应用数学和力学，第10卷第3期（1989年3月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于损伤张量的阶次*

吕运冰　陈幸福

（华中工学院，1987年6月12日收到）

摘　要

本文首先讨论了较为广泛的连续介质材料的应力变形本构关系，得到了通常以泛函表示的应力变形本构关系的张量表达式．以此为基础，研究了各向异性材料各向异性损伤时，无论从连续介质力学模型出发还是从缺陷模型出发，描述损伤的张量都存在最高阶次的限制；指出了在什么条件下，损伤变量可用低于最高阶次的张量来描述．

对于各向异性损伤，研究者从连续介质力学或不同的微缺陷模型出发，致力于用矢量或不同阶次的张量来描述．

Krajcinovic[1]从材料的微缺陷模型出发，对扁平缺陷采用矢量来描述材料的损伤．Vakulenko 和 Kachanov[2]用微裂纹的法向矢量和裂纹面的相对位移矢量的并矢构成的二阶张量来描述损伤．Murakami 和 Ohno[3]从微孔隙的配置出发用二阶张量来描述损伤．Leckie 和 Onat[4]用材料内部微孔隙的数密度和体密度来度量材料的受损状态，指出用偶次阶张量来描述损伤．Chaboche[5]从弹性模量的变化来描述损伤，结果得到了八阶张量．一般说来，从不同的模型出发，对损伤的描述可得到不同的矢量和不同阶次的张量，只要有理论和实验依据说明模型的正确性和适用范围．但是，在[4]，[5]中的模型提出以后，也许会使人感觉到描述损伤的阶次愈高，描述材料的受损状态也愈完全，因而在构造模型时，可以无限制地构想高阶次的张量．本文的目的在于说明，对于一类范围十分广泛的材料，无论是从连续介质力学或微孔隙模型出发，在描述极端各向异性材料的极端各向异性损伤时，存在最高阶次的限制，超过了这个限制，只能徒增数学上的烦恼和实验验证上的困难．另外，本文还说明了在什么条件下，损伤可以用低于最高阶次的张量来表示．为此，本文第一部分将讨论应力变形本构关系的张量表示，作为后面讨论损伤张量的预备．

一、本构泛函的张量表示

在理性连续介质力学的研究中，应力变形本构关系通常以泛函的形式出现，下面将说明，在较为一般的情况下，本构泛函可用张量形式表示．

物体$\mathscr{B}$中的粒子X在时间t所佔据的位置为$\mathbf{x}$，粒子X在时间t具有的 Canchy 应力$\mathbf{T}$应由构成物体的全部粒子运动的全部历史$\mathbf{x}^t$所决定．理想物质本构关系的一般表达式为

---

* 李灏推荐．

$$\mathbf{T}(X,\ t)=\mathscr{F}(\mathbf{x}^t,\ X,\ t) \tag{1.1}$$

这里，$\mathscr{F}$是以X，t为参数的函数$\mathbf{x}^t$的泛函。对于以变形梯度的历史$\mathbf{F}^t$作为运动历史的简单物质，(1.1)式简化为

$$\mathbf{T}=\mathscr{F}(\mathbf{F}^t) \tag{1.2}$$

对变形梯度进行极分解，得到刚性旋转$\mathbf{R}^t$和纯粹伸长变形$\mathbf{U}^t$，即$\mathbf{F}^t=\mathbf{R}^t\mathbf{U}^t$。于是，得到(1.2)式的简化式[6]

$$\bar{\mathbf{T}}=\mathfrak{G}(\bar{\mathbf{C}}_t^t,\ \mathbf{C}(t)) \tag{1.3}$$

