含$p'(x)$，故此定义是不合适的。为使所构造的格式达到我们的目的，定义：

$$\bar{a}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{p_{j-1/2}-p_{j-1}}{0.5h}\right)/p_{j-1}+\left(\frac{p_j-p_{j-1/2}}{0.5h}\right)/p_j\right]\triangleq a^- & (\text{当}x\in[x_{j-1},x_j))\\ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{p_{j+1/2}-p_j}{0.5h}\right)/p_j+\left(\frac{p_{j+1}-p_{j+1/2}}{0.5h}\right)/p_{j+1}\right]\triangleq a^+ & (\text{当}x\in(x_j,x_{j+1}])\end{cases}\tag{2.3}$$

利用$U'(x)$在x_j处连续性，便得关于u_j的线性方程组

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\varepsilon}{h^2}(r_j^-u_{j-1}+r_j^cu_j+r_j^+u_{j+1})\\&\qquad=q_j^-F_{j-1}+q_j^cF_j+q_j^+F_{j+1}\qquad(1\leqslant j\leqslant J-1)\\&u_0=\alpha_0,\ u_J=\alpha_1\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

这就是我们所要的差分格式，其中

$$r_j^-=\frac{(n_1-k_1)\exp(n_1)}{\exp(n_1-k_1)-1},\quad r_j^+=\frac{(n_2-k_2)\exp(-k_2)}{\exp(n_2-k_2)-1}\tag{2.5}$$

$$r_1=-n_1-\frac{n_1-k_1}{\exp(n_1-k_1)-1},\ r_2=k_2-\frac{n_2-k_2}{\exp(n_2-k_2)-1}\qquad(r_j^c=r_1+r_2)\tag{2.6}$$

$$\left.\begin{aligned}q_j^-=&\frac{\varepsilon}{2h^2b^-}[n_1\exp(n_1)(1-\exp(-k_1))\\&-k_1(\exp(n_1)-1)]/[1-\exp(n_1-k_1)]\\q_j^+=&\frac{\varepsilon}{2h^2b^+}[-n_2(1-\exp(-k_2))\\&+k_2\exp(-k_2)(\exp(n_2)-1)]/[1-\exp(n_2-k_2)]\\q_j^c=&q_j^-+q_j^+\end{aligned}\right\}\tag{2.7}$$

这里

$$\left.\begin{aligned}n_1&=-\frac{a^-h}{2}-\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{b^-+\frac{\varepsilon(a^-)^2}{4}}\\n_2&=-\frac{a^+h}{2}-\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{b^++\frac{\varepsilon(a^+)^2}{4}}\\k_1&=-\frac{a^-h}{2}+\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{b^-+\frac{\varepsilon(a^-)^2}{4}}\\k_2&=-\frac{a^+h}{2}+\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{b^++\frac{\varepsilon(a^+)^2}{4}}\end{aligned}\right\}\tag{2.8}$$

易见$n_i<0$，$k_i>0$　$(i=1,2)$。

为书写方便，将$r_j^{\pm,c}$和$q^{\pm,c}$的下标略去。

三、(2.4)的性质

引进下列记号

$$\left.\begin{aligned}&R^h v_j=-\varepsilon(r^- v_{j-1}+r^o v_j+r^+ v_{j+1})/h^2\\&Qv_j=q^- v_{j-1}+q^o v_j+q^+ v_{j+1}\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

其中v_j是网格点$\{x_j\}$上的任意一组数值。

性质1　$r^\pm>0$，$-r_1>r^-$，$-r_2>r^+$，$q^\pm>0$

证明　$r^\pm>0$是显然的。为证$-r_1>r^-$，由(2.5)和(2.6)有

$-r_1-r^-=[n_1(\exp(n_1-k_1)-1)+(n_1-k_1)(1-\exp(n_1))]/[\exp(n_1-k_1)-1]$，

故只要证分子小于零。对固定的$n_1<0$先把它看作k_1的函数$g(k_1)$。由于$g(0)=0$，只要证$g'(k_1)<0$。为此，对固定的$k_1>0$把$g'(k_1)$看成是n_1的函数$d(n_1)$。由于$d(0)=0$，$d'(n_1)>0$，故$d(n_1)<0$，从而$g'(k_1)<0$。同理可证$-r_2>r^+$。至于$q^\pm$，由于(2.7)可化为：

$$q^-=\frac{\varepsilon}{2h^2b^-}(-r^--r_1),\quad q^+=\frac{\varepsilon}{2h^2b^+}(-r^+-r_2)\tag{3.2}$$

故由上述证明，立即可得$q^\pm>0$。

利用性质1，可证(2.4)满足极值原理，即：

性质2　设v_j是网格点x_j上的一组值，满足$v_0\leqslant0$，$v_J\leqslant0$，$R^h v_j\leqslant0\,(j=1,\cdots,J-1)$。则$v_j\leqslant0\,(j=0,1,\cdots,J)$。

由此可导出比较原理。

定理3.1　设v_j，φ_j是x_j上的二组值，满足$|v_0|\leqslant\varphi_0$，$|v_J|\leqslant\varphi_J$，$|R^h v_j|\leqslant R^h\varphi_j\,(j=1,\cdots,J-1)$，则　$|v_j|\leqslant\varphi_j$　$(j=0,1,\cdots,J)$。

这表明(2.4)有唯一解u_j。并且不难证明

$$|u_j|\leqslant|\alpha_0|+|\alpha_1|+\max_{0<x<1}|F(x)|/\min_{0<x<1}(b(x))\qquad(j=0,1,\cdots,J)\tag{3.3}$$

对$\rho>0$，定义函数

$$\bar r(\rho)=\rho/\mathrm{sh}\rho,\quad \bar r^o(\rho)=-\rho\coth\rho\tag{3.4}$$

则$r^{\pm o}$可表为

$$r^-=\bar r(\rho^-)\exp(-a^-h/2),\quad r^+=\bar r(\rho^+)\exp(a^+h/2)\tag{3.5}$$

$$r_1=\bar r^o(\rho^-)+\frac{a^-h}{2},\quad r_2=\bar r^o(\rho^+)-\frac{a^+h}{2},\quad r^o=r_1+r_2\tag{3.6}$$

其中　$\rho^\pm=\dfrac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{b^\pm+\dfrac{\varepsilon(a^\pm)^2}{4}}$。

关于$\bar r(\rho)$和$\bar r^o_{(\rho)}$有以下结论(参见[3])：

注3.1

$$\left.\begin{aligned}&|\bar r(\rho)|,|D_\rho^2\bar r(\rho)|\leqslant\begin{cases}c & \text{当}\rho\leqslant c\\ c\rho\exp[-\rho] & \text{当}\rho\geqslant c\end{cases}\\&|D_\rho\bar r(\rho)|\leqslant\begin{cases}c\rho & \text{当}\rho\leqslant c\\ c\rho\exp[-\rho] & \text{当}\rho\geqslant c\end{cases}\\&|\bar r^o(\rho)|\leqslant\begin{cases}c & \text{当}\rho\leqslant c\\ c\rho & \text{当}\rho\geqslant c\end{cases}\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

$$\left.\begin{aligned}&|D_\rho \bar{r}^o(\rho)|\leqslant c\rho\\&|D_{\rho^2}\bar{r}^o(\rho)|\leqslant\begin{cases}c\rho & \text{当}\rho\leqslant c\\ c\rho\exp[-2\rho] & \text{当}\rho\geqslant c\end{cases}\end{aligned}\right\}\tag{3.8}$$

注3.2 以下$\rho=0$附近的幂级数展开是公认的

$$\bar{r}(\rho)=1-\rho^2/6+O(\rho^4)\tag{3.9}$$

$$\bar{r}^o(\rho)=-1-\rho^2/3+O(\rho^4)\tag{3.10}$$

定义关于ε一致有界的函数

$$N\equiv N(\varepsilon,h)=\begin{cases}1 & (\text{当}h\leqslant c\sqrt{\varepsilon})\\ \sqrt{\varepsilon}/h & (\text{当}h\geqslant c\sqrt{\varepsilon})\end{cases}$$

于是可以证明

性质3 (i) $r^\pm\leqslant cN$, $q^\pm\leqslant cN$,

(ii) 当h适当小时，$q^\pm\geqslant cN$

证明 (i) 由(3.5)和(3.7)，并注意到$\exp[-\rho]\leqslant c\rho^{-k}$ ($\rho>0$, k为任意正整数)，有$r^\pm\leqslant cN$。