式中，$\bar{\mathbf{C}}_t^t=(\mathbf{U}_t^t)^2$是从现在构形所测出的右Cauchy-Green相对形变张量的历史；$\mathbf{C}(t)=\mathbf{U}^2$是从参考构成测出的现在形变张量。将(1.3)分解成为两部分：

$$\bar{\mathbf{T}}=\bar{\mathbf{T}}_E+\bar{\mathbf{T}}_A \tag{1.4}$$

$$\bar{\mathbf{T}}_E=\mathfrak{G}(\mathbf{I},\ \mathbf{C})=\mathbf{K}(\mathbf{C}) \tag{1.5}$$

$$\bar{\mathbf{T}}_A=\mathscr{L}(\mathbf{J},\ \mathbf{C})=\mathfrak{G}(\mathbf{C}_t^t,\ \mathbf{C})-\mathbf{K}(\mathbf{C}) \tag{1.6}$$

式中，

$$\mathbf{J}(t)=\mathbf{C}_t^t-\mathbf{I} \tag{1.7}$$

$$\mathscr{L}(\mathbf{0},\ \mathbf{C})=\mathbf{0} \tag{1.8}$$

在静止历史$\mathbf{J}=\mathbf{0}$的情况下，应力$\bar{\mathbf{T}}$成为$\bar{\mathbf{T}}_E$，$\bar{\mathbf{T}}_E$完全由现在形变张量$\mathbf{C}$决定，故$\bar{\mathbf{T}}_E$是弹性应力，(1.5)为弹性本构关系。

由减退记忆原理，考虑近的过去与远的过去对现时状态的不同影响，取影响函数$h(s)$，$(0\leqslant s<\infty)$，s是以现在作为原点随着追溯过去而增加的时间。$h(s)$满足

$$h(s)>0,\ \lim_{s\to\infty}s^r(h(s))=0 \tag{1.9}$$

时，能够定义一个绝对且一致收敛的广义积分作为范数，

$$\|\mathbf{J}(t)\|=\left[\int_0^\infty|\mathbf{J}(t)|^2h^2(s)ds\right]^{1/2}$$

具有这个范数表示的$\|\mathbf{J}(t)\|$的集合生成 Banach 空间，若假定$\mathscr{L}$对历史的范数是连续的，即

$$\lim_{\|\Delta\mathbf{J}\|\to 0}\mathscr{L}(\mathbf{J}+\Delta\mathbf{J},\mathbf{C})=\mathscr{L}(\mathbf{J},\mathbf{C}) \tag{1.10}$$

则可对 Banach 空间的元素$\mathscr{L}(\mathbf{J},\ \mathbf{C})$进行 Taylor 展开，当在静止历史$\mathbf{0}$对历史$\mathbf{J}$进行展开时，若存在一阶 Fréchet 可微，展开式为：

$$\bar{\mathbf{T}}_A=\mathscr{L}(\mathbf{J},\ \mathbf{C})=D\mathscr{L}(\mathbf{0}|\mathbf{J},\ \mathbf{C})+\mathfrak{M}_1(\mathbf{J},\ \mathbf{C}) \tag{1.11}$$

这里D表示 Fréchet 微分标符，$\mathfrak{M}_1$有$\mathbf{O}(\|\mathbf{J}\|)$的阶数，即

$$\lim_{\|\mathbf{J}\|\to 0}\|\mathbf{J}\|^{-1}\mathfrak{M}_1(\mathbf{J},\ \mathbf{C})=0 \tag{1.12}$$

若存在n阶 Fréchet 可微，本构泛函的展开式为：

$$\bar{\mathbf{T}}_A=\mathscr{L}(\mathbf{J},\mathbf{C})=\sum_{i=1}^n\frac{1}{i!}D^i\mathscr{L}(\mathbf{0}|\mathbf{J}\cdots\mathbf{J})+o(\|\mathbf{J}\|^n) \tag{1.13}$$