由(3.2)，(3.5)，(3.6)，有

$$2b^-q^-=\frac{\varepsilon}{h^2}\left[-\bar{r}(\rho^-)\exp(-a^-h/2)-\bar{r}^o(\rho^-)-\frac{a^-h}{2}\right]$$

$$=\frac{\varepsilon}{h^2}\rho^-\mathrm{th}(\rho^-/2)-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon(a^-)^2}{4}\bar{r}(\rho^-)+\frac{a^-h}{2}(\bar{r}(\rho^-)-1)\frac{\varepsilon}{h^2}+N\cdot O(h)$$

因为 $|\bar{r}(\rho^-)-1|=\rho^-|D_\rho\bar{r}(\xi)|\leqslant cN(\rho^-)^2$，所以

$$2b^-q^-=\frac{\varepsilon}{h^2}\rho^-\mathrm{th}(\rho^-/2)-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon(a^-)^2}{4}\bar{r}(\rho^-)+N\cdot O(h)\tag{3.11}$$

由 $\mathrm{th}(\rho^-/2)\leqslant\begin{cases}\rho^-/2 & \text{当}h\leqslant c\sqrt{\varepsilon}\\ 1 & \text{当}h\geqslant c\sqrt{\varepsilon}\end{cases}$. 便得$q^-\leqslant cN$。同理$q^+\leqslant cN$。

(ii) 由于$\mathrm{th}(\rho^-/2)=\frac{\rho^-}{2}-\left(\frac{\rho^-}{2}\right)^2\frac{\mathrm{th}(\xi/2)}{\mathrm{ch}^2(\xi/2)}$ ($\xi\in(0,\rho)$)，因此当$\rho^-<2\delta$时，$\mathrm{th}(\rho^-/2)\geqslant(1-\delta)\rho^-/2$从而由(3.11)

$$2b^-q^-\geqslant\frac{1}{2}b^--\frac{1}{2}\delta\left(b^-+\frac{(a^-)^2}{4}\right)-ch$$

取 $\delta=\frac{1}{2}\left(1+\frac{(a^-)^2}{4b^-}\right)^{-1}$，则有$2b^-q\geqslant\frac{b^-}{4}-ch$。故当$h$适当小时$q^-\geqslant c$。

当$\rho^-\geqslant2\delta$时，$\mathrm{th}(\rho^-/2)\geqslant\mathrm{th}\delta$，故由(3.11)，有

$$2b^-q^-\geqslant(\mathrm{th}\delta\cdot b^--ch)(\rho^-)^{-1}$$

从而当h充分小时，$q^-\geqslant cN$。同理有$q^+\geqslant cN$。

性质4 $q^\pm$在$\rho=0$附近的展开式为

$$q^\pm=\frac{1}{4}\pm\frac{a^\pm h}{24}+O\left(\frac{h^2}{\varepsilon}\right)\tag{3.12}$$

证明 将(3.9)、(3.10)代入(3.2)，并将其中的指数函数在零点展开，即可得证。

四、微分方程解的性质

利用Smith[4]有关奇摄动问题的多变量方法，可以证明

定理4.1 问题(1.1)的解可分解为：

$$u(x)=A_0(x)+c_0E_0(x)/(p(x)q(x))^{1/4}+c_1E_1(x)/(p(x)q(x))^{1/4}+\varepsilon\tilde{R}_0(x,\varepsilon) \tag{4.1}$$

其中 $A_0(x)$为与ε无关的光滑函数，c_0,c_1 为关于ε一致有界的常数，

$$E_0(x)=\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^x\sqrt{q(t)/p(t)}\,dt\right),\quad E_1(x)=\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_x^1\sqrt{q(t)/p(t)}\,dt\right),$$

$\tilde{R}_0(x,\varepsilon)$满足：

$$\begin{cases} L_\varepsilon\tilde{R}_0=\tilde{F}(x,\varepsilon) & (x\in(0,1)) \\ \tilde{R}_0(0,\varepsilon)=\gamma_0(\varepsilon),\ \tilde{R}_0(1,\varepsilon)=\gamma_1(\varepsilon) \end{cases} \tag{4.2}$$

$$|\gamma_0(\varepsilon)|\leqslant c,\quad |\gamma_1(\varepsilon)|\leqslant c \tag{4.3}$$

$$|D_x^i\tilde{F}(x,\varepsilon)|\leqslant c\Big\{1+\varepsilon^{-\frac{i}{2}}[\exp(-\sqrt{\sigma}x/\sqrt{\varepsilon})+\exp(-\sqrt{\sigma}(1-x)/\sqrt{\varepsilon})]\Big\}\qquad (x\in(0,1)) \tag{4.4}$$

这里σ是一个与ε无关的常数，满足

$$0<\sigma<\min_{0<x<1}(q(x)/p(x)) \tag{4.5}$$

此外，利用比较函数，可以证明

定理4.2 对满足(4.2)～(4.4)的函数$\tilde{R}_0(x,\varepsilon)$，有

$$|D_x^i\tilde{R}_0(x,\varepsilon)|\leqslant c\{1+\varepsilon^{-\frac{i}{2}}[\exp(-\sqrt{\sigma}x/\sqrt{\varepsilon})+\exp(-\sqrt{\sigma}(1-x)/\sqrt{\varepsilon})]\}\qquad (x\in[0,1]) \tag{4.6}$$

此处σ为满足(4.5)的某一与ε无关的常数，未必与定理4.1中的σ相同。

五、(2.4)的截断误差分析

对格式(2.4)定义其截断误差

$$\tau_j(u)\equiv R^hu(x_j)-Q(f(x_j)/p(x_j)) \tag{5.1}$$

于是由Taylor展开，得到

$$\tau_j(u)=T^0u(x_j)+T^1u'(x_j)+\cdots \tag{5.2}$$

其中

$$T^0=-\frac{\varepsilon}{h^2}(r^-+r^0+r^+)-(q^-b_{j-1}+q^0b_j+q^+b_{j+1})$$

$$T^1=-\frac{\varepsilon}{h}(r^+-r^-)+\varepsilon(q^-a_{j-1}+q^0a_j$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\quad +q^+a_{j+1})-h(q^+b_{j+1}-q^-b_{j-1})\\
&T^2=-\frac{\varepsilon}{2}(r^++r^-)+\varepsilon(q^-+q^c+q^+)\\
&\quad +\varepsilon h(q^+a_{j+1}-q^-a_{j-1})-\frac{h^2}{2}(q^-b_{j-1}+q^+b_{j+1})\\
&T^\nu=-\frac{\varepsilon h^{\nu-2}}{\nu!}(r^++(-1)^\nu r^-)+\varepsilon h^{\nu-2}(q^++(-1)^\nu q^-)\\
&\quad +\frac{\varepsilon h^{\nu-1}}{(\nu-1)!}(q^+a_{j+1}+(-1)^\nu q^-a_{j-1})\\
&\quad -\frac{h^\nu}{\nu!}(q^+b_{j+1}+(-1)^\nu q^-b_{j-1}) \qquad (\nu=3,4,\cdots)
\end{aligned}\right\} \tag{5.3}
$$

引理5.1 $T^0=0$, $|T^\nu|\leqslant cNh^2 \quad (\nu=1,2)$, $|T^3|\leqslant cN(h^4+\varepsilon h^2)$.

证明 由(3.2)容易验证$T^0=0$。

为估计T^1，将$\bar r(\rho^+)$、$\rho^+\text{th}(\rho^+/2)$在$\rho^-$处展开，利用$\rho^+-\rho^-=O(h^2/\sqrt{\varepsilon})$

$$
\bar r(\rho^+)=\bar r(\rho^-)+N\cdot O\left(\frac{h^3}{\varepsilon}\right),\quad \rho^+\text{th}\left(\frac{\rho^+}{2}\right)=\rho^-\text{th}(\rho^-/2)+N\cdot O\left(\frac{h^3}{\varepsilon}\right) \tag{5.4}
$$

于是

$$
r^+-r^-=\bar r(\rho^-)\left[\exp\left(\frac{a^+h}{2}\right)-\exp\left(-\frac{a^-h}{2}\right)\right]+N\cdot O\left(\frac{h^3}{\varepsilon}\right) \tag{5.5}
$$