式中，$D^i\mathscr{L}(\mathbf{0}|\mathbf{J}\cdots\mathbf{J})$是$\mathscr{L}$在$\mathbf{0}$历史处的$i$重线性映射。将(1.13)代入(1.4)，并利用(1.5)、(1.6)得

$$\bar{\mathbf{T}}=\mathbf{K}(\mathbf{C})+\sum_{i=1}^n\frac{1}{i!}D^i\mathscr{L}(\mathbf{0}|\mathbf{J}\cdots\mathbf{J})+o(\|\mathbf{J}\|^n) \tag{1.14}$$

首先考察第一项，$\bar{\mathbf{T}}_E=\mathfrak{S}(\mathbf{I},\ \mathbf{C})=\mathbf{K}(\mathbf{C})$，$\mathbf{K}(\mathbf{C})+D\mathscr{L}(\mathbf{0}|\ \mathbf{J},\ \mathbf{C})$表示粘弹性，$\bar{\mathbf{T}}_E$应为线弹性应力，它仅由现时的变形$\mathbf{C}$决定，故$\mathbf{K}(\mathbf{C})$满足

$$\mathbf{K}(\mathbf{C}_1+\mathbf{C}_2)=\mathbf{K}(\mathbf{C}_1)+\mathbf{K}(\mathbf{C}_2),$$

$$\mathbf{K}(\lambda\mathbf{C})=\lambda\mathbf{K}(\mathbf{C}),\ \lambda=\text{const},$$

所以$\mathbf{K}$是线性算子，于是(1.5)可表示成内积形式

$$\bar{\mathbf{T}}_E=\mathbf{K}(\mathbf{C})=\mathbf{K}_0\mathbf{C} \tag{1.15}$$

由内积的定义知，$\mathbf{K}_0$是阶次为四阶的张量，又$\bar{\mathbf{T}}_E=\bar{\mathbf{T}}_E^T$，$\mathbf{C}=\mathbf{C}^T$，有$\mathbf{K}_0=\mathbf{K}_0^T$，即$\mathbf{K}_0$是对称四阶张量。

(1.14)的求和符号中$i=1$的项是 Fréchet 一阶微分，也是线性算子。由 Frechet 微分运算法则，$D\mathscr{L}(\mathbf{0}|\mathbf{JC})$可写成 Jacobi 矩阵与生成的 Banach 空间的集合的元素$\mathbf{J}$的内积[7]，即

$$D\mathscr{L}(\mathbf{0}|\mathbf{J},\ \mathbf{C})=\frac{\partial\mathscr{L}_{\alpha\beta}(\mathbf{0})}{\partial J_{\gamma\varepsilon}}J_{\gamma\varepsilon} \tag{1.16a}$$

式中$\mathscr{L}_{\alpha\beta}$，$J_{\gamma\varepsilon}$是$\mathscr{L}$和$\mathbf{J}$的分量，由此可知$\partial\mathscr{L}_{\alpha\beta}(\mathbf{0})/\partial J_{\gamma\varepsilon}$也是四阶对称张量，以$\mathbf{K}_1$表示，其分量为

$$K_{1\alpha\beta\gamma\varepsilon}=\frac{\partial\mathscr{L}_{\alpha\beta}(\mathbf{0})}{\partial J_{\gamma\varepsilon}} \tag{1.16b}$$

同理，

$$D^2\mathscr{L}(\mathbf{0}|\mathbf{JJ},\ \mathbf{C})=\frac{\partial^2\mathscr{L}_{\alpha\beta}(\mathbf{0})}{\partial J_{\gamma\varepsilon}\partial J_{\lambda\delta}}J_{\gamma\varepsilon}J_{\lambda\delta}=\frac{\partial^2\mathscr{L}_{\alpha\beta}(\mathbf{0})}{\partial J_{\lambda\delta}\partial J_{\gamma\varepsilon}}J_{\lambda\delta}J_{\gamma\varepsilon} \tag{1.17a}$$