由(3.11)及q^+的类似表示式，有

$$
\begin{aligned}
q^+-q^-=&\frac{\varepsilon}{2h^2}\left[\frac{1}{b^+}\rho^+\text{th}(\rho^+/2)-\frac{1}{b^-}\rho^-\text{th}(\rho^-/2)\right]\\
&-\frac{1}{4}\left[\frac{\varepsilon(a^+)^2}{4b^+}\bar r(\rho^+)-\frac{\varepsilon(a^-)^2}{4b^-}\bar r(\rho^-)\right]+NO(h)=N\cdot O(h)
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
T^1=&-\frac{\varepsilon}{h}\bar r(\rho^-)\left[\exp\left(\frac{a^+h}{2}\right)-\exp\left(-\frac{a^-h}{2}\right)\right]\\
&+\varepsilon(q^-a_{j-1}+q^ca_j+q^+a_{j+1})+N\cdot O(h^2)
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

当$\sqrt{\varepsilon}\leqslant ch$时，上式立即给出引理结论。当$\sqrt{\varepsilon}>ch$时，利用$\bar r(\rho^-)$，$q^\pm$在0点附近的展开式，亦可得$|T^1|\leqslant ch^2$。

由性质3，$|T^2|\leqslant cNh^2$当$\sqrt{\varepsilon}\leqslant ch$时显然成立。为证$\sqrt{\varepsilon}>ch$时的结论，用(3.9)、(3.12)、(5.6)即可。

至于T^3，注意到它可表为

$$
\begin{aligned}
T^3=&\frac{h^2}{3!}T^1-\frac{\varepsilon h^2}{3!}(q^-a_{j-1}+q^ca_j+q^+a_{j+1})\\
&+\frac{\varepsilon h^2}{2}(q^+a_{j+1}-q^-a_{j-1})+\varepsilon h(q^+-q^-)
\end{aligned}
$$

因此，利用T^1的估计、性质3(i)和(5.6)可得相应的估计。 证毕。

对任一光滑函数g及实数c和d，定义以下形式的Taylor余项：

$$
\begin{aligned}
R_n(c,d,g)\equiv& g(d)-\sum_{i=0}^{n}g^{(i)}(c)\frac{(d-c)^i}{i!}\\
=&g^{(n+1)}(\xi)\frac{(d-c)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{n}\int_c^d(d-s)^ng^{(n+1)}(s)ds
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

ξ介于c，d之间，则截断误差(5.2)可表示为

$$\begin{aligned}\tau_j(u)=&T^1u'(x_j)+T^2u''(x_j)+T^3u'''(x_j)\\&-\frac{\varepsilon}{h^2}[r^-R_3(x_j,x_{j-1},u)+r^+R_3(x_j,x_{j+1},u)]\\&+\varepsilon[q^-R_1(x_j,x_{j-1},u'')+q^+R_1(x_j,x_{j+1},u'')]\\&+\varepsilon[q^-a_{j-1}R_2(x_j,x_{j-1},u')+q^+a_{j+1}R_2(x_j,x_{j+1},u')]\\&-[q^-b_{j-1}R_3(x_j,x_{j-1},u)+q^+b_{j+1}R_3(x_j,x_{j+1},u)]\end{aligned}\tag{5.9}$$

利用(4.1)及算子τ_j的线性，有

$$\tau_j(u)=\tau_j(A_0)+c_0\tau_j(G_0)+c_1\tau_j(G_1)+\varepsilon\tau_j(\tilde{R}_0)$$

其中$G_s=E_s/(pq)^{1/4}\quad(s=0,1)$

于是，只需分别估计$\tau_j(A_0)$，$\tau_j(G_s)$和$\tau_j(\tilde{R}_0)$。由于A_0是与ε无关的光滑函数，由引理5.1，有

定理5.2 $|\tau_j(A_0)|\leqslant cNh^2$。

用与[3]中相应的$\tau_j(\tilde{R}_0)$的估计完全相同的方法，可以证明

定理5.3 $|\tau_j(\tilde{R}_0)|\leqslant cNh^2/\varepsilon$。

证明 事实上，此处的$\tau_j(\tilde{R}_0)$与[3]中的不同之处，仅在它多了一项$\varepsilon[q^-a_{j-1}R_2(x_j,x_{j-1},\tilde{R}_0')+q^+a_{j+1}R_2(x_j,x_{j+1},\tilde{R}_0')]$，而由(4.6)容易估计此项绝对值不超过$cNh^2/\varepsilon$。

整个误差估计的难点在于$\tau_j(G_s)(s=0,1)$的估计。由于G_0与G_1表达式类似，故只估计$\tau_j(G_0)$。

令$Z(x)=(p(x)q(x))^{-1/4}$，则$G_0(x)=Z(x)E_0(x)$，从而

$$L_\varepsilon G_0=-\varepsilon(pZ')'E_0$$

又令$\beta(x)=b(x)+\varepsilon a^2(x)/4$。对正整数$k<m$，定义

$$S(k,m)=\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{x_k}^{x_m}\sqrt{\beta(t)}\,dt\right),\quad E_m=S(0,m)$$

引进两个函数

$$W(x)=Z(x)\exp\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^x(\sqrt{\beta(t)}-\sqrt{b(t)})dt\right]$$

$$V(x)=(p(x)Z'(x))'/p(x)\cdot\exp\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^x(\sqrt{\beta(t)}-\sqrt{b(t)})dt\right]$$

注意到 $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{\beta(x)}-\sqrt{b(x)})=O(\sqrt{\varepsilon})$，不难证明

注5.1 $|W^{(i)}(x)|\leqslant c$，$|V^{(i)}(x)|\leqslant c\quad(i=0,\cdots,4)$

注5.2 令$\rho=\varepsilon^{-1/2}h\sqrt{\beta(x_i)}$，则有

$$S(j-1,j)=\exp(-\rho)\left[1+\frac{1}{2}(\sqrt{\beta(x_i)})'\frac{h^2}{\sqrt{\varepsilon}}-\frac{1}{6}(\sqrt{\beta(x_i)})''\frac{h^3}{\sqrt{\varepsilon}}\right]+N\cdot O(h^4/\varepsilon)\tag{5.10}$$

$$S(j-1,j+1)=\exp(-2\rho)\left[1-\frac{1}{3}(\sqrt{\beta(x_i)})''\frac{h^3}{\sqrt{\varepsilon}}\right]+O\left(\frac{h^4}{\varepsilon}\right)\tag{5.11}$$

$$\bar{r}(\rho^\pm)=\bar{r}(\rho)\pm\frac{1}{2}(\sqrt{\beta(x_i)})'\frac{h^2}{\sqrt{\varepsilon}}D_\rho\bar{r}(\rho)+N\cdot O(h^4/\varepsilon)\tag{5.12}$$

$$\bar{r}^{\circ}(\rho^{\pm})=\bar{r}^{\circ}(\rho)\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{\bar{\beta}(x_j)}\right)'\frac{h^2}{\sqrt{\varepsilon}}D_\rho\bar{r}^{\circ}(\rho)+O(h^4/\varepsilon) \tag{5.13}$$

证明 只需证明 $\rho^{+}-\rho=\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{\bar{\beta}(x_j)}\right)'\frac{h^2}{\sqrt{\varepsilon}}+O(h^3/\sqrt{\varepsilon})$，将各函数在$\rho$处 Taylor 展开，再由注3.1即可得证。

有了上面展开式，可着手$\tau_j(G_0)$的估计。

将$\tau_j(G_0)$分解为二部分：

$$\tau_j(G_0)=\tau_j{}^r+\tau_j{}^q \tag{5.14}$$

其中

$$\tau_j{}^r=-\frac{\varepsilon}{h^2}E_{j-1}\{r^{-}W_{j-1}+r^{\circ}W_jS(j-1,j)+r^{+}W_{j+1}S(j-1,j+1)\} \tag{5.15}$$

$$\tau_j{}^q=\varepsilon E_{j-1}\{q^{-}V_{j-1}+q^{\circ}V_jS(j-1,j)+q^{+}V_{j+1}S(j-1,j+1)\} \tag{5.16}$$

首先估计$\tau_j{}^r$，将(5.10)～(5.13)代入(5.15)，并将$\exp(-a^{-}h/2)$和$\exp(a^{+}h/2)$展开，得

$$\begin{aligned}\tau_j^r=-\frac{\varepsilon}{h^2}E_{j-1}\{&[-(\sqrt{\bar{\beta}(x_j)})'\frac{h^2}{\sqrt{\varepsilon}}\exp(-\rho)+\bar{r}(\rho)\frac{h}{2}(-a^{-}+a^{+}\exp(-2\rho))\\&+\frac{h}{2}(a^{-}-a^{+})\exp(-\rho)+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2\bar{r}(\rho)((a^{-})^2+(a^{+})^2\exp(-2\rho))]W_j\\&+[-2h\rho\exp(-\rho)+\frac{h}{2}\bar{r}(\rho)(a^{-}+a^{+}\exp(-2\rho))]W_j'\\&-h^2\bar{r}^{\circ}(\rho)\exp(-\rho)W_j''\}+N\cdot O(h^2)\end{aligned} \tag{5.17}$$