二阶 Fréchet 导数$\dfrac{\partial^2\mathscr{L}_{\alpha\beta}(\mathbf{0})}{\partial J_{\lambda\delta}\partial J_{\gamma\varepsilon}}$为六阶对称张量，它与$J_{\lambda\delta}$缩并后，成为四阶对称张量$\mathbf{K}_2$，

$$K_{2\alpha\beta\gamma\varepsilon}=\frac{\partial^2\mathscr{L}_{\alpha\beta}(\mathbf{0})}{\partial J_{\lambda\delta}\partial J_{\gamma\varepsilon}}J_{\lambda\delta} \tag{1.17b}$$

依此，

$$\begin{aligned}D^i\mathscr{L}(\mathbf{0}|\mathbf{J}\cdots\mathbf{J})&=\frac{\partial^i\mathscr{L}_{\alpha\beta}(\mathbf{0})}{\partial J_{\gamma\varepsilon}\partial J_{lk}\cdots\partial J_{\mu\nu}}J_{\gamma\varepsilon}J_{lk}\cdots J_{\mu\nu}\\&=\frac{\partial^i\mathscr{L}_{\alpha\beta}(\mathbf{0})}{\partial J_{\mu\nu}\cdots\partial J_{lk}\partial J_{\gamma\varepsilon}}J_{\mu\nu}\cdots J_{lk}J_{\gamma\varepsilon}\end{aligned} \tag{1.18a}$$

得到对称四阶张量$\mathbf{K}_i$

$$K_{i\alpha\beta\gamma\varepsilon}=\frac{\partial^i\mathscr{L}_{\alpha\beta}(\mathbf{0})}{\partial J_{\mu\nu}\cdots\partial J_{lk}\partial J_{\gamma\varepsilon}}J_{\mu\nu}\cdots J_{lk} \tag{1.18b}$$

考虑到(1.15)直至(1.18b)各式，(1.14)成为：

$$\bar{\mathbf{T}}=\mathbf{K}_0\mathbf{C}+\mathbf{K}_1\mathbf{J}+\mathbf{K}_2\mathbf{J}+\cdots\mathbf{K}_n\mathbf{J}+o(\|\mathbf{J}\|^n) \tag{1.19}$$

当$n\to\infty$时，或在忽略$n+1$阶高阶微量的情况下，

$$\bar{\mathbf{T}}=\mathbf{K}_0\mathbf{C}+(\mathbf{K}_1+\mathbf{K}_2+\cdots+\mathbf{K}_n)\mathbf{J}$$

将其记为

$$\bar{\mathbf{T}}=\mathbf{K}\tilde{\mathbf{J}} \tag{1.20}$$

易知，$\mathbf{K}$为对称四阶张量，此即具有减退记忆的简单物质的本构关系的张量表达式，它与$\mathbf{T}=\mathscr{T}(\mathbf{F}^t)$这种以泛函形式表达的关系式是等价的。$\bar{\mathbf{T}}=\mathbf{K}\tilde{\mathbf{J}}$与弹性本构关系$\bar{\mathbf{T}}_E=\mathbf{K}_0\mathbf{C}$形式上

是相同的。因此，我们在下面各节讨论弹性物质受损后的损伤描述在很多情况下是适用于具有减退记忆的简单物质的。

二、描述损伤变量的宏观模型

材料的弹性本构关系为

$$\mathbf{T}=\mathbf{K}:\mathbf{E} \tag{2.1}$$

（为方便计，这里使用的符号与本文第一部分使用的符号不尽相同，不作说明时，下文都采用本文这部分使用的符号。）(2.1)中的$\mathbf{K}$是弹性张量，$\mathbf{E}$为应变张量。材料受损后，性能劣化，刚度下降，本构关系为

$$\mathbf{T}=\mathbf{K}':\mathbf{E} \tag{2.2}$$

这里$\mathbf{K}'$为受损后的弹性张量。为描述损伤，引入的变量应包含从$\mathbf{K}$变化到$\mathbf{K}'$材料受损的全部效应，为此，定义$\boldsymbol{\phi}$为

$$\boldsymbol{\phi}=\mathbf{K}'\otimes\mathbf{K}^{-1}\text{或}\phi_{ijklmnpq}=K'_{ijkl}K_{mnpq} \tag{2.3}$$

这里$\boldsymbol{\phi}$为八阶张量，可以看出，从材料损伤的本构关系上看，包含材料损伤的全部效应的损伤变量最高只需要八阶张量。这里最高阶次的意义是指八阶张量已足够描述材料受损的最一般情况，亦即极端各向异性材料在极端各向异性损伤下的情况。阶数再高是不必要的。材料受损后，应力、应变本构关系不再由线性关系给出。对于具有减退记忆的简单物质，由(1.20)可以看出，本构泛函仍等价于与时间有关的对称四阶张量作用的线性变换。因此，上述关于弹性效应的特殊情况下的讨论也适用于一般简单物质，如(2.3)式对简单物质仍然适用，只是$\boldsymbol{\phi}$为与时间有关的变量。

考虑到$\mathbf{K}$的对称性，知$\boldsymbol{\phi}$具有$6^4=1296$个分量这对于损伤张量的实验测量，模型的验证及实际应用都是极为困难的。我们的讨论仅能为确定损伤模型提出一个限制，并为其简化提供依据。

下面讨论在什么条件下，损伤张量可以用较低阶次的张量来描述，从而可以看出，在八阶以下，损伤张量的阶次也不具有任意性。

分别定义有效应力、有效应变

$$\tilde{\mathbf{T}}=\mathbf{M}:\mathbf{T} \tag{2.4}$$

$$\tilde{\mathbf{E}}=\mathbf{N}:\mathbf{E} \tag{2.5}$$

这里$\mathbf{M}$及$\mathbf{N}$的分量M_{ijkl}及N_{ijkl}关于下标ij，kl是对称的，用有效应力、有效应变代替(2.2)式中受损材料的应力与应变，有受损材料的本构关系：

$$\mathbf{M}:\mathbf{T}=\mathbf{K}:\mathbf{N}:\mathbf{E} \tag{2.6a}$$

或

$$\mathbf{T}=\mathbf{M}^{-1}:\mathbf{K}:\mathbf{N}:\mathbf{E} \tag{2.6b}$$

对比(2.2)，有

$$\mathbf{K}'=\mathbf{M}^{-1}:\mathbf{K}:\mathbf{N}\text{或}K'_{ijkl}=M^{-1}_{ijkl}K_{mnpq}N_{pqkl} \tag{2.7}$$

比较(2.3)，又有

$$\phi_{ijklmnpq}=M^{-1}_{ijmn}N_{pqkl} \tag{2.8}$$

从$\boldsymbol{\phi}$的构造中，可以看出i，j，k，l，m，n，p，q这八个下标的出现，是由两个四阶张量

M^{-1}_{ijmn}和N_{klpq}的外积而来的，而M^{-1}_{ijmn}和N_{pqkl}的四个下标是分别由与(2.4)、(2.5)相连的受损前后的应力下标和应变下标确定的。可见八个下标可通过四对下标讨论，其中两对下标与应力对应，两对与应变对应。又由应力张量与应变张量的对称性知，每对下标是可互换位置的。为说明这种关系，将八个下标用下图表示：

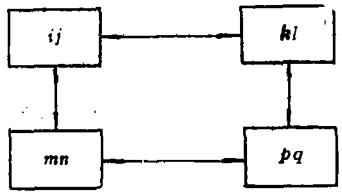

图 1

第一横排四个下标为受损前弹性张量的四个下标ij与应力相连，kl与应变相连，其关系由(2.1)确定。第二横排的四个下标为受损后弹性张量的四个下标，mn与pq分别与应力，应变相连，其关系由(2.2)确定。i，j，k，l，m，n，p，q共同构成ϕ的八个下标，其关系式由(2.3)确定；方框中每对下标可互换位置，由应力、应变张量的对称性确定。方框中的这些关系，决定了为简化ϕ而将其缩并时，下标个数的减少不能为奇数，因受损前（或后）应力应变的对应下标为一个整体，应力下标必与应变下标同时缩并一个，否则ϕ不能明确表示出任何物理含义，这是本文在损伤张量的讨论中给出的第二个结论。至于人们用矢量来描述损伤[1]，是从微观模型出发引进的，与上面从宏观连续介质力学出发得到的损伤张量只能为偶次阶的模型不同，本文将在第三部分另作说明。