分两种情况讨论：

(i) 当$\sqrt{\varepsilon}\leqslant ch$时，(5.17)化为

$$\tau_j^r=-\frac{\varepsilon}{h^2}E_{j-1}\{-[(\sqrt{\bar{\beta}(x_j)})'\frac{h^2}{\sqrt{\varepsilon}}+a_j\rho h]W_j-2h\rho W_j'\}\exp(-\rho)+N\cdot O(h^2)$$

利用

$$W'=[Z'+\frac{\sqrt{\bar{\beta}}-\sqrt{b}}{\sqrt{\varepsilon}}Z]\exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^x(\sqrt{\bar{\beta}(t)}-\sqrt{b(t)})dt\right) \tag{5.18}$$

$$Z'=-\frac{1}{4}\left(a+\frac{q'}{q}\right) \tag{5.19}$$

$$b'=b(q'/q-a) \tag{5.20}$$

$$\sqrt{\bar{\beta}(x_j)}-\sqrt{b(x_j)}=O(\varepsilon),\ (\sqrt{\bar{\beta}(x_j)})'=\frac{b(x_j)}{2\sqrt{\bar{\beta}(x_j)}}+O(\varepsilon) \tag{5.21}$$

有

$$\begin{aligned}\tau_j^r=\sqrt{\varepsilon}\,E_0(x_j)/\sqrt{\bar{\beta}(x_j)}&\left\{\frac{b_j}{2}(q_j'/q_j-a_j)+(b_j+\frac{\varepsilon a^2_j}{4})a_j\right.\\&\left.-\frac{1}{2}\left(b_j+\frac{\varepsilon a_j^2}{4}\right)(a_j+q_j'/q_j)\right\}Z_j+N\cdot O(h^2)=N\cdot O(h^2)\end{aligned} \tag{5.22}$$

(ii) 当$\sqrt{\varepsilon}\geqslant ch$时，由$a^{\pm}=a_j\pm ha_j'/2+O(h^2)$，及注3.2，可将(5.17)化为

$$\begin{aligned}\tau_j^r=-\frac{\varepsilon}{h^2}E_{j-1}&\left\{\left[-(\sqrt{\bar{\beta}(x_j)})'\frac{h^2}{\sqrt{\varepsilon}}-ha_j\rho-\frac{h^2}{2}a_j'\rho+\frac{h^2}{2}a_j'\rho-\frac{h^2}{4}\bar{r}^{\circ}(\rho)a_j^2\right]W_j\right.\\&\left.+[-2h\rho-h^2a_j\bar{r}^{\circ}(\rho)]W_j'-h^2\bar{r}^{\circ}(\rho)W_j''\right\}+O(h^2)\end{aligned}$$

将(5.18)及

$$\begin{aligned}W''=&\left[Z''+\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}(\sqrt{\bar{\beta}}-\sqrt{b})Z'+(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\sqrt{\bar{\beta}}-\sqrt{b})'+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\sqrt{\bar{\beta}}-\sqrt{b})^2)Z\right]\\&\cdot\exp\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^x(\sqrt{\bar{\beta}}-\sqrt{b})dt\right]\end{aligned}$$

代入上式，利用(3.10)，有

$$\tau_j^r=-\frac{\varepsilon}{h^2}E_0(x_j)\{[-\frac{h^2}{\sqrt{\varepsilon}}(\sqrt{b_j})'-\frac{h^2}{\sqrt{\varepsilon}}a_j\sqrt{b_j}]Z_j+[-2\frac{h^2}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{b_j}+h^2a_j]Z_j'+h^2Z_j''\}+O(h^2)$$

将(5.19)，(5.20)代入上式，可得

$$\tau_j^r=-\varepsilon(p_jZ_j')'/p_jE_0(x_j)+O(h^2) \tag{5.23}$$

于是(5.22)，(5.23)给出

$$\tau_j^r=\begin{cases}O(h^2)\sqrt{\varepsilon}/h & (\text{当}\sqrt{\varepsilon}\leqslant ch)\\ -\varepsilon(p_jZ_j')'/p_jE_0(x_j)+O(h^2) & (\text{当}\sqrt{\varepsilon}\geqslant ch)\end{cases} \tag{5.24}$$

现估计τ_j^q。由(5.16)易见，当$\sqrt{\varepsilon}\leqslant ch$时$\tau_j=N\cdot O(h^2)$。对$\sqrt{\varepsilon}\geqslant ch$的情况，利用(3.12)，(5.11)和$V(x_{j\pm1})$在$x_j$处的展开式，得

$$\begin{aligned}\tau_j^q&=\varepsilon E_jV_j\mathrm{ch}^2(\rho)+O(h^2)\\&=\varepsilon(p_jZ_j')'/p_jE_0(x_j)+O(h^2)\end{aligned}$$

于是由(5.14)和(5.24)我们可证明

定理5.4 $|\tau_j(G_0)|\leqslant cNh^2 \qquad (1\leqslant j\leqslant J-1)$

由定理5.2～5.4，得到(2.4)的截断误差估计

定理5.5 $|\tau_j(u)|\leqslant cNh^2 \qquad (1\leqslant j\leqslant J-1)$

六、一致收敛性定理

通过上一节的截断误差分析，我们可以来导出解的二阶一致收敛性结果。

定理6.1 若$u(x_j)$和u_j分别为(1.1)和(2.4)的精确解，则存在一与ε无关的常数M，得

$$|u_j-u(x_j)|\leqslant Mh^2 \qquad (j=0,1,\cdots,J)$$

证明 作比较函数$\varphi_j=Mh^2$，则由(3.2)和性质3(ii)

$$\begin{aligned}R^h\varphi_j&=-\frac{\varepsilon}{h^2}(r^-+r^o+r^+)\varphi_j\\&=2(b^-q^-+b^+q^+)\varphi_j\\&\geqslant c\varphi_jN \qquad (\text{当}h\text{适当小时})\end{aligned}$$

由定理5.5，知

$$|R^hu(x_j)-R^hu_j|=|\tau_j(u)|\leqslant cNh^2$$

故当h适当小，不妨设$h\leqslant c_1$，可选取M，使

$$|R^hu(x_j)-R^hu_j|\leqslant R^h\varphi_j \qquad (j=1,\cdots,J-1)$$

而$|u(x_j)-u_j|\leqslant\varphi_j(j=0,J)$显然成立，故由定理3.1，有

$$|u(x_j)-u_j|\leqslant\varphi_j=Mh^2 \qquad (j=0,1,\cdots,J)$$

当$h\geqslant c_1$时，由$u(x_j)$及u_j的一致有界性（见(4.1)和(3.3)），有

$$|u(x_j)-u_j|\leqslant c\leqslant c/c_1^2h^2=Mh^2\text{。}\quad\text{证毕。}$$

定理6.1表明差分格式(2.4)是关于ε一致收敛的二阶格式。

参考文献

[1] El-Mistikawy, T. M. and M. J. Werle, Numerical method for boundary layers with blowing—the exponential box scheme, *AIAA. J.*, 16 (1978), 749—751.

[2] Hegarty, A. F., J. J. H. Miller and E. O'Riordan, Uniform second order difference scheme for singular perturbation problems, *Proc. Internat. Conf. on Boundary and Interior Layers, Computational and Asymptotic Methods*, June 3—6, (1980), Trinity College, Dublin, Ireland (J. J. H. Miller ed.), Boole Press, Dublin (1980), 301—306.

[3] 郭雯，小参数自共轭问题Exponential Box 格式的一致收敛性，国际常微分方程会议资料，福州大学 (1985).

[4] Smith, D. R., The multivariable method in singular perturbation analysis, *SIAM Rev.*, 17 (1973), 221—273.

A Uniformly Convergent Second Order Difference Scheme for a Singularly Perturbed Self-Adjoint Ordinary Differential Equation in Conservation Form

Guo Wen　　Lin Peng-cheng

(*Fuzhou University, Fuzhou*)

Abstract

In this paper, based on the idea of El-Mistikawy and Werle we construct a difference scheme for a singularly perturbed self-adjoint ordinary differential equation in conservation form. We prove that it is a uniformly convergent second order scheme.