上面的对应方框图还给出，在使用上述模型时，损伤变量ϕ缩并后也不能为六阶，这是因为：(2.8)式给出的ϕ是$\mathbf{M}^{-1}$与$\mathbf{N}$的外积，而(2.4)、(2.5)中给出的$\mathbf{M}$，$\mathbf{N}$显然不能为三阶；另外，在使用(2.4)、(2.5)描述损伤时，它们是分别与有效应力假设，有效应变假设对应的，而这两个假设在物理上是等同的，即在考虑$\mathbf{M}$，$\mathbf{N}$的阶次时，不能一个取二阶，一个取四阶，它们应具有相同的阶次，可见ϕ不能为六阶。

综合上述结论得到，从连续介质力学中弹性张量的改变出发建立的损伤模型，损伤张量的阶次不具有任意性。（严格地说，应为张量的秩不具有任意性）。最高只能为八阶，以下依次只能为四阶，二阶和零阶，故研究者在构造损伤模型时，应考虑上述结论的限制。至于人们为数学上的方便，将二阶张量用三阶反对称张量表示，这并不改变张量的秩仍为二，可见，本文所说的张量的阶次实指张量的秩数。

下面我们首先讨论损伤张量从八阶降低到四阶是在什么条件下完成的。实际上，将(2.8)中的$\mathbf{N}$取$\mathbf{M}^{-1}$，即$N_{pqkl}=M^{-1}_{pqkl}$或将$\mathbf{N}$取作单位张量$N_{pqkl}=\delta_{pk}\delta_{ql}$，亦或取$M^{-1}_{ijmn}=\delta_{im}\delta_{jn}$，则有

$$\phi_{ijklmnpq}=M^{-1}_{ijmn}M^{-1}_{pqkl} \tag{2.9}$$

或

$$\phi_{ijklmnpq}=M^{-1}_{ijmn}\delta_{pk}\delta_{ql} \tag{2.10}$$

或

$$\phi_{ijklmnpq}=\delta_{im}\delta_{jn}N_{pqkl} \tag{2.11}$$

可以看出，这时的ϕ的有效阶次只有四阶。这里，实际上给出了从最一般情况下八阶简化为四阶的简化过程，在(2.9)中，只需讨论$\phi_{ijkl}=M^{-1}_{ijkl}$，在(2.10)中只需讨论$\phi_{ijmn}=M^{-1}_{ijmn}$，在(2.11)中，只需讨论$\phi_{pqkl}=N_{pqkl}$。

应用(2.9)表示的ϕ变量，重复(2.4)到(2.7)的讨论可以看出，这样简化后的ϕ导致的结果实际上对应着Sidoroff[8]提出的应变能等效假设；由(2.10)表示的ϕ导致的结果实际上对应着Lemaitre[9]提出的应变等效性假设。类似地，对(2.11)表示的ϕ进行同样讨论，结果可同样得到一个应力等效性假设，当然无需作专门详尽的讨论了。

在许多情况下，四阶张量描述材料的损伤状态对模型的验证仍很困难，用于工程实际也不便。下面探讨作进一步简化的可能性，并尽可能揭示其表达的物理意义。这里，只需讨论$\phi_{ijkl}=M^{-1}_{ijkl}$这种情况，其它情况是类似的。$\phi_{ijkl}$的四个下标中，四个，二对是与应力下标相对应的，而应力的两个下标分别表示力作用的方向与力作用面的方向。因此，简化后可取ϕ_{ijkl}为：

$$\phi_{ijkl}=\phi_{ik}\delta_{jl} \tag{2.12}$$

这样简化的物理意义在于：损伤过程中，只考虑材料劣化对力作用面的有效作用面积和方向的影响。而不考虑其对各应力分量影响的不同，即对各应力分量的影响是各向同性的。

为减少应用力学工作者的麻烦，保证有效应力是对称张量，下面给出几种二阶张量模型表示的有效应力：

$$\tilde{\sigma}=\frac{1}{2}(\sigma\cdot\phi^{-1}+\phi^{-1}\cdot\sigma),\quad \tilde{\sigma}_{ij}=\frac{1}{2}(\delta_{in}\phi^{-1}_{mj}+\phi^{-1}_{im}\delta_{jn})\sigma_{mn}=M_{ijmn}\sigma_{mn} \tag{2.13}$$

$$\tilde{\sigma}=\phi^{-1/2}\cdot\sigma\cdot\phi^{-1/2},\quad \tilde{\sigma}_{ij}=(\phi^{-1/2}_{im}\ \phi^{-1/2}_{nj})\sigma_{mn}=M_{ijmn}\sigma_{mn} \tag{2.14}$$

$$\sigma=\frac{1}{2}\ (\tilde{\sigma}\phi+\phi\tilde{\sigma}),\quad \sigma_{ij}=\frac{1}{2}\ (\delta_{ni}\phi_{mj}+\phi_{im}\delta_{nj})\ \tilde{\sigma}_{mn}=M^{-1}_{ijmn}\ \tilde{\sigma}_{mn} \tag{2.15}$$

特别地，当材料初始各向同性且损伤发展各向同性时，上述描述损伤的参数可进一步简化成为一个标量，从而得到 Kachanov 早年提出的标量损伤因子ϕ，数学上的处理易于进行，不再赘述。

以上的讨论，只限于从连续介质力学的方法建立损伤模型，为建立和探索新的模型提出一些张量阶次的限制，以便研究者在实验数据的基础上有一个清晰的构造模型的思考方法。另外，上述讨论都是在三维空间进行的，这与下面要讨论的微观模型是不同的，不然将上述结论认为适用于微观模型。

三、描述损伤变量的微观模型

很多研究者不是从受损材料弹性张量$\mathbf{K}'$的变化来描述损伤，而是从观察到的材料内部的微结构来描述损伤的；或是通过损伤过程中其它物理量（如密度，电阻率、声速或声频）的变化来反映材料的损伤。本文不打算对这种构造模型的方法作条理化的整理，这是一个十分复杂的问题，但将其与连续介质力学的方法进行比较，也是有意义的。

事实上，材料在承载过程中，人们对材料微结构的变化认识是逐步深入的，分层次的。随着人们对材料微观特征认识的深度不同，引入的对损伤有影响的变量也不同，还因研究者注意点的侧重面不同而异。不过，总的看来，考虑到微观结构的变化的认识愈深入，引入的对损伤有影响的变量也就愈多。可将一个参数作为一个变量，于是，可用n个参数组成的n维矢量或n维空间中的张量来描述损伤。这样引入的参数不是从一般宏观模型简化而来，一般也可以不再是三维笛卡儿坐标系中的矢量或张量，这与本文第二部分的讨论不同，第二部分的结论也不再适用。文献[1]正是用这种思想方法，用n个扁平裂纹参数合成k个变量组成的k维矢量来描述损伤的。

由于损伤的微观特性、微孔洞或微裂纹的密度、取向和分布各异，考虑到这些因素对截面净应力的影响，也可用不同阶次的张量来描述损伤。Rabotnov 1968年开始引进的连续性因子ψ是这种思维方式的第一层次，实际上，他的模型隐含着镜孔隙的取向、分布是各向同性的假定。Murakami Ohno[8]的模型是这种思维方式的深入。在[3]中考虑了作用面积的

减小对应力主值的影响，而不考虑面积的减小对应力各分量的影响。从而得到二阶张量Ω，这是一个与孔隙百分比有关的量。Betten[10]对其进行了更深入的讨论，他对不含孔洞的无损材料的 Canchy 四面体的并矢特性和受损包含孔洞的四面体的并矢特性进行分析，从而找到了一个四面体斜截面上面积矢量变换的线性算子ψ，ψ为描述损伤的二阶张量。虽然在[10]中为方便计，导出一个与二秩连续性张量ψ对应的三阶反对称连续性张量，但其秩仍为2，后者纯粹是为数学上方便引进的，当然只能是反对称的。

以上[3]、[10]中从微结构的变化得到的二阶张量正好与宏观模型描述损伤的参量φ经多次简化后成为的二阶张量相吻合。

目前，损伤力学文献浩如烟海，但从微结构的变化描述损伤仍只限于矢量和二阶张量。笔者认为，就力学范围而言，一切微结构的变化最终只是对应力、应变产生影响，因而建立损伤连续性因子函数或描述损伤的张量阶数也不应太高。任何精细的分析，考虑到损伤影响的因素愈多，只会增加考虑问题的空间维数，不致也不必要增加损伤张量的阶次，即空间的维数 n 随考虑的因素的个数改变，但与应力、应变相联系的连续性因子的阶数不应过高。

最后，我们需要说明的是，本文的讨论，不是直接提供一个损伤模型，而在于提供一个在一类非常广泛的范围内，研究损伤建立模型时，存在一个数学上张量阶次的允许范围。

参 考 文 献

[1] Krajcinovic, D., Continuous damage mechanics revisited: basic concepts and definitions, *Lecture in University Paris* Ⅳ (1983).

[2] Vakulenko, A. A. and M. L. Kachnov, Continuum theory of cracked media, *Mekh. Tverdoga Tela.*, 6 (1971), 159—166. (in Russian)

[3] Murakami, S. and N. Ohno, A continuum theory of creep and creep damage, *IUTAM Symp. on Creep in Structure*, ed. by A. R. S. Sponter, Springer-Verlag (1981), 442—444.

[4] Leckie, F. A. and E. T. Onat, Tensorial nature of damage measuring internal variables, *IUTAM, Symp. on Physical Nonlinearities in Structural Analysis*, ed. by J.Hult and J. Lemaitre, Springer-Verlag (1981).

[5] Chaboche, J. L., Description thermodynamique et phenomenologigue de la viscoplaticite cyclique avec endommagment, These pour Doctoral d'Etal Univ. Paris VI et Publication CENRA, No. 1978-3.

[6] 德岡辰雄，《有理连続体力学入门》（连载讲座），機械の研究所（1976—1977）.

[7] Sneddon, I. N., Functional analysis, *Continuum Physics*, edited by A. C. Eringen, Academic Press (1976).

[8] Sidoroff, F., Description of anisotropic damage application to elasticity, *IUTAM Symp. on Phys. Nonlinearities in Stru. Analysis* (1980).

[9] Lemaitre, J., How to use damage mechanics, SMIRT-1, Chicago (1983)

[10] Bertten, J., Damage tensors in continuum mechanics, *J. de Mecan. Théo.et Appl.*, 2, 1 (1983).

The Order of a Damage Tensor

Lü Yun-bing Chen Xing-fu

(Huazhong University of Science and Technology, Wuhan)

Abstract

In this paper, the stress deformation constitutive relations for continua are discussed and a stress deformation constitutive relation expressed by functional tensorial expression is found. When we study the anisotropic damage of anisotropic materials, either from a macroscopic continuum mechanics model or from a micro-defect model, there exists a limitation to the order of a damage tensor, and the condition under which the damage variable may be described by a tensor lower than those of the highest order is found